НЕ СЕКРЕТНО
чл. 34, ал. 1 от ЗЗКИ
ИЗМ-1 / 2004 г.

~~За служебно ползуване~~

ИЗСЛЕДВАНЕ НА ОПЕРАЦИИТЕ

ТЕОРИЯ, ВОЕННИ ПРИМЕРИ И ЗАДАЧИ

ДЪРЖАВНО ВОЕННО ИЗДАТЕЛСТВО
София — 1975

Бу-2021

В книгата са разгледани основните положения по прилагането на някои методи от изследването на операциите при решаване на военни задачи. Показани са и типични примери, от които се виждат възможностите на тези методи.

Използуваният математически апарат не излиза извън рамките на курса по математика, който се преминава във висшите военни учебни заведения.

Книгата се състои от две части.

Първата част съдържа 3 глави, в които са изложени общите принципи по прилагането на изследването на операциите при решаване на задачи, изборът на критерии за ефективност, същността на моделирането и експериментирането на военни процеси и системи, определянето на информацията, която се въвежда в моделите.

Във втората част са разгледани основните методи за изследване на операциите, които може да бъдат приложени във военното дело. Тя съдържа три раздела, като в раздел първи е разгледана теорията на графите и мрежовото планиране, в раздел втори — математическото програмиране и в раздел трети — вероятните методи за изследване на операциите.

Трудът е предназначен за преподавателите и слушателите от Военна академия „Г. С. Раковски“ и за широк кръг военни читатели, които се интересуват от тези проблеми.

В разработването на материалите взе участие колектив преподаватели от Военна академия „Г. С. Раковски“, както следва:

Доц. полк. Д. В. Григоров — част първа — въведение и т. 4 от глава трета; част втора — глава шеста от раздел III.

Доц. полк. Т. Д. Аладжов к. в. н. — част втора — глава втора от раздел I.

Инж. полк. В. И. Калоянов, к. т.н. — част първа — т. 6, 7 от глава трета.

Доц. полк. Х. В. Каламов, к. в. н. — част първа — т. 1, 2 от глава трета.

Доц. полк. М. И. Узунов, к. в. н. — част първа — глава първа; част втора — т. 6, 7, 8, 9 от глава трета на раздел III.

Полк. И. Д. Пенков, к. в. н. — част първа — т. 3, 8 от глава трета; част втора — глава втора от раздел I и глава пета от раздел III.

Полк. Т. И. Михов, к. в. н. — част втора — глава втора от раздел I.

Полк. Т. Ц. Томов — част първа — глава втора и т. 5 от глава трета; част втора — глава четвърта и шеста от раздел III.

Полк. Д. Д. Попов — част първа — т. 4 от глава трета.

Инж. полк. А. С. Стефанов — част втора — глава втора от раздел III.

Инж. полк. П. И. Янев, к. т. н. — част втора — глава шеста от раздел II.

Капитан Н. Б. Василев, к. физико-мат. н. — част втора — глава първа, втора, трета, шеста и осма от раздел II.

Ст. препод. И. П. Пенев — част втора — въведение, т. 1, 2, 3, 4, 5 от глава трета и глава четвърта и пета от раздел III.

Ст. препод. Б. Д. Митов — част втора — глава седма и осма от раздел II и глава първа от раздел III.

Ст. препод. Л. Д. Цанов, к. физико-мат. н. — част втора — глава първа от раздел I и глава четвърта, пета и седма от раздел II.

Подготовката и общата редакция на книгата е извършена от доцент полковник Марко Узунов.

193/82/80

955/75

Част първа

ОБЩИ ПРИНЦИПИ ЗА ПРИЛОЖЕНИЕ НА ИЗСЛЕДВАНЕТО НА ОПЕРАЦИИТЕ КЪМ ВОЕННИТЕ ЗАДАЧИ

ВЪВЕДЕНИЕ

1. ЩО Е ИЗСЛЕДВАНЕ НА ОПЕРАЦИИТЕ

Проблемите на изследването на операциите занимават много учени от различни профили повече от едно десетилетие. Стремежът е да се изяснят същността и съдържанието на това понятие, неговата поява и връзката му с редица други понятия, които имат теоретическа и практическа стойност. Военните специалисти и изследователи също се стремят да изяснят смисъла, връзката и приложението му в стратегията, оперативното изкуство и тактиката, във военноинженерната област, военното производство и т. н.

Порасналото значение и популярността на това понятие са тясно свързани с научно-техническата революция, с необикновеното усложняване управлението на целенасочената човешка дейност във всяка практическа област, в това число и във военната.

Доказано е, че решението на командира (началника) представлява основната база, върху която се градят цялостната организация и управлението на боя. А съвременният бой, както е известно, възниква и протича за кратко време, при бързи и резки изменения на обстановката, като се използуват мощни поразяващи средства. В тези условия обемът на работата на командирите и щабовете, скоростта на вземането на решения и особено отговорността за резултатите от тях нарастват многократно. За да се излезе от това положение, освен всичко друго са необходими две задължителни изисквания:

— да се усъвършенствува оперативността на управлението;

— да се повиши обосноваността (аргументацията) на вземаните решения от командирите (началниците).

Първото може да се реализира чрез снабдяването на цялата система за управление с технически средства, в това число и за механизация и автоматизация.

Второто се постига посредством широкото използуване на сравнително новата теория — изследване на операциите. При това тя се прилага не само за обосноваване на решенията във военното дело, а и във всички други области, където се изработват и вземат решения, свързани с използуване (разпределение, изразходване) на труд, материали, време, енергия и информация.

Трябва да се изтъкне, че по отношение определението на понятието изследване на операциите са се водили и продължават да се водят, макар и вече частични, спорове между различни специалисти (математици, инженери, икономисти, военни и др.). Тук ще изложим само някои от определенията.

В първия том на съветската енциклопедия „Автоматизация на производството и промишлена електроника“ изследването на операциите е определено като „област на науката, която изучава въпросите на избора на решения по организацията и управлението на целенасочените процеси (операции)“.

В претендиращия за авторитетност труд на У. Чермен и др. изследването на операциите се характеризира като използуване на научни принципи, методи и средства към задачи, свързани с функционирането на организационни системи, с цел да се предостави възможност на тези, които управляват с помощта на тези системи, да вземат оптимални решения.

За военните специалисти представляват подчертан интерес определенията и тълкуванията на това понятие от съветските автори Е. С. Вентцел, Ю. Г. Милграм, И. Ануреев, А. Татарченко.

Професор Е. С. Вентцел, която за пръв път обобщи основните положения на изследването на операциите и разработи методите на тяхното приложение или разрешаването на проблемите по оценката на бойната ефективност на авиационните комплекси и въоръжението им, дава следното определение: „Под изследване на операциите се разбира специална наука, която се занимава с рационалните способи на организация на целенасочената човешка дейност.“

Ю. Г. Милграм прави опит да конкретизира още повече това понятие, като посочва, че то е „съвкупност от научни методи, с помощта на които се прави анализ на операцията и се изработват количествените обоснования и препоръки, касаещи нейната оптимална организация и провеждане“.

Анализът на тези и много други определения и тълкувания на понятието изследване на операциите и на съдържанието на неговата теория дава обща представа за предмета и съдържанието му, като едновременно свидетелствува и за непълната и недостатъчната изчерпателност на разглежданото понятие. Това има съществено значение, тъй като ако се разглежда решението като избор на рационални конструктивни параметри на проектирани технически средства, изследването на операциите осигурява избора на най-обоснованото решение. Ако обаче решението се разглежда като избор на способи за използуване на сили и средства в даден процес (операция, бой), където не всички елементи са известни и не всички известни условия на протичане на операцията може да са изразени количествено, изследването на операцията не може да даде еднозначно решение. В този случай с помощта на неговите методи може да се определи не решението, а само количествените основания за неговото вземане, които трябва да се отчитат заедно със субективните, психологическите, моралните и други фактори.

Ето защо, като тълкуват съдържанието на решението и на изследването на операциите, съветските автори И. Ануреев и А. Татарченко подчертават, че „. . . изводите, получени в резултат на количественото изследване, все още не са решение в пълния смисъл на думата, а са само основа за вземане на решение, което фактически се явява цялостен резултат от напрегнатата творческа дейност на щабовете и на волята на командирите (началниците)“.

Изследването на операциите се базира върху разкриването, математическото описание и съзнателното използуване (в някои случаи неутрализиране) на обективните закономерности, свързани с хода на управляемите (организираните) процеси в конкретните условия на протичането им, в тяхната взаимна връзка и зависимост.

Обобщавайки достигнатите разсъждения, можем да заключим, че под изследването на операциите трябва да се разбира научна теория, която въз основа на математическо описание и изследване на обективните закономерности на целенасочените процеси, като се отчитат условията на тяхното протичане, помага да се получат количестве-

ни обоснования, позволяващи в съчетание с качествени показатели да се вземат най-рационални решения по управлението на тези процеси.

2. ОСНОВНИ ПОНЯТИЯ В ИЗСЛЕДВАНЕТО НА ОПЕРАЦИИТЕ

Най-често срещаните и използувани понятия в областта на изследване на операциите са няколко, по-важните от които са: операция, модел на операцията, оптимално решение, критерий за ефективност и др. Ще се спрем накратко на тях.

Под операция в широкия смисъл на думата се разбира всяка конкретна дейност на по-голям колектив от хора или дори на отделен човек, ръководена от единен замисъл и предимно от един център (място). Тя може да протече чрез използуване на множество сложни технически средства с точно определена цел и да има като правило характер на многократна повторяемост. За пример може да се вземат: производството на даден отрасъл в икономиката; работата на транспортната система и свръзките; строителството; разнообразната дейност на войските и военните комплекси (оръжия и техника и др.).

Във военната област под операция се разбира както управлението и действията на крупни войскови обединения (сухопътни, военновъздушни, военноморски или смесени), така и действията на отделни или група комплекси от въоръжението и техниката, в които винаги участвуват хора.

Военните операции имат твърде разнообразен и сложен характер. Това се дължи преди всичко на недостатъчно пълната и точна информация, на липсата на характерната повторяемост на процесите, както при други операции (в икономиката), сбъдването на очакваните крайни събития има вероятностен характер, а и условията за започването на операциите никога не са еднакви. Затова пред военната кибернетика и изследването на операциите се поставя задачата да се опишат математически и да се оптимизират процесите, протичащи в рамките на операциите във военната област.

Под модел и моделиране се разбира винаги създаването на опростено копие на проектирано за конструиране оръжие (машина) или пък създаването (предизвикването) на даден процес (явление), служещ също като опростено копие на очакваните от нас явления (процеси). Моделите може да са

най-различни, в това число физически, графични, във вид на математически формули, смесени и т. н.

Модели на военната операция и боя са създаваните оперативни (бойни) обстановки на груповите занятия на карта, при решаване на летучки, в рамките на военните игри и тренировки, ученията с войски и бойна техника и др. Организирането, управлението и завършването на една военна операция в рамките на учения с войски (маневри) е най-съвършен модел, който е все пак копие на действителната бойна операция.

Ако в областта на техниката моделите улесняват конструкторите да създават замислените от тях машини (оръжия), във военното дело моделите и моделирането са средства и форми за обучение и тренировка на войските и щабовете за изпълнение на реални бойни задачи.

Под оптимално решение в по-широкия смисъл на думата се разбира най-рационалното решение, което осигурява постигането на поставената цел с най-малко разходи на труд, материали, време, енергия и информация. Това се отнася и за решенията, които се изработват и вземат във военната област. И тук оптималното решение за водене на боя и операцията или пък за тяхното осигуряване е избраното най-рационално решение, което осигурява постигането на основната цел с най-малко загуби на личен състав, бойна техника и материални средства и нанасянето на максимални загуби на противника във войски, техника, материални средства, територия, сломяване на неговия дух за съпротива и др.

Тъй като в по-нататъшното изложение на ефективността и свързаните с нея критерии е посветена отделна глава (II), тук ще се ограничим само с определянето на понятието критерий за ефективност, което се среща широко в изследването на операциите.

При изучаването на операциите е необходимо да се оцени степента на изпълнение на поставените конкретни цели в зависимост от възприетото решение. Във връзка с това се въвеждат така наречените критерии за ефективност.

Ако ефективността на операцията е приспособеността ѝ за постигане на поставената крайна цел, величината, която я изразява, се нарича критерий (показател, функция).

Избирането на подходящ критерий за ефективност на дадена операция е един от най-сложните проблеми, с които се занимава науката „изследване на операциите“. Най-често той е числена величина. Например, ако се организира и води бой с противника, за критерий на ефективността на операцията може

да се възприеме средният брой на унищожените му бойни единици. Във военното дело като критерий за ефективност могат да служат още величините: времето за провеждане на боя (операцията) или маршрутът; скоростта за движение на техниката (войските); загубите на противника (своите войски); количеството и стойността на материалните средства; размерът на овладяната територия; количеството на разгромените войски и взетите трофеи и т. н.

Ако операцията преследва няколко цели, между които една е основна, критериите за ефективност се делят на основни и допълнителни (подкритерии).

3. ЗНАЧЕНИЕ НА ИЗСЛЕДВАНЕТО НА ОПЕРАЦИИТЕ ЗА ВОЕННАТА НАУКА

Изследването на операциите като научна теория и практика е приложимо в редица отрасли на човешката дейност. Използуването му във военното дело вече взе широки мащаби и придоби такива особености, че неизбежно възникна необходимостта да се отдели от общата теория на изследването на операциите тази негова част, която се отнася до решаването на специфичните военни проблеми.

Развитието на изследването на операциите показва, че то възниква в сферата на военните изследвания и за военните нужди, а след това беше приложено в изучаването на редица други целенасочени управленчески процеси, където естествено беше обогатено с нови методи и с по-съвършен математически апарат.

Теорията на изследване на операциите, макар сега да е еднакво приложима в различните области на човешката дейност, изисква, поради специфичността на изследването на военните действия, свързана с отражението на военнотехническата революция, да се отдели това направление от изследването на операците, което има приложен характер при решаване на задачите на военната наука и практика.

То трябва да съдържа методологията за получаване на количествените основания за вземане на рационални решения по организацията, подготовката и воденето на бойните действия, ефективното управление на силите и средствата в боя и операцията, а също и при проектиране на техника и въоръжение или пък за оценка на тяхната бойна и техническа ефективност.

Както е известно, военното изкуство най-пълно и всестранно обхваща и осветлява закономерностите на подготовката и

воденето на различните бойни действия от различен мащаб, като отчита всички обективни и субективни условия и фактори, в това число бойните, политическите, моралните, волевите и т. н. Методологията на използуване на изследването на операциите във военното дело, изучаващо количествената страна на обективните закономерности, заема спомагателно, подчинено положение по отношение на военното изкуство.

Основните области за прилагане на теорията на изследване на операциите във военната наука и практика са следните:

Първа — при оценка на ефективността на отделен образец или комплекс от техника и въоръжение.

Втора — при оценка на ефективността на определени системи на въоръжение.

Трета — при оценка на бойните възможности на по-малки или по-големи войскови групировки.

Четвърта — при намиране на оптимален вариант за действие (маньовър) на войските.

В сегашния етап са достигнати значителни успехи при решаване на задачи, отнасящи се към първите две области. Много по-трудно е със задачите от третата и особено от четвъртата област.

Поставянето на споменатите задачи има за цел да се получат убедителни отговори на следните основни въпроси: Какъв ще бъде *очакваният резултат* от действията на определените по плана сили и средства? Какви трябва да бъдат *необходимите ресурси* от сили и средства за постигане на планирания резултат при отчитане противодействието на противника? Какъв трябва да бъде *оптималният план* за действия на използуваните сили и средства?

При решаването на тези и други подобни задачи се използуват най-широко електронноизчислителни и сметачно-клавишни машини, както и средствата на малката механизация — линийки, графици, таблици и номограми (при съставянето на оперативно-тактическите и инженерно-техническите разчети).

Редът за прилагане теорията на изследване на операциите при решаване на конкретни оперативно-тактически или материално-технически задачи е следният:

Най-напред се определя *целта на операцията* и се *поставя задачата на изследването*, за да се получи по възможност най-благоприятен резултат. Фактически това е първият и най-важен етап от логико-математическото изследване на дадени военни действия.

През втория етап се *построява моделът на*

операцията, който по същество е нейна опростена схема, удобна за изучаване и изследване. Както и другите модели, той трябва да е достатъчно елементарен и следователно разбираем, за да осигурява възможност за подробен анализ на явленията и събитията в нея.

През третия етап се анализират възможните варианти за постигане на поставената цел.

През четвъртия се оценява ефективността на действията на силите и средствата по набелязаните варианти. Тук се избира критерият за ефективност и се определя неговото числено значение за всеки вариант на решение. Счита се, че изборът на критерий за ефективност е най-трудният момент от математическото изследване на военните операции.

През последния (петия) етап се търсят най-целесъобразните (оптималните) в дадени условия варианти на действия (решения). След като се оцени ефективността на вариантите за действия, с помощта на подбраните критерии се избира най-добрият и най-приемливият от тях при конкретните условия за провеждане на операцията.

Посочената дейност в границите на указаните пет етапа се извършва чрез използуване както на началния, така и на създадения за конкретно възникващите задачи математически апарат.

В това се заключават значението и връзката на изследването на операциите с военната наука и поставените от нея практически задачи.

Глава първа

КРИТЕРИИ В ИЗСЛЕДВАНЕТО НА ОПЕРАЦИИТЕ

1. ОСНОВНИ ИЗИСКВАНИЯ КЪМ КРИТЕРИИТЕ ЗА ЕФЕКТИВНОСТТА

Под ефективност на операцията се разбира степента на нейната приспособеност към изпълнението на задачите. Колкото по-добре е организирана операцията, толкова тя е по-ефективна.

За да се направят изводи за ефективността на операциите, необходим е числен показател, който се нарича критерий на ефективността.

Конкретният вид на този критерий винаги се избира в зависимост от задачите на операцията.

Най-важните изисквания, на които трябва да отговарят критериите на ефективността при изследване на операциите, са:

— представителност;
— критичност към изследваните параметри;
— максимално възможна простота и понятен физически смисъл;
— да обединяват по възможност всички основни елементи на изследваната операция;
— правилно да отчитат стохастичността (случайността) на процеса.

Критерият трябва да е представителен, т. е. да позволява да се оцени ефективността от решаването на основната задача на операцията, а не на второстепенните. Целта на операцията трябва да се изразява пряко в критерия. Неправилният избор на критерия води до безполезни изследвания. Поради това трябва да се отдели особено внимание за изясняване на целта на операцията и за нейното математическо описание.

Критерият трябва да е критичен, т. е. чувствителен към измененията на изследваните параметри (всеки от тях да измени стойността му).

Той трябва да е максимално прост. Въвеждането на второстепенни величини може да усложни изследванията, без да води до уточнени изводи. Желателно е критерият да е един, защото решаването на задачите при наличието на два критерия се затруднява значително.

С оглед целевата насоченост на различните операции може да се очертаят два типични крайни случая.

Първи случай. Операцията се изпълнява, за да се достигне някакъв напълно определен резултат (поразяване на самолет, разрушаване на мост, унищожаване на 50% от танковете на противника и т. н.). Този резултат или може да се достигне, или не. Междинните резултати не се разглеждат. В този случай критерий на ефективността е вероятността за изпълнение на поставената бойна задача.

Ако се обозначи с A събитието, че бойната задача е изпълнена, критерий на ефективността (W) е вероятността за сбъдване на събитието A, т. е.

$$W = P(A).$$

Втори случай. Задачата на операцията не е да се достигне определен резултат, а да се нанесат максимално възможните загуби на противника. Те могат да се измерват в едни или други единици в зависимост от задачата. Например при стрелба с ракета по даден обект на противника мярка за загубите може да е поразяваната площ. Колкото тя е по-голяма, толкова е по-добре.

В този случай критерий на ефективността е средното значение (математическото очакване) на загубите, понесени от противника, т. е.

$$W = M(У),$$

където:

W е критерий на ефективността;

$У$ — понесени загуби от противника.

Да разгледаме няколко примера за избиране показателя на ефективността.

1. Трябва да се доставят боеприпаси от техническата позиция в районите на огневите позиции за определено време. Цел на операцията — доставяне на боеприпасите за възможно най-кратко време. Критерий на ефективността — средното време за постигане на целта.

2. Група бомбардировачи нанасят удар по промишлен район. Цел на операцията — да се извършат разрушения върху колкото е възможно по-голяма площ. Критерий на ефективността — средната площ на разрушенията.

3. Зенитно-ракетна групировка осигурява ПВО на район от територията на страната. Към него се насочват самолети на противника. Задача на ПВО — да се свалят колкото е възможно по-голям брой от тях. Критерий на ефективността — математическото очакване (средният брой) на свалените самолети.

4. Зенитно-ракетна част осигурява ПВО на обект с особена важност. Всеки самолет, носител на ядрено оръжие, при проникване към обекта може да го унищожи. Задача на ПВО — да не се допусне към обекта нито един самолет. Критерий на ефективността — вероятността, че нито един самолет няма да стигне до обекта.

5. Провеждат се мероприятия за повишаване надеждността в работата на електронноизчислителната машина (ЕИМ), т. е. да се удължи периодът между повредите. Критерий на ефективността — средното време на безотказна работа на ЕИМ.

6. Оценява се системата за управление, осигуряваща насочване на снаряда към целта. Критерий за ефективността — средноквадратичното отклонение на разсейването на точката на попадението. Колкото то е по-малко, толкова насочването е по-точно.

Очевидно е, че при изследването на някои операции ще е необходимо да се приеме такава организация, при която критерият на ефективността има максимална стойност. При друга група операции трябва да се приеме такава организация, при която критерият на ефективността има минимална стойност.

По-горе разгледахме сравнително прости примери, при които целевата насоченост на операцията е ясно изразена и изборът на критерий на ефективността не представлява особена трудност. На практика обаче често се срещат задачи, в които целта на операцията е неопределена или пък се преследват едновременно няколко цели.

Да разгледаме следния **пример.** Води се стрелба по група самолети. Желателно е да се свалят всичките. Обаче ако не бъдат свалени, това не е неуспех на стрелбата. Колкото повече самолети бъдат свалени, толкова по-добре. В дадения пример стрелбата има две задачи: да се свалят, ако е възможно, всичките самолети, а когато не се удаде, да се свалят колкото е възможно

повече. Естествено, и ефективността на стрелбата се оценява по два критерия:

1. $W_1 = P(A)$ — вероятност за сваляне (поразяване) на всички самолети от групата.

2. $W_2 = (MX_п)$ — среден брой на поразените самолети, където $X_п$ е случайният брой на поразените самолети.

При оценяване на ефективността на дадена операция не по един, а по няколко критерия необходимо е да се предпочита решението, което е приемливо едновременно по всички критерии.

Задачата за изследване на конкретна операция може да се постави различно, което води до различен избор на критериите на ефективността. Нека разгледаме например процеса за набиране на височина и скорост от самолета. В случая може да се постави задачата за достигане на определена височина и скорост за най-кратко време или при най-голяма икономия на гориво. Очевидно е, че решението зависи съществено от правилния избор на критерия на ефективността на операцията. Различният подход и различната целева насоченост на задачата водят до избор на различни критерии. Изборът на един или друг критерий предопределя до голяма степен целия ход (методиката) на решаването на задачата.

Правилният избор на критерия на ефективността позволява не само правилно да се формулира задачата, но и осигурява правилното определяне областта на допустимите решения. Поради това е необходимо ръководителят, който поставя задачата за изследване, да формулира правилно нейната цел, т. е. от постановката на задачата да зависи кой критерий на ефективността е необходим в дадения конкретен случай. Впрочем изборът на критерия е неотменимо право на този, който изследва операцията, тъй като се предполага, че той е компетентен.

2. ОЦЕНКА НА ЕФЕКТИВНОСТТА В ДИАПАЗОН ОТ УСЛОВИЯ

При построяване на модела на операцията винаги е необходимо да се задават основните условия при нейното изпълнение. Например при стрелба на зенитен комплекс по противников самолет условията може да бъдат:

— тип на целта;
— височина на стрелбата;
— курсов параметър;
— скорост на целта;

— противодействие от противниковия самолет.

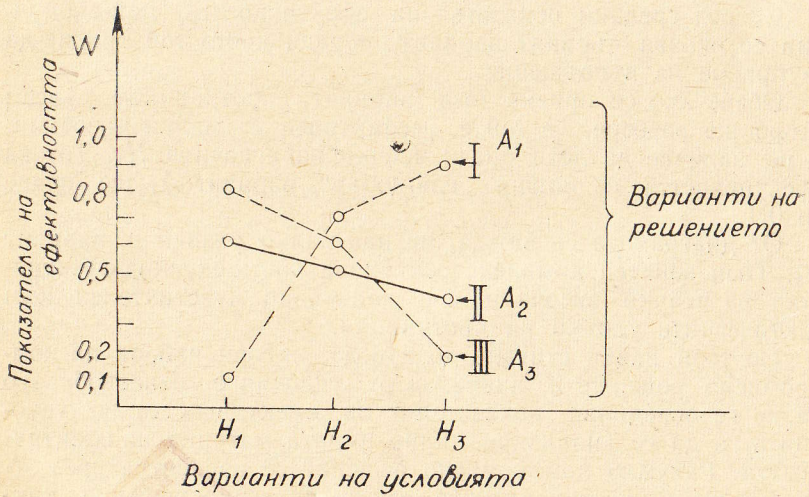
Стремежът е условията за изпълнение на операцията да са такива, че да са типични. Почти никога обаче операцията не протича само в едни и същи условия.

Възниква въпросът за принципите на избора на рационално решение, когато условията за изпълнение на операцията не са известни и може да варират.

Да приведем следния пример. Сравняват се три варианта на зенитен комплекс: A_1, A_2 и A_3. Да приемем, че противникът може да лети само на три височини: малки (H_1), средни (H_2) и големи (H_3). Допускаме, че сме изчислили вероятността за поразяване на целта W за всяка комбинация „вариант — условие“ и сме построили следната матрица на ефективността:

Варианти на решението	Варианти на условията		
	H_1	H_2	H_3
A_1	0,1	0,7	0,9
A_2	0,6	0,5	0,4
A_3	0,8	0,6	0,2

Диаграмата на ефективността е дадена на фиг. 1.



Фиг. 1

Приемаме, че вероятностите операцията да протече по условията H_1, H_2, H_3 ..., H_n не са известни предварително и затова те са едни и същи по стойност, т. е.

$$p_1=p_2=p_3=\ldots=p_n=\frac{1}{n}.$$

За нашия пример самолетът може да лети само на три височини и вероятностите за това са

$$p_1=p_2=p_3=\frac{1}{3}.$$

За всеки вариант на зенитен комплекс A_i получаваме само един среден показател на ефективността

$$W_i=p_1W_{i1}+p_2W_{i2}+\ldots+p_nW_{in}.$$

Като използуваме данните от матрицата на ефективността, изчисляваме средните показатели на ефективността за трите варианта зенитни комлекси:

$$W_1=0{,}1.\frac{1}{3}+0{,}7.\frac{1}{3}+0{,}9\frac{1}{3}\approx 0{,}567;$$

$$W_2=0{,}6.\frac{1}{3}+0{,}5.\frac{1}{3}+0{,}4.\frac{1}{3}\approx 0{,}500;$$

$$W_3=0{,}8.\frac{1}{3}+0{,}6.\frac{1}{3}+0{,}2.\frac{1}{3}\approx 0{,}533.$$

Според средния показател на ефективността, най-сполучлив се оказва първият вариант, поради което той трябва да се приеме на въоръжение.

Обаче ако се приеме този вариант, противникът съвсем скоро ще разбере, че той е неефективен на малки височини, и ще започне да лети преди всичко на височина H_1. Тогава ефективността на нашия „най-добър“ вариант A_1 ще падне до 0,1.

От диаграмата се вижда, че най-малко уязвим е вариант A_2. Този зенитен комплекс осигурява почти еднаква ефективност на всички височини и е най-малко чувствителен към тактическите уловки на противника.

По този начин стигаме до извода, че при избора на компромисно решение в диапазон от условия е целесъобразно да не се осреднява показателят на ефективността по условията, а да се анализира пълно цялата матрица на ефективността. Разумно компромисно решение се изработва чрез отчитане на силните и слабите страни на всяко решение, както и целенасоченото противодействие на противника.

3. ОГРАНИЧАВАЩИ УСЛОВИЯ И СМИСЪЛ НА ТЯХНОТО ВЪВЕЖДАНЕ

Задачите от изследване на операциите всъщност се свеждат до рационалното използуване на наличните ресурси. Във всяка от тях в явен или скрит вид има някакво ограничаващо условие (или редица такива условия), налагащо ограничаване на кръга от решения, от които може да се подбере оптималното. Формулировката на това условие обикновено дава необходимата определеност на задачата. Ако такова условие липсва, задачата по изследване на операциите губи смисъл.

Неправилно е например да се постави задачата: какви трябва да бъдат параметрите на осколочния снаряд, за да бъде максимална вероятността за поразяване на целта. Без ограничаващи условия тази задача няма решение. Напълно ясно е, че колкото теглото на снаряда е по-голямо, колкото по-многобройни и тежки са осколките, толкова по-ефективен е снарядът. Друго е положението, ако задачата се решава при дадено тегло на снаряда. Тогава тя веднага придобива смисъл.

Доказано е, че едновременното увеличаване на всички параметри, които влияят благоприятно върху ефективността, е невъзможно. При увеличаване на едни неизбежно се намаляват други. Ако се увеличи началната скорост на осколките чрез повишаване на коефициента на напълването, намалява се общото тегло на метала, от който те се образуват. Увеличаването на теглото на отделните осколки намалява техния брой. Увеличаването на ъгъла на разтвора на конуса на разлитане на осколките намалява плътността на потока на осколките, попадащи в целта, и т. н.

Наличието на ограничаващо условие определено тегло на снаряда веднага дава смисъл на поставената задача и изразява противоречивите съотношения на влизащите в нея фактори.

Задачата за сравнителната оценка на различните варианти на решението е типична за изследване на операциите. При построяването на разчетния модел за такава сравнителна оценка винаги е необходимо ограничаващо условие. т. е. сравняваните варианти да се поставят при еднакви условия.

В някои задачи от изследването на операциите ролята на ограничаващо условие може да играе зададеният критерий (показател) на ефективността.

Нека например е необходимо да се изчислят нужните средства за нанасяне на определени загуби на противника със среден размер y.

В тази задача зададената величина y изпълнява ролята на ограничаващо условие. Ако е необходимо да се сравняват няколко варианта на организацията, водеща към нанасяне на загуби с размер y, необходимо е да се въведе критерий за сравнение, например определен брой бойни средства, необходими за нанасяне на определени загуби. В такива задачи критерият на ефективността и ограничаващото условие като че ли си сменят местата.

Често се случва една и съща задача от изследване на операциите да се реши различно, с различно разпределение на ролите между ограничаващото условие и критерия на ефективността.

Например в качеството на ограничаващо условие може да се зададе броят на бойните средства, определени за действие, и да се търси такъв вариант за бойното им използуване, при който нанесените загуби на противника да са максимални. При тази постановка броят на бойните средства е ограничаващо условие, а средният размер на загубите, понесени от противника — критерий на ефективността. Задачата може да се постави и обратно: търси се такъв вариант за бойно използуване на дадени средства, при който средният размер на загубите, понесени от противника, да се достигне с минимален брой средства. При тази постановка ограничаващо условие е зададеният среден размер на загубите, а броят на бойните средства се превръща в критерий за сравнение или своеобразен критерий на ефективността, който трябва да приеме минималната си стойност. Една или друга постановка се избира в зависимост от специфичността на задачата и удобствата на разчетната схема. Като правило при смяна на ограничаващото условие и критерия на ефективността сравнителната ценност на вариантите на решението не се изменя.

4. ОЦЕНКА НА ЕФЕКТИВНОСТТА ПО НЯКОЛКО КРИТЕРИЯ

Много често при изследването на операциите се налага наред с основния да се отчитат и редица спомагателни критерии.

Например операцията е бомбардиране на площадна цел. Задачата на бомбардирането е да се нанесат колкото е възможно по-големи загуби на целта, т. е. да се порази по-голяма площ. Съгласно с изложения досега принцип за критерий на ефективността е необходимо да се избере средното значение (математическото очакване) на поразяваната площ, т. е.

$$W = M[S_п].$$

Обаче при анализа на операцията наред с този главен критерий е целесъобразно да се разгледат и други. Например съществен интерес представлява оценката на очакваните загуби на самолети от действието на ПВО. Този критерий — средното число на свалените бомбардировачи — не е основен в дадения случай, защото целта на операцията не е запазването на по-голяма част от собствените самолети, а нанасянето на колкото е възможно по-големи загуби на противника, но все пак той трябва да се вземе под внимание и броят на свалените самолети да е минимален. Ако се сравнят два варианта на решението на бойната задача с почти еднаква ефективност, като при единия вариант има малки, а при другия по-големи загуби, предпочитание, естествено, трябва да се даде на първия.

Така при повечето задачи от изследване на операциите във военното дело се налага наред с основния критерий да се вземат под внимание и редица спомагателни. Повечето от задачите с по-малка сложност винаги се решават не по един критерий, а въз основа на комплексното отчитане на цялата съвкупност от критерии. При вземане на решение се допуска компромис, при който предпочитание се дава на този вариант, който не е оптимален по нито един критерий, но е приемлив за дадена група от критерии. На практика задачата при вземане на решение почти никога не се свежда до проста математическа задача за определяне на максимума (минимума) на дадено число, а е несравнимо по-сложна. Изследването на операциите може да подготви количествените данни, въз основа на които може да се вземе разумно компромисно решение. Обаче целият процес на вземане на решение не може да се формализова напълно. На дадения етап се взема „командирско“ решение, основано не само на количествените данни, но и на опита, здравия смисъл, интуицията и редица допълнителни съображения, които не може да се вземат под внимание в разчетната схема на изследването. От тази гледна точка изследването на операциите може да се разглежда не като наука за избор на решения, а като наука за количественото им обосноваване. В този смисъл въпросът беше разяснен във въведението на част I от настоящата разработка. Изследването на операциите предоставя на командира ред числени данни, характеризиращи от различни страни възможните варианти за решение. При

избора на системата от критерии е необходимо те ясно да характеризират явлението откъм най-съществената му страна. За по-добро ориентиране в развитието на изчисленията броят на тези критерии не трябва да е голям.

В някои случаи задачата с няколко критерия е възможно да се приведе към задача с един (главен, основен) критерий, на който се търси максимумът (минимумът), а останалите (спомагателните) критерии се превръщат в ограничаващи условия. Например при анализа на бомбардировъчния налет може да се търси вариантът, при който нанесените загуби на обекта да са максимални, но при това собствените загуби и разходите на средства да са в известни граници. При тази постановка на задачата всички критерии освен главният по същество се превръщат в ограничаващи условия. Вариантите, които не се влагат в дадените граници, незабавно се отхвърлят като „неконкурентноспособни".

Възможен е и друг път за вземане на компромисно решение, който може да се нарече „метод на последователните отстъпки".

Първоначално критериите се подреждат по важност — пръв е основният критерий W, след който се поставят последователно спомагателните K_1, K_2, K_3 . . . Стремежът е да се приеме този вариант на решение, при който всеки от тях има максимална (минимална) стойност. Процедурата за намиране на компромисното решение се свежда към следното. Първоначално се търси решението, при което основният критерий W_0 приема своята максимална стойност. След това се определя произволно по-голяма или по-малка отстъпка ΔW, която сме съгласни да допуснем, за да се получи максимумът на следващия критерий. Приемаме положението, при което главният критерий на ефективността да достигне стойност, не по-голяма от $W_{max}-\Delta W$, и при това ограничаващо условие определяме максимума на критерия K_1. Отново определяме „отстъпката" ΔK_1 на критерия K_1 и изчисляваме задачата, при която следващият критерий K_2 получава своя максимум, и т. н.

Този способ на последователно построение на компромисното решение е удобен, защото при него винаги се вижда с цената на каква отстъпка от първия критерий се получава максимумът на другия.

В практиката често се наблюдава обединяването на няколко критерия в един. Като обобщен критерий се предлага дроб, в числителя на която се поставят величините, чието увеличение е желателно, а в знаменателя — величините, увеличението на които е нежелателно (например загубите на противника — в числителя, а собствените загуби и разходите на средства — в знаменателя). Главният „порок" на тези „съставни" критерии е, че недостатъците на единия може да се компенсират от другия критерий: например, недостатъчната вероятност за поразяване на целите за сметка на твърде ниската стойност на въоръжението. Поради това използуването на „съставните" критерии не се препоръчва.

5. ПОНЯТИЕ ЗА КРИТЕРИИТЕ НА ТАКТИЧЕСКАТА И ОПЕРАТИВНАТА ЕФЕКТИВНОСТ

При подготвката и в хода на бойните действия командирите и техните щабове се съобразяват с разположението, числеността и състоянието както на подчинените им подразделения и части, така и на противниковите. Въз основа на данните за бойния ред и състава на своите и противниковите войски се прави оценка на тактическата и оперативната ефективност.

Определянето на критериите за тактическата и оперативната ефективност на войските поради сложното отчитане на факторите, които я обуславят, представлява изключително труден проблем. За сега като критерии на тактическата и оперативната ефективност се използуват коефициентите за съотношението на силите и загубите.

Под съотношение на силите се разбира броят на оръдията, танковете или еднородните подразделения към броя на същите елементи на противника, разположени на един и същ участък от фронта. Ако L_1 и L_2 са броят на еднаквите елементи съответно от едната и от другата страна на фронта, коефициентът за съотношението на силите от дадения вид е

$$K_c=\frac{L_1}{L_2},$$

При анализ на факторите, определящи загубите в боя, и прилагането на някои тактически прийоми, които позволяват да се изпълни поставената задача при минимални загуби, се използува коефициентът на съотношението на загубите. Прилага се формулата

$$K_з=\frac{U_1}{U_2},$$

където: $K_з$ е коефициентът на съотношението на загубите;
U_1 — собствените загуби;
U_2 — загубите на противника.

Трябва да се подчертае, че критериите се изчисляват по дадения начин, когато се сравняват еднородни сили. В случая не се отчитат различията в бойните качества и възможности на дадения тип бойна техника. Всички обаче сме убедени, че има разлика между огневите възможности на пехотния батальон на противника и нашия мотострелкови батальон, между бойните качества на неговия и нашия танков батальон. При тези условия е целесъобразно да се установи коефициент и за „тежестта“ на дадената бойна единица. Очевидно е, че той ще има стойности от 0 до 10.

При някои условия се налага да се прави разчет за съотношението при разнородни сили. За сравнение на разнородни сили е необходимо те да се приведат към обща единица за измерване, т. е. предварително да се установи коефициентът за съизмеримост на различни подразделения.

Характерно за използуването на посочените критерии е, че чрез тях се прави опит с едно число да се даде оценка на такива сложни явления като боя и операцията. В определени условия, като например недостатъчно време за задълбочен анализ на обстановката и при недостатъчна информация, използуването на разгледаните прости критерии на тактическата и оперативната ефективност е удобно и полезно. Обаче за задълбочена и по-всестранна оценка на боя и операцията използуването на тези критерии не е много правилно, тъй като те не отразяват динамиката на боя като процес на стълкновение между две воюващи страни, развиващ се в определено време и пространство. Например тези критерии не отчитат подхождането на войските към рубежа на бойните действия; интензивността на понасяните загуби; възможностите за съсредоточаване на силите и огъня в основното направление; системата на управлението на войските; моралния дух и подготовката на бойните разчети и други фактори, влияещи съществено върху изпълнението на бойната задача. Тези недостатъци може да се избягнат чрез използуване на математическите модели на бойните действия, чиято реализация е възможна само чрез използуване на електронноизчислителната техника.

Глава втора

ОСНОВНИ МЕТОДИ ЗА ИЗСЛЕДВАНЕ НА БОЙНИТЕ ДЕЙСТВИЯ

За изучаването и правилното решаване на въпросите по разработването на теоретичните основи и практическите препоръки по строителството на въоръжените сили и тяхната подготовка са необходими непрекъснати и задълбочени изследвания на процесите на бойните действия на войските.

Чрез изследванията трябва да се решават преди всичко следните основни въпроси: поддържане на частите и подразделенията в постоянна бойна готовност; разработване на препоръки за подобряване на организационната структура на войските в съответствие с новопостъпващата бойна техника и въоръжение; по-нататъшното разработване на способите за водене на боя и операцията и теорията по усъвършенствуването на управлението на войските с използуване както на наличните средства, така и на автоматизираните системи. Решаването на тези задачи трябва да се основава на правилното определяне на характера на бъдещата война, реалното отчитане на възможностите на икономиката, постиженията на научно-техническия прогрес, въоръжението на собствените и противниковите войски.

Успешното изследване на сложните теоретически и практически задачи от бойните действия зависи до голяма степен от избраните пътища за изследване на процесите и от използуваните методи. Следователно от особено значение за достигане на определени крайни резултати при дадени изследвания са използуваните методи, тяхната роля и взаимодействие при решаване на отделните въпроси от единния процес. За сега са известни и широко се използуват следните основни методи за изследване на процесите на бойните действия: прогнозиране, общи методи за изследване, моделиране и експериментиране.

Възможностите и последователността на работата при изследване на отделни процеси на бойните действия на войските с помощта на тези методи ще разгледаме по-подробно.

1. ПРОГНОЗИРАНЕ НА БОЙНИТЕ ДЕЙСТВИЯ

Прогнозирането като процес за изучаване на бъдещите бойни действия, като съвкупност от начини и методи за определяне на перспективите в развитието на въоръжението и бойната техника, за тяхното използуване в боя и операцията придобива все по-голямо значение във военнонаучните изследвания. Една от причините за широкото приложение на прогнозирането е научно-техническата революция, която обхвана всички страни на човешката дейност и оказва въздействие върху икономиката, политиката, идеологията и военното дело. Тя доведе до рязко съкращаване на цикъла при заменяне на едно оръжие с друго, до бързо морално остаряване не само на отделни образци военна техника, но и на цели системи и видове въоръжение. Посочената тенденция към непрекъснато съкращаване на пълния цикъл на използуване на дадени комплекси и системи въоръжение се обяснява с това, че много от етапите, като научноизследователските и опитно-конструкторските работи, изпитанията, производството, изучаването и внедряването на техниката във войските, експлоатацията и снемането на въоръжение се съкращават значително.

Сега на всеки 10—12 години обемът от научни знания, броят на научните работници, научните открития и изобретения се удвояват. За да не се изостава, възниква необходимостта от определяне на най-перспективните направления в развитието на въоръжението и бойната техника и оптималните варианти за тяхното използуване в боя и операцията.

Военната наука като наука за определяне на способите и формите на въоръжената борба, с развитието и внедряването на нови образци бойна техника и въоръжение се изменя бързо, което налага широко да се използува военнонаучното предвиждане и прогнозиране.

Предмет на военното прогнозиране е предвижданото на бъдещите войни, перспективите за развитието на въоръжените сили и военната техника, възможностите на военната икономика и способите и формите на въоръжената борба. То има строго определени цели и направления за решаване на такива важни задачи като вероятността за възникване на война в

близкото бъдеще, какви ще бъдат военно-политическата ситуация, характерът, целите, способите за воденето ѝ и последствията от нея, какви ще бъдат въоръжените сили, техният състав и използуваната бойна техника.

Бойните действия на войските като предмет на военното прогнозиране се изследват, за да се получи обща представа за тях, конкретните направления за развитието им в зависимост от участвуващите сили и средства, времето и условията за провеждането им. Важно значение имат следните въпроси: общ състав на въоръжените сили; въоръжението и неговите качествени характеристики и бойни свойства; структурата на въоръжените сили; способите за действие на различните родове войски и видове въоръжени сили; възможните срокове за появяване на нови образци въоръжение; степента на снижаване равнището на бойната ефективност на старите образци въоръжение и др. Правилното предвиждане на тези въпроси при война и водене на бойните действия оказва съществено влияние върху крайните резултати от боя и операцията. Прогнозирането на бойните действия на войските е тясно свързано с планирането, тъй като резултатите от предвижданията служат за научна основа на плана.

Планирането на различните мероприятия, свързани с реализирането на прогнозите за нови образци бойна техника, започва при наличието на две условия: производствено-икономическа база и възможности за оценка на бойната ефективност на новосъздадената техника, която трябва да е значително по-висока от бойната ефективност на съществуващите образци.

Военно-икономическото прогнозиране на производствената база има за цел да изясни възможностите на икономиката на дадена страна или група страни да осигури въоръжените сили с всичко необходимо както в мирно, така и във военно време. То изисква да се разработят предварителни планове за най-рационалния състав на въоръжените сили, за да бъдат способни те да изпълняват поставените им задачи при минимален разход на различни икономически ресурси, а също и да се определят всички видове загуби, свързани с производството на нови и с усъвършенствуването на старите образци бойна техника.

Военнотехническото прогнозиране дава възможност да се предвиди появяването на принципно нови образци бойна техника. Това се постига чрез усъвършенствуване на конструкциите, тактико-техническите и икономическите характеристики на въоръжението, като се използуват резултатите от изслед-

ванията на фундаменталните науки и перспективите на научно-техническия прогрес и се отчитат измененията в техническата и технологическата база на военнопромишления потенциал и др.

Прогнозирането на нови образци бойна техника е свързано непосредствено с военно-икономическото и военнотехническото планиране. Освен това то зависи от правилната оценка на производствено-икономическите възможности на страната и вероятните противници, а също и от сравнителната оценка на бойната ефективност на съществуващите и прогнозираните системи въоръжение. Следователно, ако прогнозирането изяснява картината на новите видове оръжия и бойна техника, планирането представлява система от мероприятия, които осигуряват в кратки срокове изпълнението на задачите при ефективното управление на силите и средствата и икономичното изразходване на материалните ресурси.

Правилното прогнозиране на създаваните и внедряваните в сравнително кратки срокове нови образци въоръжение и бойна техника със съвършено нови качества и висока ефективност осигурява преимущество на страната и разрешаване на възникващите противоречия в нейна полза. Поради това държавите отделят много сили и средства за изграждането на специализирани научноизследователски институти и конструкторски бюра за създаване на нови образци въоръжение и усъвършенствуване на старите.

Важна цел на прогнозирането е детайлното изследване на условията за водене на боя и операцията, на техния характер за различните театри на военните действия, установяването на нормативи при използуването на различни бойни средства и предвиждането на възможните крайни резултати. То изследва тактическите способи за използуване на новите и старите образци бойна техника, в това число и на перспективната, и съставя сравнителна таблица за анализиране на бойната ефективност на средствата при различните способи за действие. Следователно прогнозирането на бойните действия е насочено главно да изследва ефективността на различните способи за действие с неговите средства в съчетание със старите и да определи най-рационалния състав на силите и средствата, необходими за изпълнение на поставените задачи. То дава възможност за предсказване на направленията за развитие на тактиката и оперативното изкуство, оказва влияние върху развитието и използуването на различните способи за действия на войските.

Правилното обучение на войските в мирно време и тяхната подготовка за успешни действия в бъдещата война зависят до голяма степен от научните предвиждания на характера и размаха на боя и операцията, средствата и техните поразяващи възможности, начините за действие на войските.

Правилното предвиждане при решаването на тези въпроси осигурява целенасочено планиране и водене на бойната подготовка на войските.

За да се приеме правилно и обосновано решение от командирите за водене на боя, необходимо е да се предвидят възможните сили и средства на противника и начините им за противодействие. Задачите по определяне на загубите на противника при използуване на различните средства и възможностите за маньовър, за да се възстановят понесените загуби, предвиждането на собствените загуби от ударите на противника и оценката на обстановката с отчитане на очакваните загуби може да се решат успешно с помощта на прогнозирането. Определянето на съотношението на силите при наличните сили и средства, като се отчитат очакваните загуби, дава реална представа за възможностите на групировките.

Определянето на средния темп за настъпление и задачите на частите и съединенията трябва да се базира на предвижданията за силите и средствата на противника, начините им за противодействие, рубежите за разполагане, характера на местността и техническите възможности на средствата за движение (танкове, бронетранспортьори, влекачи, автомобили).

Своевременните и точни оперативно-тактически разчети позволяват при конкретна обстановка да се намери най-целесъобразното решение за успех в боя. Разчетите се съставят, използуват и прилагат в многогодишната дейност на командирите и щабовете както при подготовката, така и при воденето на бойните действия. Те трябва да се основават на правилни предвиждания (прогнози). Не може да се направи нито един от разчетите за необходимото ядрено оръжие и очакваните резултати от неговото използуване, за необходимите оръдия, минохвъргачки и боеприпаси, за силите и средствата за достигане на определени резултати, за преодоляването на водни прегради, за използуването на въздушни и морски десанти, за защитата на войските от ядреното оръжие и други средства за масово поразяване без предварителни предвиждания и прогнози.

Посочените по-горе разчети в съвременни условия трябва да отговарят на редица изисквания, по-важни от които са

своевременност, точност и достоверност. Своевременността на разчетите произтича от скоротечността и динамичността на бойните действия. И най-добрите разчети, ако не са съставени навреме, няма да имат никаква практическа стойност. Това се отразява пряко и отрицателно върху управлението на войските и изхода на бойните действия. За съкращаване на времето за разчетите се използуват различни механизиращи и автоматизиращи средства.

Точността на разчетите трябва да позволява да се вземат целесъобразни решения при конкретната обстановка. Тя зависи от достоверността на данните в дадения момент и от средствата, с които се извършват изчисленията. За добиване на достоверни и съответствуващи на обстановката входни данни е необходимо правилно да се предвидят силите и средствата на противника и да има точни сведения за собствените войски.

Достоверността на оперативно-тактическите разчети е едно от основните им достойнства и същевременно главно изискване към тях. Това произтича от характера на съвременните бойни действия, от необходимостта правилно да се разпределят силите и средствата и да се създава най-целесъобразната групировка за успех в боя и операцията. Достоверността се постига чрез използуване на проверени и съответствуващи на обстановката данни, което се осигурява чрез прогнозиране на развитието на бойните действия. За да се получат данни, които съответствуват на обстановката, необходимо е правилно да се организира и непрекъснато да се води разузнаването за противника и местността. То се организира при всякаква обстановка и се води непрекъснато, активно, на възможната най-голяма дълбочина, с всички разузнавателни средства на съответните командири и щабове.

Важно условие за научно предвиждане на хода и изхода на бойните действия е високата обща и специална подготовка на командирите и офицерите от щабовете. Научни прогнози за развитието на боя не може да се правят без солидни знания по теорията и практиката на водене на бойните действия, същността на революционните преобразования във военното дело, основите на физиката, математиката, теорията на изследването на операциите, моделирането и други. Обемът и характерът на знанията трябва да съответствуват на заеманата длъжност от офицерите, като офицерите от по-нисшите звена трябва добре да познават тактико-техническите данни на собственото и противниковото въоръжение, начините за действие, особеностите на района за действие и пр., а от по-висшите звена — икономическото състояние и особеностите на театъра на военните действия, социално-политическите, географските и други условия за водене на бойните действия и използуването на техническите средства за оптимизиране на процесите.

За правилното и научно предвиждане на бойните действия от командирите и щабовете е необходимо задълбочен обективен анализ на конкретната обстановка. Правилната оценка на силните и слабите страни в организацията, въоръжението и действията на собствените войски и противника осигурява вярно предвиждане на изхода от бойните действия. Конкретният анализ на обстановката позволява да се направят верни изводи за хода и изхода на водените бойни действия.

Важно условие за научните предвиждания във военното дело е правилното отчитане на опита от миналите войни, провежданите едностранни и двустранни учения с войски и ежедневния учебен процес в частите и подразделенията. Това позволява да се разкрият тенденциите в развитието на военното дело, да се предвиждат ходът и изходът на бъдещите войни.

За правилното провеждане на бойните действия на войските е необходимо широко да се използува прогностичното моделиране. Въз основа на прогнозите за внедряване на нови образци въоръжение и бойна техника, изменения в структурата и организацията на войските се моделират бойните действия на ЕИМ и се намират най-правилните и ефективни варианти за изпълнение на задачите. Следователно с прогностичното моделиране може успешно да се прогнозират ходът и изходът на бъдещите бойни действия, като се използуват най-новите математически методи и съвременни електронноизчислителни машини. Това ще позволи на различните ръководни звена оптимално да планират и организират бойните действия, ефективно да управляват силите и средствата и да използуват икономично материалните ресурси.

Новият характер на бъдещите бойни действия — голямата скоротечност и стремителност, увеличеният пространствен размах и др. — често ще създават такива условия, при които отделни командири и щабове трябва да вземат решение самостоятелно, без да са получили изчерпателни заповеди и указания от вишестоящите. Това налага командирите и офицерите от щабовете на различните звена да владеят методите за прогнозиране на бойните действия, което ще им позволи правилно да предвиждат с какви сили и средства и по какъв на-

чин ще действува противникът, за да могат умело да противопоставят собствените сили и средства и да спечелят боя с минимални загуби.

2. ОБЩИ И СПЕЦИАЛНИ МЕТОДИ ЗА ИЗСЛЕДВАНЕ

Изследванията в областта на военното дело включват изучаване и решаване на различни по характер и направление задачи — от тясно специализирани до общотеоретически. За тази цел се използуват както общи методи за изучаване, така и специални методи от военнотехническите изследвания, изработени в рамките на военните науки или заимствувани от други науки.

Военнонаучните изследвания, осъществени с помощта на тясно специализираните и общотеоретичните методи, позволяват до голяма степен да се усъвършенствуват въоръжението, способите за неговото използуване и ефективността при управлението на силите и средствата в боя и операцията. Способите и общите методи за изучаване на даден проблем образуват оперативна система, в която съществуват тесни връзки и зависимости. Те позволяват пълно и задълбочено да се разкрият структурата и функционирането на изследваната система.

В основата на системата от методи за изследване на процесите на бойните действия на войските стои всеобщият метод на материалистическата диалектика. Диалектическият материализъм дава възможност на военната наука правилно да определя съотношението и ролята на отделните фактори, които влияят върху бойните действия, и да разкрива причините, връзките и зависимостите на процесите от изследваните явления. Той осигурява диалектическа оценка на действията и проявленията на различните фактори при конкретната обстановка, играе важна роля при решаване на общите и специалните проблеми, възникващи в областта на военното дело. Този всеобщ метод за изследване и практическо действие съответствува най-пълно на изискванията на обективните закономерности на действителността от процесите на бойните действия.

Наред с диалектико-материалистическия метод се използуват и отделни общи и специални методи за изучаване на процесите и явленията.

Общите методи за изследване на процесите във военната област намират широко приложение. Характерна тяхна

особеност е това, че те не са универсални, както диалектико материалистическият, и не са свързани със специфичните особености на изследваните обекти, процеси и явления. Общите методи за изследване се създават с участието на много науки. При тях са обособени основните способи за научни познания. Общи методи за изследване са наблюдението, опитът, моделирането, анализът, синтезът и др.

Специалните методи за изследване на бойните действия се прилагат при конкретните условия за изучаване на отделните елементи от въоръжената борба. Като специални методи за добиване на определени познания, извършване на изследвания и по-нататъшно усъвършенствуване на действията се използуват ученията с войски, военните игри на карта, командно-щабните учения, полигонните изпитания и др. Те осигуряват решаването на научни и практически задачи във военната наука с отчитане на специфичните особености на военното дело.

Важно значение за добиване на познания и провеждане на задълбочени изследвания имат историческите и логическите методи. Същността на историческия подход при изследванията е определянето на настоящите и бъдещите действия чрез изхождане от миналото, като последователно и подробно се възпроизвеждат процесите на възникване и развитие на явленията с отчитане на конкретните условия на обстановката.

Логическият подход при изследванията се състои в анализиране на явленията от историческото развитие. Докато историческият метод възпроизвежда историята на явленията и процесите, логическият дава теоретичната основа и същност. Теоретичното изследване анализира и обобщава фактите, разкрива тяхната същност, изучава законите и на тази основа обяснява явленията и предсказва по-нататъшното им развитие.

Наред с разгледаните методи и пътища на военните изследвания се използуват и други, сред които особено място заема системният подход. Той осъществява диалектическото изискване за разглеждане на явленията в тясна връзка и зависимост, в тяхната вътрешна и външна обусловеност. При изследване на процесите на бойните действия е необходимо да се спазва следната последователност: натрупване на фактически материал от опитите; теоретично обосноваване и изясняване на връзките и зависимостите между отделните явления; обобщаване и формулиране на задълбочени изводи; практическа проверка на изводите и резултатите от изследванията. Тази

последователност се реализира най-добре на различните типове модели, които се използуват за усъвършенствуване на военната теория и практика.

Развитието на науката и техниката позволява в мирновременни условия да се пристъпи към частично моделиране на процесите на боя и операцията. По такъв начин общите и специалните методи за изследване на бойните действия на войските представляват разновидности на моделирането или включват значителен брой негови елементи. Чрез моделиране на процесите на бойните действия на войските се получават количествени величини за оценка на резултатите от използуването на силите и средствата.

3. МОДЕЛИРАНЕ НА БОЙНИТЕ ДЕЙСТВИЯ НА ВОЙСКИТЕ

Съвременният етап на развитието на военното дело се характеризира с бързи и коренни изменения на приетите начини за действие. Това повишава още повече значението на моделирането при изследването на различните процеси на бойните действия. Освен това краен критерий на истината при дадени изследвания е практиката, която във военното дело при мирновременни условия е ограничена значително. Ето защо, за да се получи действителна представа за мащабите, динамиката и последствията от съвременната война, необходимо е изследванията да се извършват на модели с помощта на ЕИМ.

Проверката на разработените от мирно време оперативно-тактически възгледи и тяхната пригодност за съвременните условия за водене на бойните действия и използуването на разнообразната бойна техника и въоръжение се осъществяват с помощта на моделирането. Следователно моделирането е един от най-важните и съществени методи за изследване на бойните действия. Той разкрива най-добре своите възможности, когато се използува във взаимодействие с останалите методи. Посредством средствата и методите на моделирането се постигат значителни успехи и се получава голяма ефективност на военно-изследователските и проекто-конструкторските работи. Особено важна роля играе то при създаването и изпитването на нови образци въоръжение и бойна техника, при разработването на тенденциите за развитие на военнотехническите науки, способите и методите за използуване на силите и средствата в боя и операцията и др.

В световната практика са известни много случаи, когато грешките при проектирането и недостатъчното изучаване на реалните обекти и процеси са довеждали до трагични последствия, като потъване на току-що спуснати във водата кораби, разрушаване на излитащи самолети и на артилерийски системи при произвеждане на първия изстрел, повреждане на мостове, постройки и др. Възможност за предотвратяване на тези случаи дават моделите, на които се изучават процесите, протичащи в реалните обекти.

Моделирането на процесите по събиране и обработване на информацията, вземане на решение, поставяне на задачите, организиране на действията на войските и водене на самите бойни действия дава възможност за изучаване на взаимните връзки и зависимости на процесите, за повишаване на оперативността и качеството на управлението и използуването на силите и средствата в боя и операцията, за по-голям боен ефект.

При планиране на бойните действия на войските и обосноваване на решенията на командирите неизбежно се налага необходимостта от количествен анализ на процесите през време на развитието на боя между две групировки и различни бойни средства с отчитане на огневото въздействие. Следователно за планиране и ръководене на боя (операцията) е необходимо командирите и щабовете да разполагат с модел на предстоящите бойни действия. Освен това при разработване на различни образци нова бойна техника и провеждане на занятия с войски предварително се построява модел за оценка на положителните и отрицателните страни, ефективността при използуването на бойната техника, силите и средствата на двете групировки в боя (операцията).

Следователно при изследване на бойните действия на войските е необходимо предварително да се построяват опростени схеми или модели на изучените процеси, тъй като между отделните елементи, участвуващи в боя, съществуват сложни връзки и зависимости, влияят много случайни фактори, чието отчитане е трудно, а понякога и невъзможно, поради което се вземат само най-важните и съществените от тях.

М о д е л ъ т е обект или процес, отразяващ основните особености и закономерности в развитието и поведението на изучавания материален обект или процес, т. е. той е опростено копие на оригинала и дава възможност за изясняване на влиянието на някои страни от протичащите процеси върху други, връзката и зависимостта между отделните елементи и влиянието им върху системата като цяло.

Моделите играят важна роля при изследване на процесите на боя и операцията, което налага да се разгледат различните типове модели, техните важни логически свойства, положителни и отрицателни страни, някои съществени особености и зависимости при използуването им във военното дело.

В зависимост от начините за изобразяване на различните обекти, процеси и явления на бойните действия на войските моделите се разделят на словесни, графични, физически и математически.

Словесни са моделите, при които цялата информация за описанието на даден обект, процес или явление като структура, функции, качества, различни отношения и връзки между отделните системи и елементи в пространството и времето се предава чрез словесно описание (речта). Човешката реч е универсална система за кодиране на информацията и е способна да предаде и най-тънките особености при описанието на даден предмет, процес или явление. Наред с тези положителни страни словесните модели имат и съществени недостатъци, които се свеждат основно до това, че словесните модели оживяват, като се превръщат в система с определена структура и функции чрез главния мозък на човека. От друга страна, описаният процес, явление или обект е твърде субективен, тъй като всеки човек по едно и също описание си изработва свой модел. Всички словесни модели имат качествен характер на изучаваните процеси и явления.

Във военното дело словесни модели са устните бойни заповеди, различните устни разпореждания и указания по организиране на взаимодействието и водене на боя и операцията.

Графични модели се получават при възпроизвеждане на пространствените черти на предмета (процеса) върху плоскост. В сравнение със словесните те съхраняват по-добре истинските структурни отношения между елементите на системата или обекта. Рисунките и чертежите съдържат по-голям обем информация за обекта (процеса), отколкото описателните (словесните) модели, но те са статични, фиксират определено положение или момент и оживяват в съзнанието на човека.

Такива модели са картите с оперативно-тактическата обстановка, отразяващи различните моменти от боя (операцията): на изходното положение, въвеждането на резервите и втория ешелон; отразяването на контраатаките и контраударите, пробива на укрепен район и форсирането на водна преграда, закрепването на достигнат рубеж и други.

Графичните модели може до известна степен да оживеят и да се получи действуващ модел на дадена система или процес с помощта на киното като последователност от картини, в които се отразяват размерите, цветът, функциите, връзките и зависимостите между отделните елементи. Но това е възможно само при предварително изпълнение на тези функции.

Физическите модели изобразяват пространствено структурата на обекта, като при простите физически модели не се възпроизвеждат физическите процеси. При по-сложните, така наречени структурни действуващи модели се възпроизвеждат част от физическите процеси, протичащи в реалния обект, само че в умалени или увеличени в пространството и времето мащаби и с допускане на редица условности без определящо значение. Обикновено тези модели се наричат механични. Следователно физическите модели възпроизвеждат обектите, процесите и явленията чрез съхраняване на тяхната физическа природа и същност. При изграждане на физическите модели е необходимо да се запазят известни съотношения между реалния обект и модела, произтичащи от закономерностите и физическата природа на явлението, с помощта на които се осигурява възможност за получаване на сведения за оценка на свойствата на реалния обект или процес.

В областта на военното дело може да се посочат много такива модели. Това са различните макети на образци въоръжение и бойна техника, изграждани за нуждите на учебно-материалната база в подразделенията и частите. Част от тях представляват прости физически модели, при които не се възпроизвеждат физическите процеси, а други са сложни действуващи механични модели, отразяващи основните физически процеси. Те дават възможност за онагледяване на учебния процес и изучаване на протичащите процеси, връзката и зависимостта между отделните елементи. Към физическите модели се отнасят и командно-щабните учения, военните игри на карта и ученията с войски.

Създаването на физически модели на бойните действия на войските по принцип е възможно и те се използуват широко за подготовка на личния състав за действие в сложните условия на съвременния бой и операция.

Математически са моделите, при които чрез условни знаци, цифри, формули от букви и специални знаци се отразяват количествените отношения в дадена система или обект. Формулите отразяват действията и качествата на даден процес или явление. Сложността и многообразието на проце-

сите на бойните действия не позволяват да се построи абсолютно точен и пълен модел. Математическият модел е в състояние да обхване само основните, най-характерните закономерности, връзки и зависимости, като не взема под внимание несъществените и второстепенните фактори.

Следователно под математически модел на даден процес на бойните действия на войските се разбира съвкупност от съотношения, изразени с формули, уравнения, неравенства, логически условия, оператори и др., които определят характеристиките и състоянието на елементите в даден момент, а чрез тях и крайния резултат в зависимост от основните входни параметри и фактори, оказващи съществено влияние върху действията на войските.

Чрез съвкупност от алгебрични диференциални, функционални и други уравнения може да се описват сравнително по-прости процеси, действия и явления на боя и операцията.

Както се вижда от разгледаните типове модели, всеки от тях има както положителни, така и отрицателни страни. Съчетаните модели от словесни описания, рисунки, графици, формули и цифри може да отразяват достатъчно пълно дори и твърде сложни процеси и явления и позволяват да се създадат действуващи модели.

Освен разгледаните типове модели напоследък все по-широко приложение във военното дело намират кибернетичните модели. Те представляват техническо устройство, което притежава свойствата на живите организми, като например медицинските апарати тип „изкуствено сърце — бял дроб“. При кибернетичното моделиране не винаги се възпроизвеждат вътрешните структурни явления, а само функционалната схема на управление. При обучението на личния състав за управление на войските и особено на огневите средства са създадени технически устройства на базата на електронноизчислителни машини, различни механични средства и екрани за изобразяване на обстановката, с които в реални мащаби на времето се проиграват бойните действия в съответствие с въвежданите в тях управляващи въздействия (решения). Използването на такива модели е особено целесъобразно във военните учебни заведения, където не може често да се организират и провеждат полеви учения.

Сходството на моделите с оригиналните и реалните процеси на боя винаги е непълно, тъй като те само приблизително отразяват някои техни свойства, но позволяват да се изследват редица процеси и явления, тъй като изследванията на реал-

ния обект често са сложни, икономически неоправдани, водят до унищожаването и повреждането му или дори са невъзможни.

Степента на приближаване на моделите към реалните обекти може да е най-различна. Обикновено е целесъобразно да се построяват такива модели, при които се изразходват приемливо количеството сили и средства, но се получават резултати с удовлетворителна точност. Оценката за точността на резултатите при изучаването на даден обект, явление или процес винаги е била важен момент на моделирането.

Моделирането е процес за изучаване на поведението на реалните обекти и явления, на техните физически и математически модели.

Процесите по организиране и водене на бойните действия на войските се изучават главно на физически и математически модели.

Към физическите се отнасят командно-щабните учения, военните игри на карта, провеждани от щабовете, и войсковите учения. Поради големия брой условности и ограничения командно-щабните учения и военните игри на карта като модел на бойните действия се отличават значително от реалните условия за действие на щабовете при бойна обстановка. Войсковите учения съдържат най-малко условности и ограничения, особено двустранните, в резултат на което позволяват да се получат повече данни за оценка на един или друг вариант на бойните действия. Но и в този случай противодействията на противника не може да се отчетат напълно и точно, поради което моделът също се отличава от реалния бой.

Както се вижда, въвеждането на физически модели на бойните действия по принцип е възможно и те често се използуват за усъвършенствуване на бойната подготовка и полевата натренираност на войските и щабовете за действия в съвременни условия.

Наред с положителните страни обаче те притежават и редица съществени недостатъци. За да се получат устойчиви резултати, необходимо е боят да се проведе на модела многократно при едни и същи условия, което практически трудно се осъществява. От изчисления и практически занятия е установено, че устойчиви средни резултати се получават при проиграване на ученията средно 12—16 пъти. Оттук става ясно, че нито едно учение с войски по редица причини — технически, икономически, организационни и др. — не може да се проведе толкова пъти, за да се открият всички възможни варианти на

взаимодействие между отделните подразделения и части на сражаващите се страни при еднаква численост и групировка.

Ученията с войски се провеждат еднократно, при което не може да се отчетат случайностите в появяването на редица събития. Върху крайния резултат от бойните действия влияят определени обективни закономерности, които във всеки отделен бой или сражение се проявяват по случаен начин. Само при многократно повторение на събитията при еднакви условия средният им резултат ще е устойчив и няма да зависи от случайността, което практически може успешно да се осъществи на математически модели с електронноизчислителни машини.

С математическото моделиране може да се решават успешно следните задачи: обосноваване на характеристиките на новосъздадените образци бойна техника; избиране на рационални методи и начини за бойно използуване на различни видове въоръжение; приемане на обосновани решения по организацията и структурата на частите и подразделенията, най-целесъобразните способи за водене на бойните действия и оптималното насищане на войските с разнообразна бойна техника за успешно изпълнение на всички задачи в съвременния бой и операция. Понякога определена група въпроси може да се решават чрез разработване на един модел, а при особено сложни задачи за дадена група въпроси се създава специален модел, като цялостното, комплексното решаване на задачата се извършва на няколко модела, обикновено на ЕИМ.

Математическите модели се решават на ЕИМ в следния ред:

— избиране на ограниченията и определяне на точността на модела;

— съставяне на алгоритъма и математическо описание на процеса на бойните действия;

— определяне на системата от критерии за оценка на текущите и крайните резултати при моделиране на процеса;

— съставяне на машинния алгоритъм — програма, по която да се извършат сложните изчисления от ЕИМ на моделирания процес;

— решаване на задачата по моделиране на изследваните процеси на машината;

— анализ, оценка и използуване на получените резултати от моделиране на процеса на ЕИМ и сравняването им с данните, добити по опитен път.

Най-сложен и труден етап при разработването на математическите модели е съставянето на алгоритъма и математическото описание на процесите на бойните действия.

Основа на математическите модели са логическите и математическите описания на връзката и зависимостта между отделните елементи и процесите на боя. Следователно, като се изрази тази връзка на процесите във времето и пространството чрез формули, уравнения, неравенства, логически условия и др., получава се така нареченият математически модел на процеса.

По такъв начин под математическо моделиране се разбира изучаването на протичащите процеси във времето и пространството с помощта на математически изрази и логически условия. Математическите изрази дават зависимостта между редица величини и параметри, определящи състоянието на елементите и тяхното взаимодействие, стимулирано от външните условия и редица други величини и фактори, оказващи съществено влияние в развитието на боя (операцията), които са неизвестни и за тяхното определяне се създават модели и се извършва моделиране. Например в модела за боя на противотанков резерв с танковете на противника такива неизвестни величини и условия са състоянието на отделните оръдия (изправни, повредени, унищожени), количеството боеприпаси към даден момент за всяко от тях, местоположението на оръдията, условията за водене на стрелбата, броят на разкритите танкове, броят на повредените и унищожените от тях и др.

Върху резултатите от бойните действия на войските влияят редица фактори, по-важни от които са: наличната численост на страните и темпът за въвеждане на резервите, количеството и качеството на въоръжението, подготовката на личния състав, неговите морално-боеви качества, подготовката на командния състав, състоянието на средствата за управление, бойното и материално-техническото осигуряване на войските, състоянието на тила, метеорологичните и топографските условия и др.

Някои от тези фактори все още не може да се изразяват количествено, а влиянието им върху изхода на боя се оценява само по тяхното качество. Това се отнася преди всичко за моралния фактор.

Морално-боевите качества на войските зависят главно от характера и целите на войната, социалния състав на армията, равнището на възпитателната работа и дисциплината, поведението на командния състав, материалното и техническото осигуряване на войските, продължителността на участието им в боя и др. Да се открие влиянието на всички фактори върху

боеспособността на войските съвсем не е лека задача, тъй като е необходимо да се определят количествените им характеристики и да се отчитат при математическото моделиране.

На сегашния етап на развитието на науката и техниката при математическото моделиране качествените фактори на воюващите страни се отчитат приблизително чрез специални коефициенти.

Най-пълни и достоверни данни за количествената оценка на качествените фактори дават статистическите материали, получени на войскови учения, опитни стрелби и др., които успешно се използуват за обективна оценка на бойната подготовка на войските и математическо моделиране на процесите на боя и операцията.

Фактори като качествата на въоръжението, независимо от названието им, се отнасят към количествените фактори, понеже се проявяват в количествени характеристики. Например качествените характеристики на дадена артилерийска система количествено може да се изразят като далекобойност, точност на стрелбата, скорострелност, мощност на снаряда и неговите поразяващи свойства, скорост на преместване, защитеност, надеждност в действията и др. Те се отчитат лесно при математическото моделиране, понеже се изразяват числено.

Построяването на математически модели, които позволяват да се отчитат всички фактори, условия и явления, оказващи влияние върху бойните действия на войските, е трудна и сложна задача. Трудностите произтичат главно от особеностите в протичането на процесите на бойните действия на войските, които се свеждат до следното:

1. Много и различни начини за действие на отделните елементи, участвуващи в боя, в зависимост от конкретната обстановка. Например при водене на стрелба с оръдие, отделено за стрелба с право мерене, в зависимост от получения резултат и действията на противника може да се постъпи по един от следните варианти: оръдието да продължи стрелбата по целта, ако не е поразена, но колко изстрела ще произведе, не е известно; да пренесе огъня по друга цел, но точно по коя и какво представлява, също не е известно; да смени огневата позиция и да се развърне на запасна; временно да отиде в укритие и да наблюдава действията на противника и др. Математически и логически да се опише цялата тази последователност в действията на оръдията е трудно.

2. Много фактори, оказващи влияние

върху бойните действия, сложни връзки и зависимости между отделните елементи и законите, описващи тези процеси. За да се построи математически модел, необходимо е взаимодействието на отделните елементи и влиянието на различните фактори да се изразят математически, а това предполага да има съвкупност от закони, предварително изучени и доказани. Например при моделиране на боя на танково подразделение е необходимо да има математически формулирани закони за разкриване на целите, насочване, откриване на огън, изпълнение на огневата задача, движение, взаимодействие с други елементи от бойния ред, противодействие на противника, влияние на условията на местността, времето и др.

3. Липса на пълна информация за действията на противника. За да се приближи моделът до реалния процес на боя, необходимо е правилно да се оценят силите и средствата на противника, начините и последователността на противодействие и да се намери математическият апарат за тяхното описване. При отчитане на противодействието на противника може само да се предполага по какви варианти ще действува с наличните сили и средства. Затова математическите модели на бойните действия на войските се съставят и решават в условия на неопределеност и при наличие на много случайни фактори по отношение на действията на противника, което налага многократното им проиграване при различни варианти на действия.

4. Сложност във формализоването и математическото описание на процесите по управлението на войските в боя и операцията. Да се опишат с математически методи процесите по управлението на войските за сега е сложна и трудна задача. Трудностите не са непреодолими и на сегашния етап се отразяват главно върху точността и пълнотата на математическите модели. Но с по-нататъшното развитие на науката и техниката те ще се преодолеят и ще се създадат реални предпоставки за решаване на модели, в които ще се отчитат все по-голям брой количествени фактори и явления, приемани по-рано като качествени.

Изследванията на бойните действия на общовойсковите части и подразделения с използуване на математическото моделиране за сега се затруднява поради голямото разнообразие на различните родове войски и въоръжение, сложния и разнообразен характер на действията и необходимостта от отчитане на особеностите на местността и метеорологичните условия, при които се водят бойните действия. Сега сравнително пълно може да

се разработват и решават математически модели на еднородни по състав части и подразделения, като артилерия, танкове, самолети, кораби, ракети и др.

Математическото моделиране на бойните действия на войските се използува за проверка на тактическия план за действие на дадена част или подразделение, разработен от щаба на ръководството на учението, за определяне на оптималните варианти за водене на бойните действия, за обосноваване на изискванията към новото въоръжение при неговото разработване, при определяне на бойните възможности на войските и въоръжението и др.

Независимо от трудностите при построяване на математическите модели и моделирането на процесите на боя и операцията, както се вижда, те спомагат за решаване на редица въпроси по поддържане на постоянна бойна готовност на войските, за по-нататъшно разработване на способите за водене на боя, операцията и войната като цяло, за оценка на обективните закономерности и структурата на военните явления, за точно предвиждане хода и изхода на даден вид бойна дейност, за експериментална проверка на теоретичните изводи и тяхното практическо значение.

4. ЕКСПЕРИМЕНТИРАНЕ

Особеностите в изследванията на всяка наука се определят преди всичко от обекта за изследване. При военната наука той е такова специфично явление, при което до голяма степен са ограничени експериментите. Обектът има многостранни връзки и представлява особено сложен проблем.

Военната наука, както и всяка друга наука, се опира на практиката, на опита и е тяхно научно обобщение. Но практиката при нея има особено специфичен характер. Пълна проверка на истинските положения и изводи, дадени от военната наука, може да се осъществят само през време на война. Но войните, особено големите, не са така чести явления и са с относително малка продължителност, т. е. обществото не се намира непрекъснато в състояние на война. Обаче военното дело не прекъсва своето развитие през мирния период, който е по-продължителен от войната. Военнонаучните изследвания се провеждат, без да се наблюдават и изучават на практика такива явления на войната като боя и операцията. Това обаче не означава, че редица страни и въпроси на военната теория не може да се проверят още в мирно време. Експериментирането намира

приложение обикновено за проверка на бойните свойства на различните видове оръжия и бойна техника, както и на някои оперативно-тактически въпроси по време на маневри, специални войскови и командно-щабни учения и военни игри.

Следователно експерименталните методи при изследване на процесите на бойните действия намират приложение в мирно време и трябва широко да се използуват, тъй като за успешното развитие на военната теория са необходими научни експерименти. Към експерименталните методи за изследване на бойните действия се отнасят специалните или изследователските, войсковите и командно-щабните учения, командно-щабните и командните военни игри, маневрите, полигонните изпитания, лабораторните и други видове военни експерименти.

При изследване на процесите на бойните действия на войските особено значение имат ученията и военните игри, които са специфични методи на военната наука. На тях се проверяват съществуващите и се изработват нови, по-правилни възгледи за характера и принципите за организиране и водене на съвременния бой, за усъвършенствуване на организацията на войските и методите на управление. Определят се и всестранно се обосновават изискванията за по-нататъшното развитие на въоръжението и бойната техника, задълбочено се използува комплексът от мероприятия по подготовката на бойните действия и всестранното осигуряване на войските и се обосновават оперативно-тактическите нормативи. Значението на различните учения и военни игри за развитието на военната теория не е еднакво и се определя от целите, мащабите, размаха, постановката и пълнотата на решаваните въпроси, качеството на организацията и провеждането, възможностите и характера на експериментирането. По същество това са модели, организирани и провеждани специално за експериментиране на предварително разработени теоретични проблеми или бойна техника и въоръжение.

Командно-щабните учения, командно-щабните и командните военни игри са форма за подготовка на командирите и щабовете от всички степени. Те позволяват да се проверят и усъвършенствуват възгледите за характера на бъдещите войни, операции и боя, за използуването на различните родове войски и видове въоръжени сили. Освен това те позволяват да се изработват най-рационалните способи за организиране и водене на съвременните бойни дейст-

вия, да се усъвършенствуват организационната структура на войските и методите за управление.

Командно-щабните военни игри и учения може да се организират и като изследователски, като обикновено се провеждат във висшите военноучебни заведения — ВА „Г. С. Раковски". Те може да са по-продължителни от обикновените. На тези игри се изследват важни проблемни въпроси от теорията и практиката на боя и операцията и се разработват теоретичните основи и практическите препоръки за водене на бойните действия. Те са добра школа за всички играещи и преди всичко за изследователите. Като участвуват на определени длъжности, те получават възможност лично да обхванат обема на работата на едно или друго длъжностно лице, да добият опит и практическа тренировка за извършване на разчети, изготвяне на бойни документи, използуване на средства за управление на войските и др.

Войсковите учения, провеждани по плана за бойната подготовка, обикновено нямат изследователски цели но са свързани непосредствено с практическите действия на частите и съединенията в условия, максимално близки до бойната обстановка. На тях се отработват всестранно въпроси по организирането, планирането и воденето на бойните действия в съответствие със съществуващите теоретични положения. Затова такива учения дават възможност да се провери на практика действеността на разработените теории и пътищата за тяхното усъвършенствуване.

Практическите действия на войските през време на учения позволяват да се изследват цял комплекс от мероприятия по подготовката на бойните действия, организирането на взаимодействието, управлението, всестранното осигуряване и някои оперативно-тактически нормативи, като маршовите и маневрените възможности, сроковете за изпълнение на различни задачи, точността на огъня на отделните средства и др. Учения-та с войските се използуват широко за обосноваване на тактико-техническите изисквания към бойната техника и въоръжението и тяхното по-нататъшно усъвършенствуване, а така също и за определяне на целесъобразна организационно-щатна структура на войските.

На войсковите учения често се решават и такива въпроси, които са изследвани и отразени в теорията и проверени на практика, но изискват по-нататъшно разработване и уточняване.

На специалните изследователски учения с войски се проверяват всестранно съществуващите теоретични положения и разработки, усвояват се нови способи за организиране и водене на бойните действия, използуват се различни видове оръжие и бойна техника. Те са най-резултатни при изследване на въпросите от военната теория и практика и имат важно значение за развитието на военното изкуство.

Всяко учение и военна игра дават богат фактически материал и представляват важни източници за по-нататъшно развитие на военната теория и практика.

Полигонните изпитания позволяват да се проведат изследвания, опити и изпитания на различни образци въоръжение, военни материали и бойна техника (опитни и на въоръжение), за да се усъвършенствуват. За изпитанията са необходими научноизследователски полигони, оборудвани със специална измервателна и контролна апаратура, прибори, свързочни средства, мишенна обстановка, лаборатория и др., които осигуряват получаването на необходимите резултати.

При изучаване на процесите и явленията на бойните действия на войските в тяхното естествено състояние и при експериментирането чрез провеждане на учения, военни игри, полигонни и войскови изпитания и други широко се използува също и методът на наблюдението. Той позволява да се видят голям брой връзки и зависимости между реалните процеси на боя и операцията, самият изследовател лично да наблюдава и изучава характера на бойните действия на войските, командирите и щабовете и да направи обосновани препоръки за техните действия.

Всички разгледани методи за изследване на процесите на бойните действия на войските се прилагат широко във военното дело и дават възможност за обосноваване и развиване на военната теория и практика. Те позволяват да се изследват такива важни фактори, които влияят върху бойните действия на войските като цяло, като състоянието и възможностите на средствата за разузнаване и управление, качествените характеристики на въоръжението, броя на огневите средства, подготовката и морално-боевите качества на личния състав, условията на местността и времето и други, което осигурява ефективно използуване на силите и средствата. Чрез съвременните електронноизчислителни машини и разгледаните методи за изследване се осигурява създаването на функционални динамични модели на сложни системи за управление и действие на войските.

Глава трета

ИНФОРМАЦИЯ, ВЪВЕЖДАНА В МОДЕЛИТЕ

1. ОБЩИ ПОЛОЖЕНИЯ И ВИДОВЕ ПАРАМЕТРИ

При моделиране на бойните действия чрез методите на изследване на операциите съществена роля играе информацията, въвеждана в моделите. В зависимост от средствата за доставяне и възможностите за получаване при различните модели се налага да се работи с различна по обем и достоверност информация. Това оказва влияние върху ефективността на избрания модел и точността на получените резултати.

Информацията, която се въвежда в моделите, използуващи методите на изследване на операциите, има най-разнообразен характер. В зависимост от условията, в които се добива, тя може да е с различна степен на достоверност. Така например информацията за положението и състоянието на противника обикновено трябва да се счита с по-ниска степен на достоверност отколкото за положението и състоянието на собствените войски. Разбира се, при определени конкретни условия може да бъде и обратното.

В моделите на бойните действия се въвежда различно количество информация. В зависимост от това, какви действия описват моделите, налага се да се използува по-малък или по-голям обем входна информация. Съществуват модели, в които не може да се въвежда възможният максимален обем от входна информация, тъй като получаването ѝ е трудно. Така например при разработването на модел за прегрупиране на войските с автотранспорт голяма част от входната информация, като характеристиката на маршрута и атмосферните условия, състава, наличността и техническата характеристика на автобронетанковата техника, подготовката на техническия личен състав, нормативите за движение на колони и др., може да

се получи лесно, и то с достатъчна достоверност. Разбира се, и при този модел не може да се въвеждат предварително данни за възможното въздействие на противника върху колоните, което води до това, че някои от съществените моменти на разчетите да имат вероятностен характер.

Не така стои въпросът при моделиране на процесите по техническото осигуряване. Понеже в повечето случаи ще липсва достоверна информация за количеството и тротиловия еквивалент на противниковите ядрени удари по собствените танкови подразделения и автотракторна техника, за силата на огневата система на противника и неговите варианти за действие, то резултатите, получени от този модел, ще имат предимно вероятностен характер.

От изложеното се вижда, че показателите, по които може да се класифицира информацията, въвеждана в моделите, са най-разнообразни. Независимо от това, за да може да се направи най-пълна характеристика на информацията, целесъобразно е тя да се раздели по принадлежност:

а) за външните условия, влияещи върху резултатите от моделирането;

б) за положението, състоянието и действията на противника;

в) за положението, наличието и състоянието на собствените войски;

г) информация, постъпваща от други модели на бойни действия.

Информацията за външните условия включва данни за:

— метеорологичните условия (температура, атмосферно налягане, плътност и влажност на въздуха, скорост и направление на вятъра, облачност);

— релеф на местността (надморско равнище, профил на местността, препятствия, възможност за маскировка, характеристика на пътищата);

— осветеност на местността;

— геофизически условия;

— характерни населени пунктове, водни прегради, маршрути и други обекти, които може да окажат влияние върху бойните действия.

Информацията, която характеризира положението, състоянието и действията на противника, е разностранна и почти във всички случаи недостатъчно пълна. Известна част от нея подлежи на количествена и качествена оценка. Тук спадат данните за наличието, състоянието и огневите възможности на техниката и въоръжението, комплектуваността с личен състав и др.

Друга част от информацията за противника не подлежи на количествена и качествена оценка — данните за подготовката и моралното състояние на личния състав, замисълът за хода на бойните действия и др. Вероятностният характер на входните данни от тази категория обуславя характера на получените резултати.

За да се изучи информацията за противника, тя може условно да се раздели на следните групи:

— за наличието, техническото състояние и възможностите на техниката и въоръжението;

— за комплектуването и състоянието на личния му състав;

— за местонахождението на противниковите сили и средства и възможностите им да въздействуват върху нашите войски;

— за подготовката на щабовете и методите за използуване на техниката и въоръжението;

— информация от общополитически и морален характер.

Информацията за положението, наличието и състоянието на собствените войски е също разностранна, но за разлика от информацията за противника е по-пълна и достоверна. Освен това при решаването на задачата, построена по даден модел, има възможност да се избират оптималните варианти и модели за използуване на техниката и въоръжението. В този смисъл резултатите от моделирането на процесите, касаещи собствените войски, са по-точни и достоверни.

Информацията за собствените войски може условно да се раздели така:

— за техниката и въоръжението, включваща данни за наличието, техническото състояние, тактико-техническите възможности и методите за използуването им;

— за комплектуването на собствените сили с личен състав, неговата квалификация и морално-политическо състояние;

— за местонахождението на собствените сили и средства и възможностите им за въздействие върху противника и др.

Информацията, която постъпва от други модели на бойни действия, дава възможност да се използуват готови резултати, с което се съкращава времето за набиране на входните данни. Освен това тя може да съдържа данни, получени като резултати от моделиране на бойните действия от вишестоящата инстанция, която има по-големи възможности в това отношение. Например при моделиране на използуването на ракетните войски на обединението за нанасяне на ядрени удари по противника може да се получат оптимални данни, които са валидни при решаването на същата задача в съединението. Твърде често като входна информация ще се използуват и резултатите от моделиране в низшестоящите инстанции. Това се отнася предимно при решаване на задачи по техниката и въоръжението. Като се използуват обобщените оптимални резултати като входни данни в определен модел, може да се съкрати времето за подготовка на данните, при което тези данни са с достатъчна точност и достоверност. Например за определяне на наличието и техническото състояние на автобронетанковата техника в армията е целесъобразно да се използуват като входни данни обобщените резултати от решаването на същата задача в съединението.

Както вече беше отбелязано, военните модели обикновено нямат пълна входна информация. Това предполага широко да се използуват онези методи от изследването на операциите, които дават оптимални резултати при недостатъчна входна информация. Тези методи са разгледани в по-нататъшното изложение на материала. В настоящата глава са разгледани външните условия, въвеждани в моделите, и характеристиката на въоръжението на нашите войски и противника, тъй като те са важна съставна част на входната информация и оказват голямо влияние върху резултатите от моделирането.

2. ВЪНШНИ УСЛОВИЯ, ВЪВЕЖДАНИ В МОДЕЛИТЕ

Под външни условия, въвеждани в моделите, се разбира комплекс от характеристики за външната среда — метеорологични и географски условия, релеф на местността и др.

Бойните действия не може да се провеждат изолирано от външните условия. Нещо повече, водещият бойните действия трябва винаги да се съобразява с тях, за да разчита на успех. Това предполага, че той трябва да има постоянна информация за тяхната характеристика. Следва да се отбележи, че външните условия може да са частни, отнасящи се за конкретния случай, или общи за даден период и район. Например частната характеристика на снежната покривка е дебелината на снега в даден пункт в определен момент. Общата характеристика на същата величина е обобщената дебелина за даден район и период. При моделиране на бойните действия по-често се използуват като

входни данни частните характеристики, тъй като те оказват по-съществено влияние върху бойните действия.

Метеорологичните условия включват редица параметри, които трябва да се отчитат при моделиране на всякакъв вид бойна дейност. В изложението по-долу са разгледани някои от параметрите на метеорологичните условия, които оказват най-съществено влияние върху бойните действия.

Температурата на въздуха влияе непосредствено върху въоръжението, техниката и дейността на личния състав. Например при бойни действия в условията на ниски температури трябва да се провеждат специални мероприятия по подготовката на техниката и личния състав. Наличието на снежна покривка и заледени участъци създава сериозни затруднения при придвижването на личния състав, бойната техника и въоръжението. Високите температури също оказват отрицателно влияние върху бойната дейност на войските — увеличава се опасността от прегряване на двигателите на бойната техника, а личният състав работи при ненормални условия. Температурата на въздуха се счита като случайна функция на надморската височина и географските координати. За даден район и период тя може да се разглежда като случайна функция на надморската височина и да се представя във форма на каноническо разложение.

Атмосферното налягане оказва влияние върху работата на бойната техника и въоръжението. При надморска височина над 2000 метра вследствие намаленото атмосферно налягане се намалява чувствително мощността на двигателите и се изменят условията за водене на стрелбата. Атмосферното налягане на дадена височина се определя от барометричната формула, като се изхожда от данните за земното атмосферно налягане и разпределението на температурата във височина.

Вятърът оказва определено влияние върху полета на снарядите, ракетите и самолетите и трябва да се има пред вид при моделирането на бойните действия. Той обикновено се представя като проекция на дадено направление и перпендикулярно на него и също е случайна функция с аргумент надморската височина, която може да се представи в каноническо разложение, определено от обработката на статистически материал.

Облачността е един от основните метеорологични фактори, които се отнасят до въздушното разузнаване. Тя може да се представи като вероятност на видимостта, която е неслучайна функция от височината. Получава се чрез обработката на статистически данни, добити от наблюдения.

Релефът на местността оказва решително влияние върху характера на бойните действия. Той определя възможностите за маневриране, преместане и маскировка на войските. От него зависят условията за наблюдение и пряката видимост, условията за стрелба и т. н., или, общо казано, местността оказва определено влияние върху построението на бойния ред на войските и начините за действието им. Това налага при моделиране на бойните действия да се намерят способи за описание на релефа на местността и за въвеждане на характеристиките като входна информация. За да се опише релефът на местността, в най-общия случай е необходима информация, която обхваща характеристиките:

— надморска височина на участъка;

— възможност за маскировка на техниката и въоръжението;

— наличие на естествени особености на местността: блата, реки, стръмни склонове, гори, пътна мрежа и др.;

— фактори, определящи скоростта за движение на личния състав, техниката и въоръжението: категория на пътищата и свързаните с нея коефициенти за сцепление, съпротивление на движението и различни други ограничения в скоростта за движение.

Характеристиката за надморската височина на участъка осигурява данни за определяне на реалните тягови възможности на техниката и условията за действие на въоръжението. Те може да се въвеждат като коефициенти, получени чрез обработката на статистически материал от техническите характеристики на техниката и въоръжението. (Има се пред вид главно намаляването на мощността на двигателите при големи надморски височини.)

Възможностите за маскировка на личния състав, техниката и въоръжението зависят пряко от условията на местността. Те може да се въвеждат в моделите като коефициенти, които отчитат естествените маски. Ако се приеме коефициентът за маскировка при открита равна местност за 0,0, а при гориста местност (високостеблена гора) за 1,0, в различните участъци в зависимост от количеството и качеството на естествената маскировка той ще приема стойността между 0,0 и 1,0.

Данните за средната скорост за придвижване се въвеждат обикновено като коефициенти, получени от множество опити за сцепление с почвата, за съпротивление на движението, наклони на маршрутите и др. Труднопроходимите участъци трябва да се въвеждат за всеки конкретен случай отделно, като дан-

ните за тях отразяват абсолютното време за забавяне на движението при преодоляването им.

Информацията за релефа на местността може да се въвежда в моделите по два начина: конкретно или в осреднена форма.

Конкретното въвеждане на характеристиките за релефа на даден участък дава по-точни резултати. Характеристиките се определят чрез избор на характерни участъци от местността по карта или въз основа на статистически наблюдения. Най-съществено в случая е, че е необходим голям обем входна информация.

Осредненото въвеждане на характеристиките за релефа на местността се изразява в разглеждане на средния релеф и средната скорост за движение. Точността при този модел е по-малка, но в замяна на това обемът на входните данни се намалява чувствително.

При моделирането на бойните действия следва да се отчита и осветлението на местността. Опитът от войните показва, че повечето бойни действия са се водили при достатъчна видимост (обикновено денем), но има случаи на успешни действия и при недостатъчна видимост (нощем, мъгла и др.).

Определянето на вероятността за провеждане на боя в една или друга част от денонощието е сложна задача, която изисква пълно да се познават тактиката на противника, характеристиката на въоръжението му и собствените възможности. Ако се предвижда бойните действия да се провеждат при ограничена видимост, в моделите трябва да се въвеждат условия, които я отчитат.

Геофизическите условия се определят, като се изхожда от оперативно-технически съображения, въз основа на които се определя вероятността за водене на бойните действия в една или друга точка на земното кълбо. Като се знаят географските координати, може да се определят надморската височина, характеристиката на релефа, продължителността на деня и пр.

3. ХАРАКТЕРИСТИКИ, СВЪРЗАНИ С РАЗУЗНАВАНЕТО

Широкото използуване на нови средства за борба в общовойсковия бой и операцията поставя пред разузнаването нови задачи.

Най-мощното средство за поразяване е ядреното оръжие. Ефективното му използуване позволява в кратки срокове да се нанасят на противника огромни загуби в жива сила и бойна

техника. Затова най-важната и първостепенна задача на разузнаването е своевременното откриване на ядреното оръжие на противника и непрекъснатото му разузнаване, докато бъде напълно унищожено. За решаването на тези задачи се съсредоточават основните сили и средства на всички видове разузнаване.

Заедно с това особено нарасна значението на техническите средства за разузнаване — радиотехническите, разузнавателните самолети, оборудвани със съвременна разузнавателна апаратура, телевизионните приемници, електронноптическите прибори, звукометричните и радиотехническите станции, дозиметричните прибори, приборите за химическо разузнаване и др.

За да се реши задачата по моделирането на разузнавателната дейност, необходимо е да се въведат някои характеристики на средствата за разузнаване, тъй като те са важна информация, която влияе върху резултатите от моделирането. Тези характеристики може да бъдат следните:

1. Максимална далечина на действие на средствата за разузнаване. Обикновено тя е случайна величина, върху която влияят различни фактори: далечината на полета (зависи от типа и състоянието на самолета), противодействието на противника, метеорологичните условия и др.

2. Възможност на средствата за разузнаване да разкриват противника. Тя зависи от условията за разузнаване, като може да има само два изхода — обектът да се разкрие или да остане неразкрит. Тъй като е трудно да се предвидят условията за разузнаване, необходимо е да се предскаже изходът от него. Затова възможността да се разкрие даден обект от средството за разузнаване се описва математически по следния начин:

$$P_{\text{разкрив.}} = f\ (x,\ t),$$

където:

$P_{\text{разкрив.}}$ — вероятност за разкриване на обекта от дадено разузнавателно средство;

x — далечина на разузнаване;

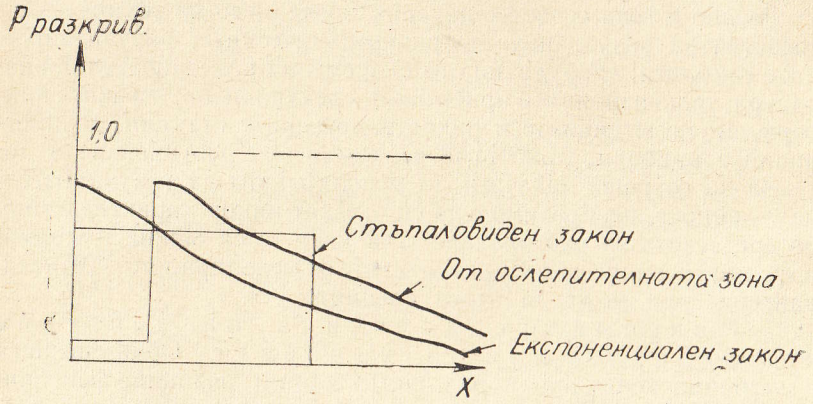
t — време за разузнаване.

В зависимост от вида на средствата за разузнаване и разузнаваните обекти $P_{\text{разкрив.}}$ може да има различен характер (фиг. 2).

3. Точност на определяне на координатите. За ефективно използуване на наличните средства за поразяване са необходими точни данни за координатите на про-

тивниковите обекти на цялата дълбочина до максималната им далекобойност.

Точността на определяне на тези координати зависи преди всичко от подготовката на разузнавателните подразделения, използуването на най-съвършените средства и способи за разуз-



Фиг. 2. Характер на законите за разкриване на целите

наване и положението на обекта в момента на наблюдението от разузнавателните средства. Затова тя може да се характеризира с σ_{max} и σ_{min}, които са известни предварително за някои разузнавателни средства, или със средна величина ($\sigma_{ср}$).

4. Временни характеристики. Най-важната от тези характеристики е времето от откриването на целта до получаването на данните от командира и щаба. При отчитане на това време е необходимо да се вземе под внимание времето за добиване, събиране, обработване и предаване на разузнавателните сведения.

Всички срокове заедно с времето за подготовка и нанасяне на удара трябва да са по-кратки или равни на времето за престояване на противниковите обекти в позиционните райони. Или, математически изразено,

$$t_{закъсн.} \leq t_1 - (t_2 + t_{полет}),$$

където:

$t_{закъсн.}$ — максимално време на закъсняване при подготовката и нанасянето на удар по обект на противника;

t_1 — време за престояване на противниковия обект;

t_2 — общо време за подготовка на средствата за нанасяне на удара;

$t_{полет}$ — времелетене на ракетата (снаряда).

Важна временна характеристика на средствата за разузнаване може да бъде и времето за откриване на целта и обработване на резултатите от разузнаването.

Това са характеристиките на средствата за разузнаване при разкриване на противника и при изпълнение на една задача.

Много по-трудно е обаче да се опишат характеристиките на средствата за разузнаване при моделиране на други разузнавателни дейности, например разузнаване при групировката на противника и неговия замисъл на действие.

4. ХАРАКТЕРИСТИКИ, СВЪРЗАНИ С МАНЕВЪРА НА ВОЙСКИТЕ, УПРАВЛЕНИЕТО И ОСИГУРЯВАНЕТО

А. Придвижване на войските

В съвременните условия за водене на бойни действия на войските много често ще се налага да се придвижват с високи скорости и на големи разстояния. Начините за придвижване се определят от задачите за изпълнение, разполагаемото време и от разстоянията за преодоляване. Тук трябва да се имат пред вид и характерът на пътищата, транспортните средства и обстановката. Във връзка с това войските може да се изнасят пеша, с транспортни средства (автомобили, вертолети, самолети, кораби и др.) или комбинирано, което ще бъде често явление.

С методите за изследване на операциите може да се получат разчети, изразени в таблици и графици, които улесняват значително управлението на войските при придвижването им. Във връзка с това може да се създадат модели за придвижване и управление на войските. Затова са необходими някои характеристики по отношение на подвижността на войските и техниката: скорост на движение, възможности за придвижване с едно зареждане на машините (запасен ход на машините), проходимост, маневреност и някои временни показатели.

Скорост на движение

Когато се говори за скорост на движение и се използуват показатели от този вид, най-често се има пред вид средната скорост. Тя се определя по формулата

$$V_{ср} = \frac{Д_м}{T_м},$$

където:

$V_{ср}$ — средна скорост на движение;
$Д_м$ — разстояние на придвижването;
$T_м$ — общо време на придвижването.

Величината $T_м$ се определя по формулата $T_м = \sum_{i=1}^{n} \frac{L_i}{V_i}$.

Тук L_i са дължините на отделните участъци, определени според различните си характеристики, а V_i — възможните скорости на движение на различните участъци.

При определяне на средната скорост не се вземат пред вид почивките. Необходимо е да се отчитат внимателно условията за движение на всеки участък и възможностите на техниката, за да се получат най-добри показатели в това отношение.

От изложеното се вижда, че скоростта на движение е функция от външните условия, към които следва да се отнесат релефът на местността, състоянието на почвата или пътната настилка, атмосферните условия (горещина, влага, заледеност на пътищата, заснеженост, силни валежи и т. н.), състоянието на пътните съоръжения и др.

Скоростта на движение при силно пресечен релеф на местността се намалява рязко, което също трябва да се има пред вид от организаторите на придвижването на войските.

Запасен ход на машините

Този показател влияе силно върху придвижването на войските и представлява разстоянието, което може да изминат машините с едно зареждане с гориво. Изчислява се за нормални условия за движение и зависи от вместимостта на горивните резервоари и от икономичността на двигателя. Щом като запасният ход се определя на базата на нормални условия за движение, ясно е, че при лоши пътища, силно пресечен релеф, неблагоприятни атмосферни условия и т. н. тази величина ще бъде по-малка. Следователно запасният ход на машините е показател, който също силно се влияе от външните условия. Ако на войските се налага да извършат придвижване, по-голямо от запасния ход на машините, необходимо е те да се зареждат през време на движението. Така се удължава общото време за придвижване на войските.

Проходимост

Друг показател от съществено значение за придвижването на войските е проходимостта. За дадено средство тя се определя от ограниченията на възможностите за преместване: лоша пътна мрежа, липса на пътища, наличие на големи или малки водни прегради, канали, ровове, ями и др. За водните прегради трябва да се има пред вид дълбочината с оглед възможностите за преминаване на машините в брод или за прехвърлянето им по мост, с плаващи средства, пароми и т. н.

Проходимостта за въздушните средства се определя главно от характера на атмосферните условия (благоприятни или неблагоприятни), а за морските средства — от състоянието на морето (наличие на морски бури, вълнение и др.).

Маневреност

Под маневреност се разбира способността и възможностите на машините да извършват маньовър при конкретни условия за движение. Този показател има съществено значение при преодоляване на пресечени терени с много и остри завои по пътищата, при което възможностите на машините, които влачат различни повозки, рязко се намаляват. Затова преди всичко трябва да се предвиди радиусът на завиване на машините с прикачените за тях повозки или максималният ъгъл на завиване от предния мост на машината. За нашите условия този показател има голямо значение.

Временни показатели

Към тях следва да се отнесе най-напред времето, необходимо за зареждане на машините с гориво. Това се налага тогава, когато войските извършват по-продължителни преходи и запасният ход на машините не може да покрие предвиждания пробег. Затова през време на придвижването им те трябва да се дозареждат с гориво, за което според ранга на поделението може да са необходими от един до няколко часа светло време, т. е. с толкова часа трябва да се увеличи общото време за придвижването.

Друг показател от този род може да е например времето, необходимо за подготовка за придвижване. Тук следва да се отнесе необходимото време за припалване и запалване на двигателите, за формиране на колоните и извеждане на войските до изходния рубеж (пункт), за съсредоточаване на войските в нов

район или за развръщане на определен рубеж, за излитане, ако се използува авиотранспорт, и т. н.

За успешното организиране и осъществяване на придвижването на войските винаги трябва да се имат пред вид разгледаните показатели, които оказват съществено влияние върху своевременното изпълнение на задачите.

Б. Управление на войските

Управлението на войските е непрекъснато, целенасочено ръководство или „целесъобразна дейност на командира, щаба и други органи за управление по подготовката на бойните действия и насочване на усилията на войските за успешно изпълнение на бойните задачи в хода на боя чрез получаване и изучаване на данните за обстановката, вземане на решение и довеждане на задачите до изпълнителите“[1].

В този сложен процес се включват събирането, предаването, съхраняването и обработването на огромен обем информация, след което въз основа на нея се прави анализ и оценка и се взема решение. Взетото решение трябва да се сведе до войските, да им се поставят съответни задачи и да се проведе контрол за тяхното изпълнение.

За осъществяването на този сложен процес системата за управление може да е в различна степен автоматизирана: от най-простите устройства за събиране и обработка на информацията до развити системи за автоматизирано управление с обединяване в единен комплекс на средствата за свръзка, изобразяване, отпечатване, електронноизчислителните машини и т. н.

Основните характеристики на системите за управление са:

1. Пропускателната способност на системата. Определя се от обема на информацията, която може да се обработи за единица време. Ако системата е автоматизирана, като в нейния комплекс са включени и канали за свръзка, пропускателната ѝ способност зависи много и от пропускателната способност на свързочните канали. Тук следва да се отбележи, че в теорията на масовото обслужване пропускателната способност на системата може да се характеризира с необходимото средно време за „обслужване на една заявка“. То ще бъде различно в зависимост от характера на „заявката“, т. е. от получената информация или от въпроса, за който се отнася.

[1] Иванов, Савельев, Шеманский — Основы управления войсками Военное издательство, Москва, 1971 г.,

2. Качеството на управлението на системата. За оценка на системата в това отношение досега не е установен и приложен общ подход. Трудно и почти невъзможно е качеството да се характеризира с някаква числена величина, особено когато се решава въпросът за бойните действия. Ако се прави оптимизация обаче по някакъв зададен критерий, възможно е неговата величина да се сравни с предвижданата при идеални условия за работа на системата за управление.

Такава оценка може да се получи при решаване на въпросите по снабдяването, целеразпределянето и др. чрез „транспортната задача“. Тук може да се определи точно оптималният брой на поразяваните цели при съответното разпределение на огневите средства на ПВО или на флота, да се подвозят материални средства с минимален пробег, да се подадат материални средства на войските, като до тях достигнат максимум транспортни средства въпреки въздействието на противника, и т. н.

Във връзка с управлението на войските следва да се каже, че системата за управление ще се справи успешно със своите задачи, ако е оперативна, бързо реагира на резките изменения на обстановката, ако събира, обработва и анализира информацията за минимално време, взема решения и довежда задачите до изпълнителите. Оперативността в работата на системата в съвременни условия трябва да се счита като един от основните показатели за ефективността на нейното функциониране.

В. Осигуряване на бойните действия на войските

Материално-техническото осигуряване на бойните действия на войските е много сложен, труден и всеобхватен процес. Освен материалното и техническото осигуряване той обхваща и медицинското осигуряване, обслужването и ремонта на техниката, осигуряването и обслужването на всички родове войски. Непрекъснатото осигуряване на войските с всичко необходимо се извършва независимо от това, дали те са на място, в движение или водят бойни действия. Тези процеси може да се решават успешно, ако се разглеждат като система за масово обслужване, където най-важна характеристика е времето за обслужване на един или на няколко обекта. Въпросите тук се решават чрез теорията на масовото обслужване, като се изучава и оценява количествената страна на тези въпроси. В случая следва да се имат пред вид системите: обслужване на хората в медицинските учреждения; товарене и разтоварване на автомашините и вагоните; обслужване на транспортните сред-

ства на мивките и в ремонтните работилници; обслужване в продоволствените пунктове, столовете, складовете; пропускане на автомашините по автомобилните пътища и т. н.

Други характеристики освен времето, необходимо за обслужването на един обект, може да бъдат: средното количество апарати, заети в обслужването; средният брой заявки, постъпващи за обслужване в единица време; дължината на „опашката“, т. е. на потока за обслужване; свободните към даден момент апарати за обслужване; времето за престой при обслужване; средното време за чакане до началото на обслужването; средната интензивност на постъпване на заявки за необходима работна сила и т. н.

Всички характеристики, които имат съществено значение за осигуряването и обслужването на войските, може да се получат чрез решаване на въпросите от дейността по материално-техническото осигуряване чрез теорията на масовото обслужване. На органите, занимаващи се с тези въпроси, ежедневно, на всяка крачка ще им се налага да решават подобни задачи — при снабдяването на войските с всички видове материални средства, при обслужването на хората или транспорта, при ремонтирането на всякаква апаратура, бойни и транспортни средства, при регулирането на пътното движение и пр.

Друга съществена характеристика, необходима на органите, решаващи въпросите по материално-техническото и другите видове осигурявания, е цената или разходите за единица продукция: пари, време, часове, километри, тонаж, брой на автомобилите или другите превозни средства, брой на машините, необходими за изкопни работи, и т. н.

Тези характеристики се намират и използуват, като задачите, свързани с тези въпроси, се решават по метода на „линейното програмиране“ и особено чрез „транспортната задача“, която е частен случай на общата задача на линейното програмиране и използува така наречения „разпределителен метод“. В случая се търси и намира оптималното решение, т. е. най-ниската или най-високата стойност, най-малките или най-големите разноски, или, в крайна сметка, оптималният вариант, който е най-изгоден за решаването на въпроса от органите на материалното, техническото и другите видове осигуряване на бойните действия на войските.

5. ХАРАКТЕРИСТИКИ, СВЪРЗАНИ С НАНАСЯНЕТО НА УДАРИТЕ И ОГЪНЯ НА АРТИЛЕРИЯТА

Ефективността на огъня на стрелковото оръжие и артилерията, ударите на авиацията и ракетите при поразяване на различни обекти и цели зависи от следните основни фактори: вида, размерите и подвижността на обекта; точността на данните за стрелба (пуска); характеристиките на разсейването; поразяващото действие на боеприпасите; броя на огневите средства, привличани за поразяване на целите; разхода на боеприпаси; начина за обстрелване (нанасяне на удара); реда и темпа за водене на огъня; времето за престояване на обекта на позиция и др.

При изследването на процесите на бойните действия на войските чрез моделирането, където ударите на ракетите и огънят на артилерията заемат важно място, е необходимо да се отчитат тези фактори, тъй като те оказват съществено влияние върху бойната ефективност на войските.

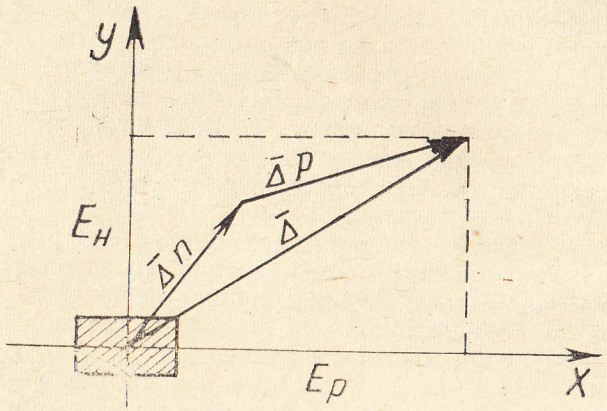
Обектите за поразяване представляват съвкупност от елементарни цели, разположени на ограничен участък. Елементарните цели са единични цели (отделен боец, оръдие, танк и др.), които не може да се разделят на части, без да се наруши физическата им цялост. Обектите се разделят по основните показатели: характера на елементарните цели и тяхното разпределение върху участъка, плътността на разпределение, степента на защитеност, конфигурацията, размерите и др.

Елементарните цели, които влизат в състава на обекта, може да бъдат еднородни или нееднородни. Обектът е еднороден, когато се състои от еднакви елементарни цели, а нееднороден — от различни.

Плътността на разпределение на елементарните цели върху единица площ (дължина) може да е постоянна или да се изменя, което съответствува на равномерно и неравномерно разпределение на целите. Броят и положението им в обекта може да са известни или неизвестни. Освен това те може да са разсредоточени или съсредоточени в груповия обект. При груповите обекти с разсредоточени цели разстоянието между тях е такова, че при стрелба по данни за една цел вследствие на разсейването не може да се поразят други, докато при съсредоточените цели боеприпасите, насочени за поразяване на дадена цел, може да поразят и други. В груповите обекти са известни броят и разположението на отделните цели, затова се допуска,

че са равномерно разположени върху цялата площ и се наричат площадни (линейни).

По форма обектите може да бъдат кръгови, правоъгълни, квадратни и с произволна конфигурация. Освен това те биват подвижни (тези, които изменят своето положение) и не-



Фиг. 3

$$E_р = \sqrt{E^2_х + B^2_д};$$

$$E_н = \sqrt{E^2_у + B^2_с}.$$

подвижни. Ефективността на огъня (ударите) по подвижните обекти е по-малка, отколкото по неподвижните. Обектите може да бъдат още активни и пасивни. Активни са огневите средства на противника, които нанасят загуби на нашите войски, а пасивни — всички останали.

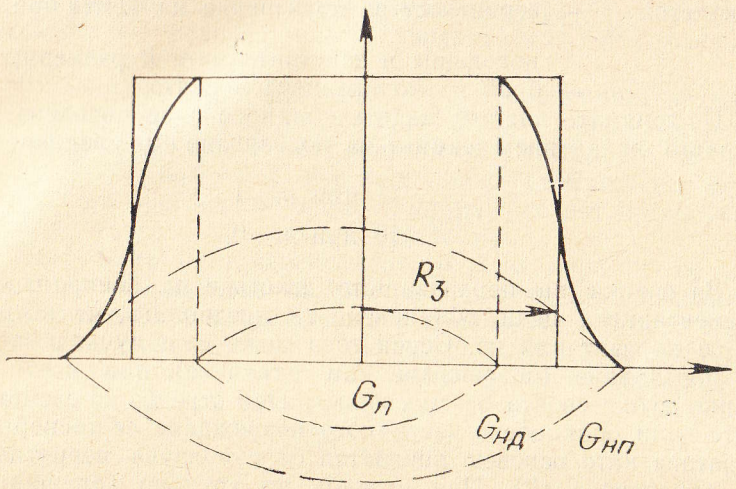
При определяне на ефективността на огъня и ударите се отчитат всички особености в характера на разполагането, укриването и противодействието на противниковите обекти.

Ударите на ракетите и огънят на артилерията се характеризират със случайни грешки в определянето на данните за стрелба (пуск) и техническо разсейване на боеприпасите, които предизвикват отклонения на точките на падане от точката на примерване (фиг. 3).

Случайните грешки на изстрелите ($E_р$, $E_н$) се състоят от сумарните случайни грешки при определяне на координатите на целта, поправките за метеорологичните и балистичните условия, разсейването и др., които може да се обединят в две

групи случайни грешки: в подготовката на данните ($E_х$, $E_у$) и в разсейването ($B_д$, $B_с$).

Поразяващото действие на боеприпасите зависи от мощността им и от степента на защитеност на обекта. То се определя чрез отчитане на комибинираното въздействие на всички поразяващи фактори върху елементарната цел.



Фиг. 4

$G_п$ — област на поразяване елементарните цели с вероятност единица; $G_{нд}$ — област, в която част от елементарните цели се поразяват, а други остават непоразени; $G_{нп}$ — област, в която елементарните цели не се поразяват (област на безопасно разстояние); $R_з$ — радиус на приведената зона за поразяване на елементарните цели

Елементарните цели са поразени (унищожени), ако по оценка на специалистите се считат за небоеспособни. По-голямата част от тях се унищожават на определено разстояние от центъра на взрива. Вероятността за поразяване на елементарните цели в зависимост от отдалечението им от центъра на взрива се определя по координатния закон, който има различен вид и зависи от характера на обекта, мощността и вида на боеприпаса и др. (фиг. 4).

Освен това има цели, които се поразяват само при пряко попадение на боеприпасите. В този случай законът за поразяване е функция само от броя на преките попадения в целта, т. е.

$$G_{(m)}=1-\left(1-\frac{1}{\omega}\right)^m,$$

където: $\frac{1}{\omega}$ — вероятност за поразяване на целта при едно попадение в действителните ѝ размери;

m — брой на попаденията в целта.

По-голямата част от целите обикновено се поразяват при първото попадение и законът за поразяване има следният вид:

$$G_{(m)}=\begin{cases}1 & \text{при } m\geq 1\\ 0 & \text{при } m=0.\end{cases}$$

За оценка на поразяващото действие на боеприпаса по елементарните цели обикновено се предполага, че те може да се поразят или не. Освен това може да получат и частично поразяване (повреждане или раняване), при което временно губят своята боеспособност. При стрелба по елементарните цели обикновено частичното повреждане се пренебрегва и затова като основен показател се използува вероятността за поразяване (P). При стрелба по групови (площадни и линейни) обекти, където се отчита и частичното поразяване, като основен критерий за оценка на ефективността служи математическото очакване за броя на поразените цели (M) и поразяване на не по-малко от зададен брой цели (S_0).

Степента на поразяване на обекта зависи до голяма степен от броя на огневите средства, които се привличат за изпълнение на огневата задача, и техните тактико-технически характеристики (брой на изстрелите за единица време, мощност на боеприпаса, точност на стрелбата и др.), разхода на боеприпасите, способа за обстрелване, реда и темпа на водене на огъня, условията на стрелбата (видимост, местност, разстояние), степента на подготовката на разчета и др.

Отчитането на тези фактори позволява да се създаде приблизително точен модел на бойните действия на артилерията при нанасяне на ракетни и огневи удари по различни обекти на противника.

6. СТОЙНОСТ НА ВЪОРЪЖЕНИЕТО

Една от главните характеристики на въоръжението, която определя до голяма степен обема и целесъобразността на възможното му използуване, е стойността. Както абсолютната стойност на въоръжението, така и относителният ѝ дял в общия обем на военните разходи непрекъснато нарастват (от 10% през 1900 год. до 70% през Втората световна война).

Стойността на системата въоръжение (C) се образува от разходите по разработването, внедряването, експлоатацията и съхраняването.

Стойността на разработването ($C_р$) се определя от разходите по научноизследователските работи, проектирането и производството на опитни образци и изпитанието им. Тези разходи обикновено се изразяват като стойност на първия произведен образец от въоръжението и зависят преди всичко от степента на усъвършенстването му.

Стойността на производството ($C_п$) на образеца се намалява при увеличаване на броя на произведените изделия поради намаляване на разходите и стойността на механичната обработка, повишаване на производителността на труда, натрупване на опит и т. н. Установено е, че стойността на партида от N изделия се определя по формулата

$$C_n=C_0N^{\nu},$$

където: C_0 — стойност на първото изделие;

ν — степенен показател, обикновено равен на 0,7.

Стойността за съхраняване $C_с$, която включва стойността на складовите разходи, профилактичните работи, охраната и др., се определя по формулата

$$C_с=\int_0^T C_{с1}\,N\,dt,$$

където: $C_{с1}$ — стойност на съхранението на образец за 1 год.

$$C_{с1}=C_{скл}+\sum_{i=1}^{m}\frac{C_{срi}}{a_i}+C_{р1}N_{р1}.$$

Тук $C_{с\,кл}$ — стойност на складовете, оборудването и поддържането на едно изделие за 1 година;

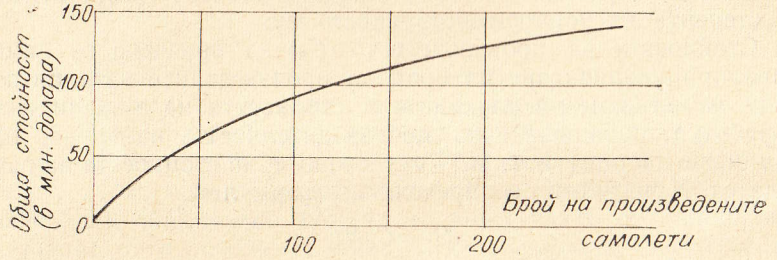
$C_{срi}$ — стойност на отделните възли и агрегати на изделието;

a_i — амортизационен период, т. е. период, през който едни или други възли излизат от строя;
$C_{р1}$ — стойност на издръжката на обслужващия персонал (охрана, технически персонал);
$N_{р1}$ — брой на хората, необходими на обслужване на едно изделие.

Общите разходи за въоръжението са

$$C=C_р+C_0N^\nu+C_с\int_0^T Ndt.$$

Те представляват нелинейна функция от броя на произведените образци и в зависимост от типа на въоръжението различните компоненти на разходите може да са превалиращи (фиг. 5).



Фиг. 5. Зависимост на общата стойност на въоръжението от броя на произведените бойни единици

При анализ на въпроса за стойността на въоръжението е необходимо да се има пред вид, че то се състои не само от ракети, самолети и бойни машини, но и от цял комплекс обслужващи механизми, устройства и т. н. Затова трябва да се срявнят стойностите на комплексите, като се има пред вид, че на най-евтината ракета не винаги съответствува най-евтиният комплекс. Когато се говори за стойността на комплекса, трябва също да се отчита от кой стадий на обслужване на техниката се разглежда (от завода, базата, техническата позиция и т. н.).

Като се изходи от казаното, общите разходи за една бойна единица комплекс са равни:

$$C_к=C^*+\sum_{i=1}^{k} n_iC_i\ ,$$

където:
C^* — стойността на бойната единица;
c_i — стойност на елементите на комплекса;
n_i — количество i-ти елементи на комплекса.

Вторият член може да превишава значително първия.

При анализа на въпросите за стойността е необходимо да се помни, че стойността, изразходвана в различно време, не е еквивалентна. За привеждането ѝ към еднакво време съществува формулата

$$C_{пр}=\frac{C}{(1+r)^t},$$

където $r\approx 0{,}10$ — коефициент на еквивалентността на капиталовложенията.

При изследванията е много важно да се свърже стойността на образеца въоръжение с неговите бойни характеристики. За пример по-долу са приведени някои формули, които показват тази връзка.

За определяне на стойността на производството на една ракета клас „земя—земя“ може да се използува приблизителната зависимост от вида

$$C=C_{1бч}\kappa_{бч}r_0^3+\frac{k_{су.}}{\sigma^m}+$$

$$+\frac{(C_г+\kappa_{дв}C_{дв})(\kappa_1\sigma+\kappa_{бч}r_0^3)\left[\exp\left(\frac{\sqrt{\partial x}}{ve}\right)-1\right]}{1-\kappa_{дв}\left[\exp\left(\frac{\sqrt{\partial x}}{ve}\right)-1\right]},$$

където
r_0 — радиус на зоната за поразяване;
σ — характеристика на точността на стрелбата;
x — максимална далекобойност на стрелбата;
$\kappa_{дв}$ — конструктивна характеристика на двигателя;
v_e — ефективна стойност на изтичане;
$\kappa_{бч}$ — коефициент на бойната част;
$\kappa_1,\kappa_{су}$ — коефициенти на системата за управление;
$C_{1бч},C_г,C_{дв}$ — коефициенти на стойността на бойната част, горивото и двигателя.

Стойността на транспортните средства се описва приблизително по следната формула: $C=a+bQ$,
където:
a и b — коефициенти;
Q — товароподемност.

И така във всеки конкретен случай стойността на образеца военна техника може да се изрази като функция от основните му параметри, които характеризират състоянието на науката и производството.

Важни характеристики, които определят стойността на образеца военна техника, са броят и качествата на обслужващия персонал. Те определят разходите за обучението и издръжката му, както и броя на хората, които непосредствено участвуват във войната и има опасност да бъдат поразени.

7. НАДЕЖДНОСТ НА ВЪОРЪЖЕНИЕТО

Въпросите за надеждността на техниката с всяка измината година занимават все повече специалистите и най-висши държавни и партийни органи. „От всички въпроси на техническия прогрес сега за нас най-важен е проблемът за надеждността, най-същественият, най-общият показател за качеството на всяко техническо устройство, синтезиращ много други негови показатели.

Надеждността е свойство на изделието да изпълнява своите функции, съхранявайки експлоатационните си параметри в предварително зададени граници в продължение на определен период от време.“[1]

Надеждност (обща надеждност) се нарича свойството на изделието, обусловено от безотказността, дълготрайността и ремонтопригодността, и осигуряващо нормално изпълнение на дадените функции. То е свързано с възможността за появяване на неизправности в изделието при експлоатацията му.

Под безотказаност се разбира свойството на изделието да запазва непрекъснато своята работоспособност, т.е. да не допуска откази за даден период при определени условия на експлоатация. Под отказ се разбира пълна или частична загуба на работоспособността.

Ремонтопригодност е свойството на машината, което отразява нейната пригодност за откриване и отстраняване на отказите. Тя характеризира разходите на труд, време и средства.

Изделията се делят на възстановяеми и невъзстановяеми.

Ремонтопригодността е свойство само на възстановяемите. Изделието може да се намира в състояние на:

— изправност, когато съответствува на всички изисквания както към основните параметри, характеризиращи нормалното изпълнение на зададените функции, така и към второстепенните, характеризиращи удобството за експлоатация, външния вид и т.н.;

— неизправност, когато не удовлетворява макар и едно от изискванията както към основните, така и към второстепенните параметри;

— работоспособност, когато съответствува на всички изисквания към основните параметри (но може да не отговаря на изискванията към второстепенните).

Характеристика на надеждността на всеки конкретен елемент е индивидуалната продължителност на работа t. При разглеждането на еднотипни елементи се установява, че продължителността на работата им е случайна величина, чиято плътност на разпределението се обозначава с $f(t)$.

Тогава основните характеристики на надеждността на елементите се определят от следните формули:

1. Вероятност за безотказно действие в течение на времето t

$$P(t)=\int_t^{\sim} f(t)\ dt.$$

2. Средно време на живот на елемента

$$t_{\text{ср}}=\int_0^{\sim} tf(t)dt=\int_0^{\sim} P(t)dt.$$

3. Интензивност на отказите, т.е. вероятност за отказа в интервал от време t до $t+\Delta t$, при условие че в момента t елементът е бил изправен

$$\lambda(t)=\frac{f(t)}{P(t)}=\frac{1}{P(t)}\cdot\frac{dP(t)}{d(t)}.$$

Трябва да се отбележи, че е достатъчно да се знае една от указаните по-горе функции, за да се определят другите две.

Опитът показва, че интензивността на отказите зависи от времето (фиг. 6).

В много случаи първият период се отстранява чрез така наречената тренировка, а през третия период елементът не се експлоатира. Тогава интензивността на отказите ще бъде

[1] ГОСТ — 13377—67.

постоянна величина и плътността на разпределението на продължителността на работата се описва от експлоатационния закон, т.е.

$$f(t)=\lambda.\exp[-\lambda t],$$

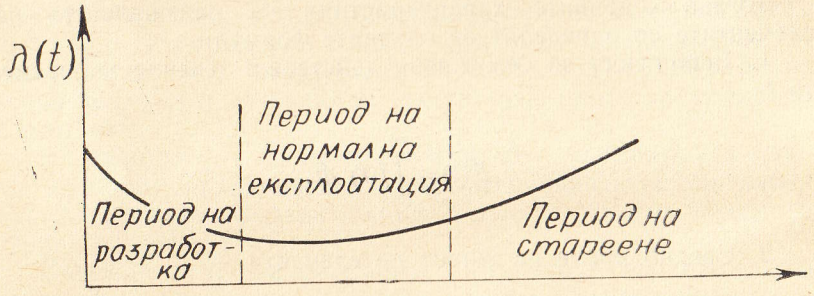
откъдето:

$$P(t)=\exp[-\lambda t];$$

$$t_{ср}=\frac{1}{\lambda};$$

$$\lambda(t)=\lambda.$$

За невъзстановяемите изделия се използуват същите характеристики за надеждност, както за елементите.



Фиг. 6

За някои изделия, работещи определено време $t_р$, например за бордовата апаратура на ракетата, това е времелетенето (важна характеристика с вероятност за безотказна работа за времето $t_р$), т.е.

$$P(t_р)\approx\frac{t_р}{t_{ср}}.$$

Ако изделието работи циклично с продължителност $t_р$, вероятността за безотказна работа в продължение на цикъла е

$$P(_п)=P_1^n,$$

където:

P_1 — вероятност за безотказна работа през един цикъл.

Надеждността на възстановяемите изделия се характеризира от същите параметри, както при невъзстановяемите, като към тях се прибивят и:

— вероятността за нормално включване $P_в$, а също и характеристиките за ремонтопригодност;

— средното време за възстановяване $T_в$;

— коефициентът за готовност (т.е. вероятността изделието да е изправено в даден момент)

$$k_г=\frac{t_{ср}}{t_{ср}+T_в}.$$

Ако се отчетат периодите за престой, свързани с профилактични ремонти (обслужвания) $t_{проф.}$ може да се определи коефициентът за използуване

$$k_и=\frac{t_{ср}}{t_{ср}+t_{проф.}+T_в}.$$

Определянето на критериите за надеждността на сложни системи е трудна задача, чиито методи за решаване се разглеждат в теорията на надеждността.

8. ХАРАКТЕРИСТИКИ НА ВЪОРЪЖЕНИЕТО, СВЪРЗАНИ С ВЪЗДЕЙСТВИЕТО НА ПРОТИВНИКА

Към най-важните свойства на въоръжението, свързани с въздействието на противника, се отнасят издръжливостта, защитата от смущението и скритостта. При отчитане на противодействието на противника, а това е характерно за изследванетна операциите, тези характеристики трябва да се въведат в моделите за изследване.

И з д р ъ ж л и в о с т т а е свойство на въоръжението да запази боеспособността си, т. е. способността да изпълнява своите функции при повреда. Тя може да се характеризира със закона за поразяване от типични боеприпаси (или боеприпаси, взети за еталон). За сравнение е удобно да се използува радиусът на зоната за поразяване на разглеждания еталонен боеприпас от един килотон. Той зависи от характеристиката и вида на боеприпасите. При анализ на въздействието на бронебойните снаряди достатъчно представителен критерий на издръжливостта може да бъде проекцията на дебелината на бронята върху възможната траектория на снаряда.

Издръжливостта обикновено оказва по-силно влияние върху ефективността на образеца въоръжение от всичките останали характеристики.

З а щ и т а т а о т с м у щ е н и я е качество на въоръжението, което му дава възможност да изпълнява функциите

си при смущения, създадени от противника. Тя има особено значение за радиолокационните, радиотехническите и някои други системи. Системите въоръжение, които не са достатъчно защитени, може да се окажат неефективни при бойни условия. Защитата от смущения се определя в зависимост от схемата на устройството и неговата мощност.

За характеристика на това свойство може да се използува вероятността за нормално функциониране на въоръжението при определени смущения на противника. Едновременно с това е необходимо да се има пред вид, че противникът може да използува най-разнообразни смущения.

Скритостта на въоръжението е свойство, което не позволява да бъде открито от средствата за разузнаване на противника. Тя се определя от състоянието (в движение, в укрития и пр.) и размерите му, наличието на демаскиращи признаци (излъчване, шум, преместване) и др. За характеристика на това свойство може да се приеме вероятността за откриване от противника с дадени средства за разузнаване за определено време.

Тази характеристика на въоръжението при всички случаи трябва да се отчита при моделиране на бойните действия.

Скритостта и другите характеристики оказват силно влияние върху бойната ефективност на въоръжението.

Част втора

МЕТОДИ ЗА ИЗСЛЕДВАНЕ НА ОПЕРАЦИИТЕ

Раздел I

МРЕЖОВО ПЛАНИРАНЕ И УПРАВЛЕНИЕ

Глава първа

ВЪВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЯТА НА ГРАФИТЕ

1. ИСТОРИЧЕСКИ БЕЛЕЖКИ

Още от най-ранни времена хората са изобразявали графично условията или решенията на най-различни задачи. Астрономът бележи с точки планетите и с линии траекториите на тяхното движение. Физикът, изучавайки сложни електрически мрежи, означава на схемата точки с различни потенциали и показва със стрелки направлението на тока от точка към точка. Офицерът отбелязва на картата с точки дислокацията на отделните части, а с линии пътя на тяхното движение. Може да се дадат още много такива примери. При абстрахиране от конкретното съдържание, което се влага в точките и съединяващите ги линии, се получава графично изображение, съставено от множество точки и съединяващи ги линии. Изниква въпросът, подчинява ли се то на някои общи закономерности, притежава ли някакви общи свойства. Д. Кьониг предлага схематичното изображение, съставено от точки и линии, да се нарича **граф** и започва да разглежда графа като самостоятелен математически обект, независимо от неговото конкретно съдържание. Със своята монография от 1936 г. той полага началото на теорията на графите, която за кратко време получава широко приложение в най-различни области. Обаче исторически нейното възникване се отнася към момента, когато Ойлер решава задачата за кьонигсбергските мостове (1736 г.).

В настоящия труд са изложени най-основните въпроси от теорията на графите, за да се дадат на читателя елементарни познания, които да използува преди всичко при изучаване на въпросите, свързани с изследване на операциите във военното дело.

2. МНОЖЕСТВА И МНОГОЗНАЧНИ ИЗОБРАЖЕНИЯ

В теорията на графите, както и във всички съвременни математически теории, се използуват най-различни символи. Ще припомним само някои от теорията на множествата, които се използуват при разглежданите въпроси.

М н о ж е с т в о означава събрани обекти, независимо от какво естество, които се наричат негови е л е м е н т и (т о ч к и). Множествата се означават с главни латински букви A, B, X,. . ., а елементите им — с малки букви, a, b, x,. . . Множеството A, чиито елементи са a, b, c, d, се означава със символа $A = a, b, c, d$. Понякога едно множество може да се определи не само чрез изобразяване на неговите елементи, но и чрез указване на характеризиращото го свойство. Например множеството на простите числа може да се запише така: $A = \{x/x$ просто$\}$. Множеството се нарича п р а з н о, ако не съдържа нито един елемент. То се означава със символа $\varnothing$.

Ще използуваме означенията:

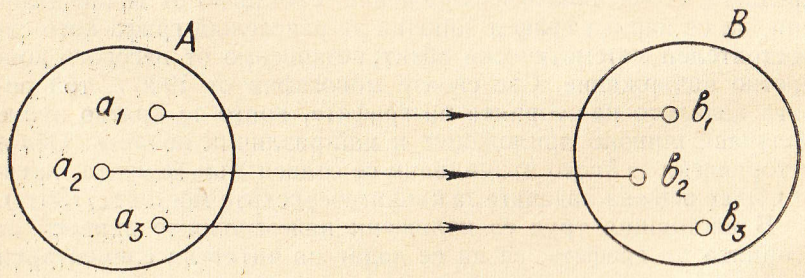
$a \in A$ — a е елемент на множеството A;

$a \notin A$ — a не е елемент на можеството A;

$A \subset B$ — множеството A се съдържа в множеството B или множеството A е п о д м н о ж е с т в о на множеството B.

Нека A и B са две дадени множества. Правилото Γ, задаващо връзката между елементите на можествата A и B, се нарича и з о б р а ж е н и е. Изходният елемент се записва непосредствено след буквата Γ, а съответният му елемент — след знака за равенство, и то в големи скоби.

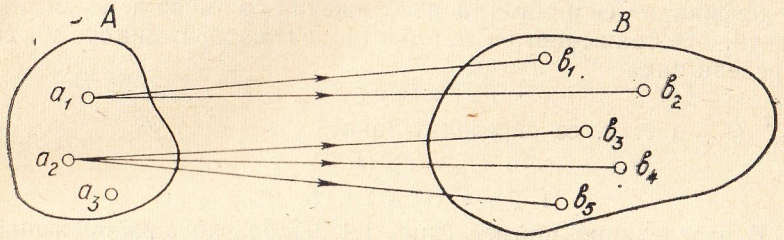
Изображение, при което на всеки елемент от изходното множество съответствува само един елемент от другото множество, се нарича е д н о з н а ч н о изображение (фиг. 1.1.1.).



Фиг. 1.1.1

$\Gamma a_1 = \{b_1\}$; $\Gamma a_2 = \{b_2\}$; $\Gamma a_3 = \{b_3\}$.

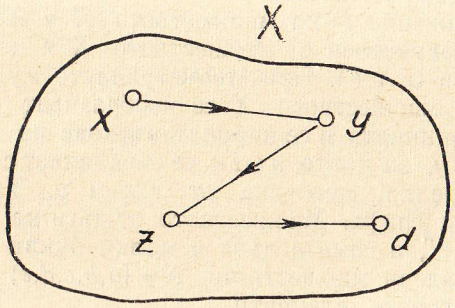
Изображение, при което на всеки елемент от изходното множество съответствува подмножество елементи от другото множество, се нарича м н о г о з н а ч н о изображение. При това на някой елемент от изходното множество може да съответствува празното множество (фиг. 1.1.2).



Фиг. 1.1.2

$\Gamma a_1 = \{b_1, b_2\}$; $\Gamma a_2 = \{b_1, b_2, b_3\}$; $\Gamma a_3 = \varnothing$.

Може да се разглеждат и изображения в едно и също множество, т. е. елементите на множеството X се съпоставят с елементи от същото множество. Пример за това изображение е даден на фиг. 1.1.3.



Фиг. 1.1.3

Множеството X се състои от елементите x,y,z,d. Показаната със стрелки връзка между тях позволява един да се смята за изображение на друг, т. е.

$\Gamma x = \{y\}$; $\Gamma y = \{z\}$; $\Gamma z = \{d\}$; $d = \{\varnothing\}$.

Освен тези изображения от първа степен може да се разглеждат и изобрежения от по-висока степен, напр. Γ^2, Γ^3 и т. н. Те се определят по следния начин:

$\Gamma^2_x = \Gamma(\Gamma x)$; $\Gamma^3_x = \Gamma(\Gamma^2_x)$ и т. н.

За множиството X елементът x има изображения:

$$\Gamma x=\{y\};$$
$$\Gamma_x^2=\Gamma(\Gamma x)=\{z\};$$
$$\Gamma_x^3=\Gamma(\Gamma_x^2)=\{d\};$$
$$\Gamma_x^4=\Gamma(\Gamma_x^3)=\{\varnothing\}.$$

Дефинират се и обратни изображения от първа и по-висока степен. Изображението Γ^{-1}, обратно на изображението Γ, се определя така:

$$\Gamma_y^{-1}=\{x/y\in\Gamma x\}.$$

Γ_x^{-2} Γ_x^{-3} и т. н. се определят така:

$$\Gamma_x^{-2}=\Gamma^{-1}(\Gamma_x^{-1})$$
$$\Gamma_x^{-3}=\Gamma^{-1}(\Gamma_x^{-2})\text{ и т. н.}$$

В разгледания пример (фиг. 1.1.3) обратните изображения се определят така:

$$\Gamma_d^{-1}=z;\ \Gamma_z^{-1}=\{y\};\ \Gamma y=\{x\};$$
$$\Gamma_d^{-2}=\{y\};\ \Gamma_z^{-2}=\{x\};\ \Gamma_d^{-3}=\{x\}.$$

3. ОСНОВНИ ПОНЯТИЯ ОТ ТЕОРИЯТА НА ГРАФИТЕ

Графът е определен, ако са дадени:

1 — непразно множество X;

2 — изображение Γ на множеството X в X.

Графът G, определен с множеството X и изображението Γ, се отбелязва $G(X,\Gamma)$. При геометричното му представяне елементите на множеството X се изобразяват с точки (или кръгчета) в равнината и се наричат **върхове** на графа. Двойката точки x и y, за които $y\in\Gamma x$, се съединяват с непрекъсната линия със стрелка, насочена от x към y. Тази линия се нарича **дъга** на графа. Множеството от дъги на графа $G(X,\Gamma)$ се означава с U, а самите дъги с малки букви u с индекси.

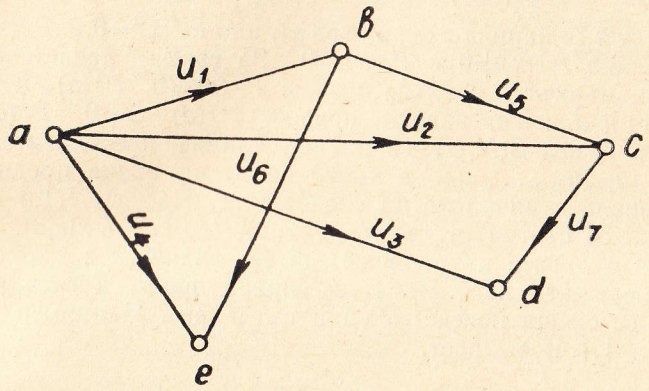
Ако са зададени множеството $X=\{a,b,c,d,e\}$ и изображението Γ на неговите елементи

$$\Gamma a=\{b,c,d,e\};$$
$$\Gamma_b=\{c,e\};$$
$$\Gamma_c=\{d\};$$
$$\Gamma_d=\{\varnothing\};$$
$$\Gamma_e=\{\varnothing\},$$

може да се построи графа $G(X,\Gamma)$, (фиг. 1.1.4).

Множеството от върхове на този граф е $X=\{a,b,c,d,e\}$, а множеството от дъги $U=\{u_1,u_2,u_3,u_4,u_5,u_6,u_7\}$.

Двата върха a и b се наричат гранични върхове за дъгата (a,b) и при това a се нарича начало, а b — край. Две дъги



Фиг. 1.1.4

u_1 и u_2 са **съединени**, ако са различни и имат обща графична точка, независимо дали тя е начало или край за дъгата u_1 или u_2. На фиг. 1.1.4 върховете a и b са гранични за дъгата u, а дъгите u_1 и u_2 са съседни.

Два върха x и y се наричат съседни, ако са различни и съществува дъга, която ги свързва. Пример за съседни върхове на фиг. 1.1.4 са a и b, b и c и др.

Връх, който не е съединен чрез дъги с други върхове на графа, се нарича **изолиран**. Например върхът f на фиг. 1.1.5 е изолиран.

Казва се, че дъгата u **излиза** от върха x, ако x е начало, и u **влиза** в него, ако е край. В двата случая дъгата u се нарича **инцидентна** на върха x, а върхът x — инцидентен на дъгата u.

Общият брой на дъгите, инцидентни на върха x, се нарича **степен на върха** x и се отбелязва с $P(x)$. За графа, представен на (фиг.1.1.4), броят на дъгите, влизащи във върха x, се нарича **полустепен на входа** и се отбелязва с $P^+(x)$, а броят на дъгите, излизащи от него, се нарича **полустепен на изхода** и

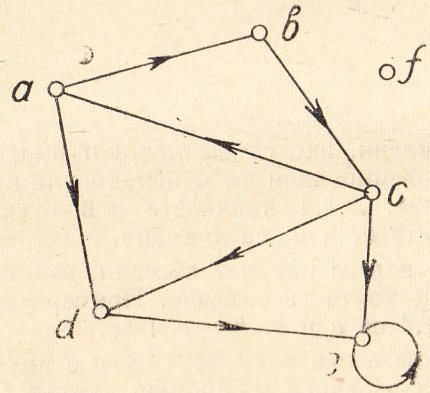
се отбелязва $P^-(x)$. За графа, изобразен на фиг. 1.1.4, имаме съответно:

$$P^+(c)=2;\ P^-(c)=1;$$
$$P(c)=P^+(c)+P^-(c)=2+1=3.$$

Върхът x се нарича **вход** на графа, ако $P^+(x)=0$, а $P^-(x)\neq 0$, и **изход**, ако $P^+(x)\neq 0$, а $P^-(x)=0$. За графа, представен на фиг. 1.1.4, върхът a е вход, понеже $P^+(a)=0$, $P^-(a)=4\neq 0$, а върховете d и e са изходи, понеже $P^+(d)=2\neq 0$, $P^-(d)=0$.

Път в графа $G(X,U)$ се нарича такава последователност от дъги $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$, в която краят на всяка предидуща дъга съвпада с началото на следващата. На фиг. 1.1.4 пътят от a до d се състои от дъгите $U_1(a,b)$, $U_5(b,c)$ $Ux(c,d)$.

Освен с дъгите пътят може да се означи и с върховете, които се срещат в него. Пътят се нарича **прост**, когато никоя дъга не се среща повече от един път в него. Например пътят abd (фиг. 1.1.4) е прост.



Фиг. 1.1.5

Път, в който нито един връх не се среща два пъти, се нарича елементарен. Когато пътят минава през всички върхове на графа и при това само по един път, той се нарича **хамилтонов**. Път, който съдържа всички дъги на графа и при това всяка дъга само по веднъж, се нарича **ойлеров**.

Дължина $l(M)$ на пътя $M=(u_1,u_2,\ldots,u_n)$ се нарича броят на дъгите, участвуващи в пътя, т. е. $l(M)=n$.

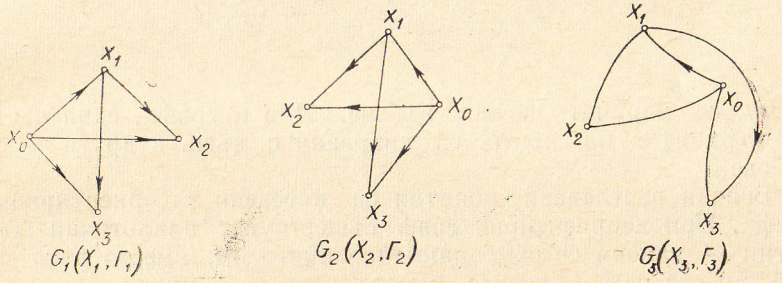
Дъгата (x,y) се нарича затваряща, ако отделянето ѝ не довежда до анулирането на пътя от x в y. На фиг. 1.1.4 затварящи дъги са $u_2(a,c)$, $u_3(a,d)$ и $u_4(a,e)$.

Контур се нарича път, започващ и завършващ в един и същ връх. Контурът може да е съставен само от една дъга, т. е. от дъга, на която началото и краят съвпадат $U(x,x)$. В графа на фиг. 1.1.5 пътят (a,b,c,a) е контур, съставен от 3 дъги, а пътят (c,e) е контур, съставен от една дъга.

Контурът също може да е **прост, съставен, елементарен, хамилтонов** или **ойлеров**.

4. ВИДОВЕ ГРАФИ

Един граф може да се изобрази по различен начин, т. е. може по различен начин да се разполагат върховете му в равнината и да се съединят с произволни линии, не непременно прави. Така например трите графа, представени на фиг. 1.1.6, изразяват по същество един и същ граф, тъй като в тях се съдържа една и съща информация. Такива графи се наричат **изоморфни**. Те имат един и същ брой върхове и изображенията им съвпадат.



$G_1(X_1,\Gamma_1)$; $G_2(X_2,\Gamma_2)$; $G_3(X_3,\Gamma_3)$;

$X_1=X_2=X_3=\{x_0,x_1,x_2,x_3\}$;

$\Gamma_1=\Gamma_2=\Gamma_3$;

$\Gamma_1 x_0=\{x_1,x_2,x_3\}$;

$\Gamma_1 x_1=\{x_2,x_3\}$,

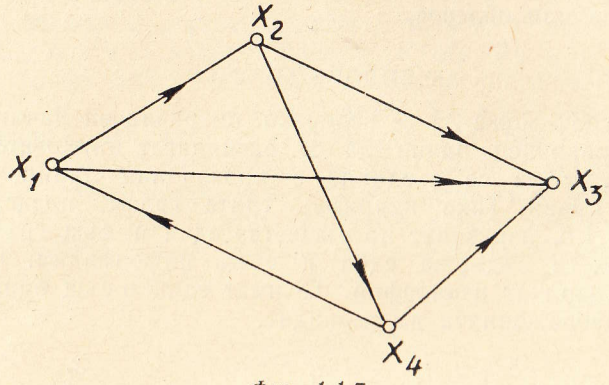
$\Gamma_1 x_2=\{\varnothing\}$; $\Gamma_1 x_3=\{\varnothing\}$.

Фиг. 1.1.6

Понятието изоморфност има голямо значение за преобразуването на графите и за представянето им в удобен вид.

Графите може да се разглеждат с отчитане или без отчитане ориентацията на линиите, които съединяват върховете

им. Ако върховете на един граф са съединени с ориентирани линии, той се нарича **ориентиран**, а линиите — негови дъги. Ако върховете на графа са съединени с линии, без да е указана тяхната ориентация, той се нарича **неориентиран**. В този случай обикновено линиите, които свързват върхове-



Фиг. 1.1.7

те му, се наричат негови ръбове. Има и графи, една част от върховете на които са свързани с дъги, а друга — с ръбове.

Всички разгледани понятия са въведени за ориентирани графи. При неориентиран граф съществуват аналогични понятия — изменя се само наименованието им: вместо дъга — **ръб**, вместо път — **верига**, вместо контур — **цикъл**.

Граф $G(X,U)$, който е съставен само от изолирани върхове, т. е. от върхове, несъединени с никакви дъги, се нарича **нулев**. За него $P^+(x_i)=P^-(x_i)=0$ за всяко $x_i \in X$. Ако степените на всички върхове на графа са еднакви, той се нарича **еднороден**. На фиг. 1.1.7 е показан еднороден граф със степени на върховете, равни на три.

Нулевият граф винаги е еднороден, тъй като степените на всичките му върхове са равни на нула.

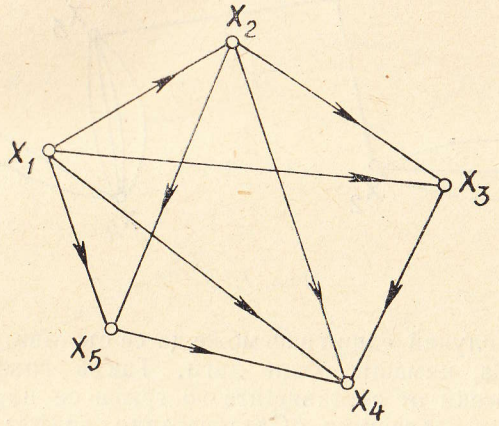
Граф $G(X,U)$, в който всяка двойка върхове е съединена с дъга, се нарича **пълен**. Най-прост пример за пълен граф е многоъгълник с n върхове, в които са прокарани всички диагонали (фиг. 1.1.8).

Тъй като от всеки връх на пълния граф излизат $n-1$ дъги, към останалите $n-1$ върха степените на всички върхо-

ве на пълния граф са еднакви. Следователно пълният граф е еднороден. Обратното не винаги е вярно.

Броят на дъгите (ръбовете) на пълния граф е $U=\frac{1}{2}nr$, където r е степен на върховете.

Може да се докаже, че в пълния граф винаги има хамилтонов път.



Фиг. 1.1.8

Граф, в който поне два съседни върха са съединени с повече от една дъга (ръб), се нарича **мултиграф**. Най-голямото число дъги (ръбове), съединяващи съседни върхове в него, се нарича негова кратност. Самият мултиграф в общия случай се нарича ***p*-граф**, където p е кратността на дъгите. Така графът на фиг.1.1.9. е 4-граф.

Граф $G(X,U)$, в който два съседни върха са съединени само с две противоположно ориентирани дъги, се нарича **симетричен** (фиг. 1.1.10).

За симетричния граф е в сила зависимостта:

ако $(x_1,x_2) \in U$, $(x_2,x_1) \in U$.

Граф $G(X,U)$ без дъга от вида $U(x,x)$, в който всяка двойка съседни върхове са съединени само в едно направление, се нарича **несиметричен** (фиг.1.1.11.)

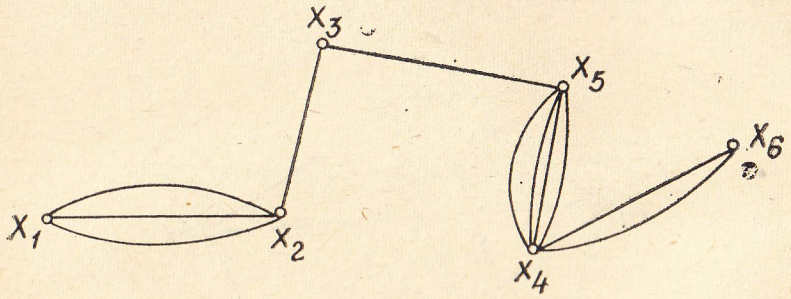
За несиметричния граф е в сила зависимостта:

ако $(x_1,x_2) \in U$, $(x_2,x_1) \notin U$.

Граф, който може да се изобрази в равнината по такъв

начин, че никои от ръбовете му да на се пресичат в точки, различни от върховете, се нарича **плосък**.

Графът $G(X,U)$ се нарича **свързан**, ако всеки два негови върха може да се свържат поне с една верига, а **силно свързан**, ако те може да се свържат поне с един път.



Фиг. 1.1.9

В общия случай един граф може да се състави от няколко отделни графа, нямащи общи дъги. Такъв граф се нарича **несвързан**. Всеки от съставящите го графи се нарича негова компонента на свързаност. Следователно графът е свързан (силно свързан) само в случая, когато е съставен от една единствена компонента на свързаност. Така например графът на фиг. 1.1.12 е несвързан, т. е. съставен е от три компонента на свързаност.

Неориентираният свързан граф $G(X,U)$, който има поне два върха, се нарича **граф-дърво**, ако не съдържа цикъл. От това определение следва, че за всеки два върха на графа-дърво съществува само една съединяваща ги верига (фиг. 1.1.13.)

Върховете, инцидентни само на едно ребро на графа-дърво, се наричат **висящи**. Всеки граф-дърво има най-малко два висящи върха.

От определението на графа-дърво следва, че броят на ръбовете му е с единица по-малък от броя на върховете му, т. е.

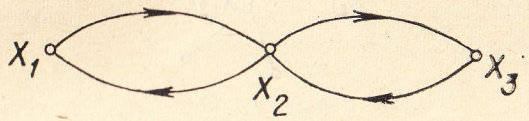
$$P=n-1.$$

Ако графът $G(X,U)$ е несвързан и не съдържа цикли, всяка негова свързана компонента е граф-дърво. Като се използува терминологията, приета в ботаниката, такъв граф често пъти се нарича граф-гора.

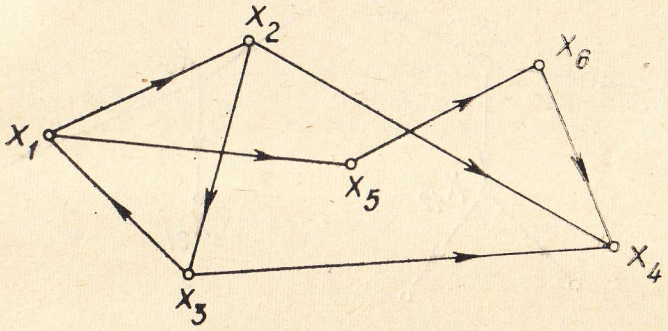
Графът-гора, който има k компоненти и n върхове, има $n-k$ ръба, т. е.

$$P=n-k.$$

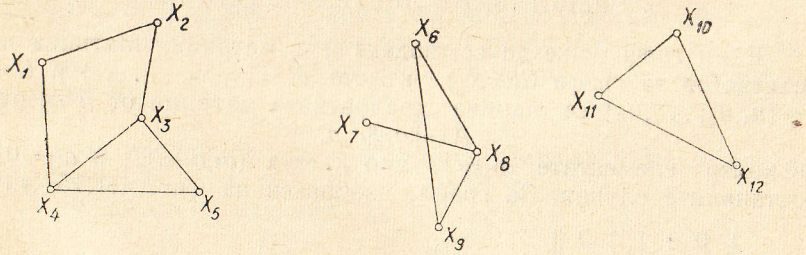
Графът-дърво може да е и ориентиран. Този негов връх, на който $P^+(x)=0$, се нарича **корен** на графа-дърво. С други думи, от корена дъгите само излизат, но нито една не влиза в него. На фиг. 1.1.14 е показан ориентиран граф-дърво с корен връх.



Фиг. 1.1.10

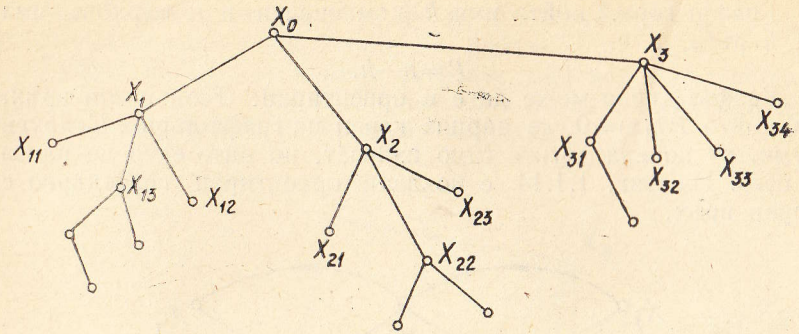


Фиг. 1.1.11

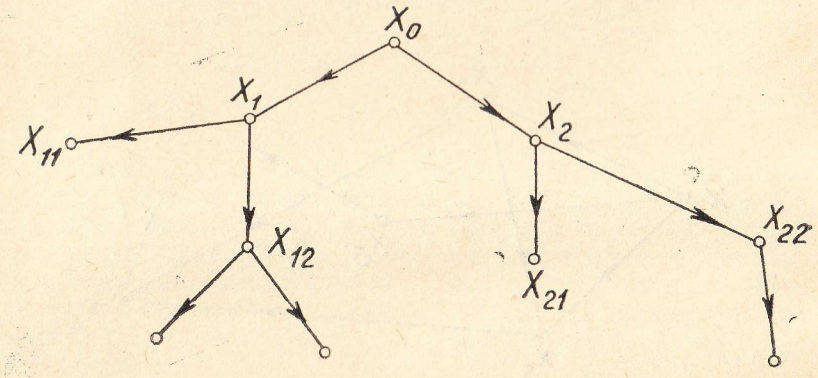


Фиг. 1.1.12

Ако броят на върховете на един граф е краен, той също се нарича **краен**, а в противен случай — **безкраен**.



Фиг. 1.1.13



Фиг. 1.1.14

5. ПРЕДСТАВЯНЕ НА ГРАФ С МАТРИЦА

Един граф може да се зададе и с матрица. **Матрица на съседство** за графа $G(X,U)$, където $X=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ и $U=\{u_1,u_2,\ldots,u_n\}$ се нарича квадратната матрица от n-ти ред

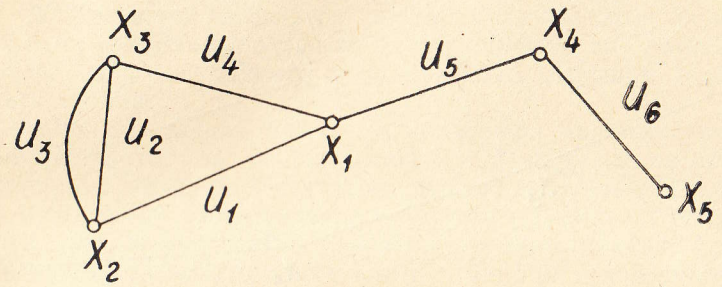
$$A=\|a_{ij}\|n,n,$$

в която елементите $a_{ij}=1$, ако дъгата $(a_i,a_j)\in U$, и $a_{ij}=0$ в останалите случаи. За графа, изобразен на фиг. 1.1.15, тя е

$$A=\left\|\begin{array}{ccccc} 0&1&1&1&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0 \end{array}\right\|$$

Графът може да се зададе и с така наречената **матрица на инцидентност**. За графа $G(U,X)$, където $X=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ и $U=\{u_1,u_2,\ldots,u_n\}$, тя е правоъгълна матрица

$$P=\|b_{ik}\|m,n,$$



Фиг. 1.1.15

където $b_{ik}=1$, ако дъгата $u_к$ излиза от върха x_i, $b_{ik}=-1$, ако дъгата $u_к$ влиза в a_i, $b_{ik}=0$ в останалите случаи. Матрицата на инцидентност за графа, изобразен на фиг. 1.1.15, е

$$P=\left\|\begin{array}{cccccc} 1&0&0&1&1&0\\ -1&-1&1&0&0&0\\ 0&1&-1&-1&0&0\\ 0&0&0&0&-1&-1\\ 0&0&0&0&0&1 \end{array}\right\|$$

6. ТРАНСПОРТНА МРЕЖА

Мрежа се нарича краен граф $G(XU)$, $X=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ и $U=\{u_1,u_2,\ldots,u_n\}$ без контур, ориентиран в едно общо направление от върхове V, които са негови входове, към върхове W — изходи. За всеки връх V полустепените на входа и за всеки връх W полустепените на изхода са съответно равни на нула, т. е.

$$P^+_{(v)}=0 \text{ и } P^-_{(w)}=0.$$

Графът на фиг. 1.1.16 представлява мрежа с два входа и три изхода $W=x_6,x_1,x_8$.

За входовете и изходите на мрежата

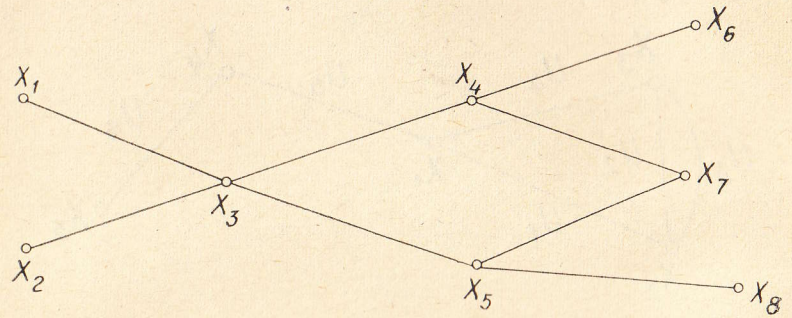
$$U^+_v=\varnothing \quad U^-_w=\varnothing,$$

където:

U^+_v — множество дъги, влизащи във върховете V;

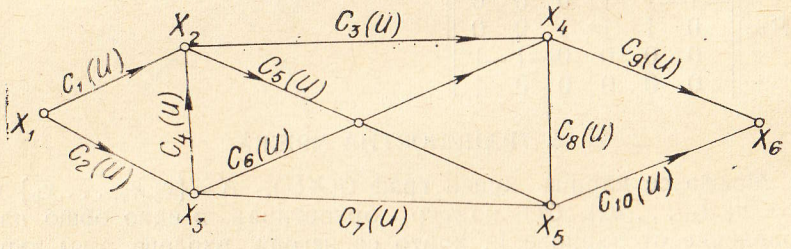
U^-_w — множество дъги, излизащи от върховете W.

Мрежа, която се характеризира с това, че има само един вход, има само един изход, на всяка нейна дъга съответствува цяло положително число $G(U) \geqslant 0$, наречено пропускателна способност на дъгата, се нарича **транспортна мрежа.**



Фиг. 1.1.16

Графът, който изобразява транспортната мрежа (фиг. 1.1.17), се означава с $G(X,U,C(u))$. $V=\{x_1\}$ е входът, а $W=\{x_6\}$ — изходът на транспортната мрежа.



Фиг. 1.1.17

С транспортната мрежа е тясно свързано понятието **поток,** под което се разбира функцията $\varphi(u)$, удоволетворяваща следните условия:

1. $\varphi(u) \geq 0$, където $u \in U$;
2. $\varphi(u \geq C(u)$;
3. $\sum_{u \in Ux_1} \varphi(u) - \sum_{u \in U_{xi}^{+}} \varphi(u) = 0$, $(x_i \neq V,\ x_0 \neq W)$

Функцията $\varphi(u)$ може да се разглежда като количество вещество, протичащо за единица време по дъгата $U(x,y)$ от x към y. То не превишава пропускателната способност на дъгата и във всеки връх x, различен от входа V и изхода W, пристигащото вещество е равно на излизащото. Условието (3) по същество е условие за съхраняване на потока. То показва, че в междинните върхове не се създават и не изчезват потоци.

Основната задача тук е да се намери максималният по големина поток за дадена мрежа. Тя може да се реши с алгоритъма на Форд-Фалкерсон, чиято идея е тясно свързана със специфични за теорията на графите понятия. Този алгоритъм дава възможност за решаване на много задачи, близки до задачата за максималния поток — например намирането на най-краткия път по транспортната мрежа и обширния клас задачи на мрежовото планиране. При тях транспортната мрежа може да се интерпретира така: тя изобразява проект, съставен от отделни операции, на чието изпълнение са наложени някакви технологични ограничения. Всеки връх се нарича събитие. Всяка дъга $u_к$ на мрежата изобразява някаква операция, а числото $C_к(u)$ — времето за нейното изпълнение. Събитията x_1 и $x_п$ са съответно началото и краят на изпълнението на проекта.

Много задачи от мрежовото планиране може да се решат с помощта на методи, следващи от алгоритъма на Форд-Фалкерсон. Обаче зададената интерпретация на транспортната мрежа води до редица нови задачи, които изискват създаване на нови методи. Такива са например задачите за минимизиране на времето за изпълнение на даден проект при различни условия, свързани с ограничени постъпления на ресурси.

Глава втора

МРЕЖОВО ПЛАНИРАНЕ И УПРАВЛЕНИЕ

1. СЪЩНОСТ И ХАРАКТЕРИСТИКА НА МЕТОДА

Един от главните проблеми на теорията на сложните системи от рода на военното дело е построяването на математически модел на операцията. Сложността се заключава в това, че моделът, от една страна, трябва достатъчно пълно да описва процесите, които реално протичат при изпълнението на операцията, и в този смисъл да е достатъчно сложен (пълен), а, от друга, да е достатъчно прост и нагледен и главно да дава резултатите във вид, достъпен и удобен за ползуване.

Един от най-универсалните, достъпни и високоефективни методи за моделиране и изследване на операциите въобще и на военните в частност е методът на мрежовото планиране и управление. Той е предназначен за количествена оценка на целесъобразността на дадено решение или план и степента на съответствието му с поставената задача. В този смисъл той е мощно средство в ръцете на командирите и щабовете за анализ, планиране, ръководство и контрол на сложни процеси, които налагат тясно съгласуване и взаимодействие при решаването. Поради това за кратък период мрежовото планиране и управление се утвърди като един от основните методи за оперативно проучване.

По своята същност приложението на метода във военното дело представлява внедряване на автоматизирана кибернетична система за управление, в която обект за управление е колектив от хора (части и подразделения), въоръжени с мощна бойна техника, разполагащи с определени материални и други ресурси, изпълняващи комплекс от операции, насочени за постигане на определен краен резултат. В случая мрежовият метод дава възможност за пълно съгласуване на действията с оглед най-ефективното използуване на силите и средствата.

Натрупаният опит както в чужбина, така и у нас, колкото и скромен да е той, показва, че използуването на мрежови графици дава голям положителен ефект във всички области на човешката дейност: икономика, строителство, научноизследователска работа, административно-управленческа дейност и др.

Във военното дело мрежовото планиране и управление може да намери много широко приложение. Няма дейност на войските и щабовете, която да не може да се планира и ръководи с помощта на мрежов график, но за сега като най-характерни и перспективни области за неговото приложение се очертават:

— планирането на бойната подготовка;

— планирането и оптимизирането на плановете за бойна готовност и мобилизационните планове;

— моделирането и ръководството на военното строителство;

— моделирането и оптимизирането на календарните планове на щабовете, отделите и службите;

— планирането на учения, проверки, конференции и др.;

— планирането и ръководството на научноизследователската работа;

— планирането на разчетите при обслужване на бойната техника;

— организирането на взаимодействието между различните родове войски;

— моделирането и ръководството на работата на партийно-политическия апарат и партийно-политическото осигуряване на действията на войските;

— производството на различни военни изделия;

— материално-техническото снабдяване на войските и др.

Най-характерни преимущества на мрежовото планиране и управление пред другите методи се очертават следните:

— планираният процес се изразява с мрежов модел, който отразява взаимната връзка между работите и тяхната логическа и технологична последователност. Поради това не може да се пропуснат някои работи или пък да се включат други, несвързани с дадената операция;

— точно се определя продължителността на планираната операция и на отделните работи;

— точно се определят основните работи и най-чувствителните места, които могат да задържат изпълнението на цялата операция;

— правилно и лесно се разпределят времето и ресурсите при планирането на операцията;

— за разлика от другите методи се разкриват вътрешните

резерви от време и ресурси, точно се определя техният размер и се набелязват пътища за използването им;

— моделира се даденият процес, след което се проиграва и по такъв начин се отстраняват всички слабости в предварително съставения план, т. е. изпълнява се най-изгодният вариант, без да се губят сили и средства за експериментиране.

Освен това едно от главните преимущества на мрежовото планиране е неговата универсалност. Редица методи на математическото планиране например дават като краен резултат направо оптимално решение — линейното програмиране, целочисленото програмиране и др., но те намират приложение само в определени области, докато с помощта на мрежов график може да се моделират и изследват всякакви операции. Във връзка с това е необходимо да се обърне внимание за предпазване от излишни увлечения и забежки. Трябва да се има пред вид, че мрежовото планиране се използува за изследване на сложни и непознати операции или на операции, които се нуждаят от строго съгласуване и координиране. Прилагането му за прости и познати дейности с единствената цел да се демонстрира внедряването на нови методи е не само безполезно, но в някои случаи и вредно, защото води до вулгаризиране, а оттам и до компрометиране на този толкова перспективен и полезен метод.

2. ОСНОВНИ ПОНЯТИЯ И ПРАВИЛА ЗА ПОСТРОЯВАНЕ НА МРЕЖОВИЯ МОДЕЛ

Основните понятия, които се използуват в метода на мрежовото планиране и управление, са следните:

Р а б о т а. Използува се в по-широк смисъл и може да има следните значения:

а) д е й с т в и т е л н а р а б о т а — производствен или някакъв друг процес, за изпълнението на който са необходими време и ресурси;

б) ч а к а н е (и з ч а к в а н е) — необходим от технологична гледна точка процес, при чието изпълнение се изисква само време, но не и ресурси (например втвърдяване на бетона, спадане на радиацията, почивка на личния състав и др.);

в) ф и к т и в н а р а б о т а (зависимост) — използува се за показване на логическата (технологична или организационна) зависимост между две и повече работи и не изисква разход нито на време, нито на ресурси.

Действителните работи и изчакването се изобразяват върху

мрежовия график с плътни стрелки, а фиктивните — с пунктирани. Стрелките не са вектори. Поради това те не се нанасят мащабно, а с произволна дължина, конфигурация и направление, но общо ориентирани от ляво на дясно. На тях се надписват наименованието на работата, номерът ѝ или шифърът, а отдолу — времето, необходимо за нейното изпълнение, в съответните единици. В някои случаи може да се начертае и мащабен мрежов график. Тогава дължината на работите се определя от тяхната хоризонтална проекция, а конфигурацията и направлението пак са произволни.

С ъ б и т и е. Понятието събитие е междинен или окончателен резултат от изпълнението на една или няколко работи, които позволяват да се пристъпи към изпълнението на следващите. У нас е възприето събитията да се изобразяват с кръгчета и да се номерират.

Всяка работа може да свърже само две събития. Събитието, от което започва тя, се нарича начално, а това, в което завършва — крайно. Дадено събитие е начално за всички следващи го работи и крайно за всички предшествуващи.

Всяка работа се определя от номерата на нейното начално и крайно събитие. В най-общия случай шифърът ѝ се записва с два индекса i и j, първият от които е номерът на началното ѝ събитие, а вторият — крайното. Във всеки мрежов график има само едно събитие, от което започват работи, без да са завършили преди това в него други. То определя началото на цялата операция и се нарича „и з х о д н о“.

Във всеки мрежов график също така има само едно събитие, в което завършват работи, но не започват от него други. То определя края на цялата операция, т. е. постигането на набелязаната цел, и се нарича „з а в ъ р ш в а щ о“.

Всички останали събития се наричат междинни.

П ъ т. Понятието път в мрежовия модел означава всяка непрекъсната последователност от работи и събития, в която крайното събитие на всяка работа съвпада с началното събитие на следващата.

Пътищата биват следните видове:

— предшествуващ дадено събитие — започва от изходното събитие и завършва в даденото;

— следващ дадено събитие — започва от даденото събитие и завършва в завършващото;

— пълен — свързва изходното със завършващото събитие.

Във всеки мрежов график винаги има по няколко пълни пътища.

Дължината на даден път се определя от сбора на работите, от които е съставен.

Най-продължителният от пълните пътища в мрежовия модел се нарича критичен. Работите, които лежат на него, както и събитията, които ги ограничават, също се наричат критични.

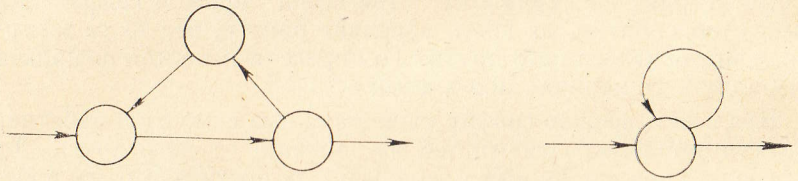
Продължителността на критичния път е равна на времето, необходимо за изпълнението на цялата операция. Поради това той е най-важният параметър на мрежовия модел.

Мрежовият график може да има няколко критични пътища, които са абсолютно равни. Критичните работи се чертаят с червен цвят или с двойна линия.

Пътищата, които са по-кратки, но близки по време до критичния, се наричат подкритични. Те трябва да се имат пред вид при оптимизацията на мрежовия график по време.

При построяването на мрежовия график е необходимо да се спазват някои основни правила:

1. Всички събития с изключение на завършващото трябва да имат следващи работи, т. е. от тях трябва да започват една или повече работи. Събития, които нямат следващи работи, се наричат „висящи".



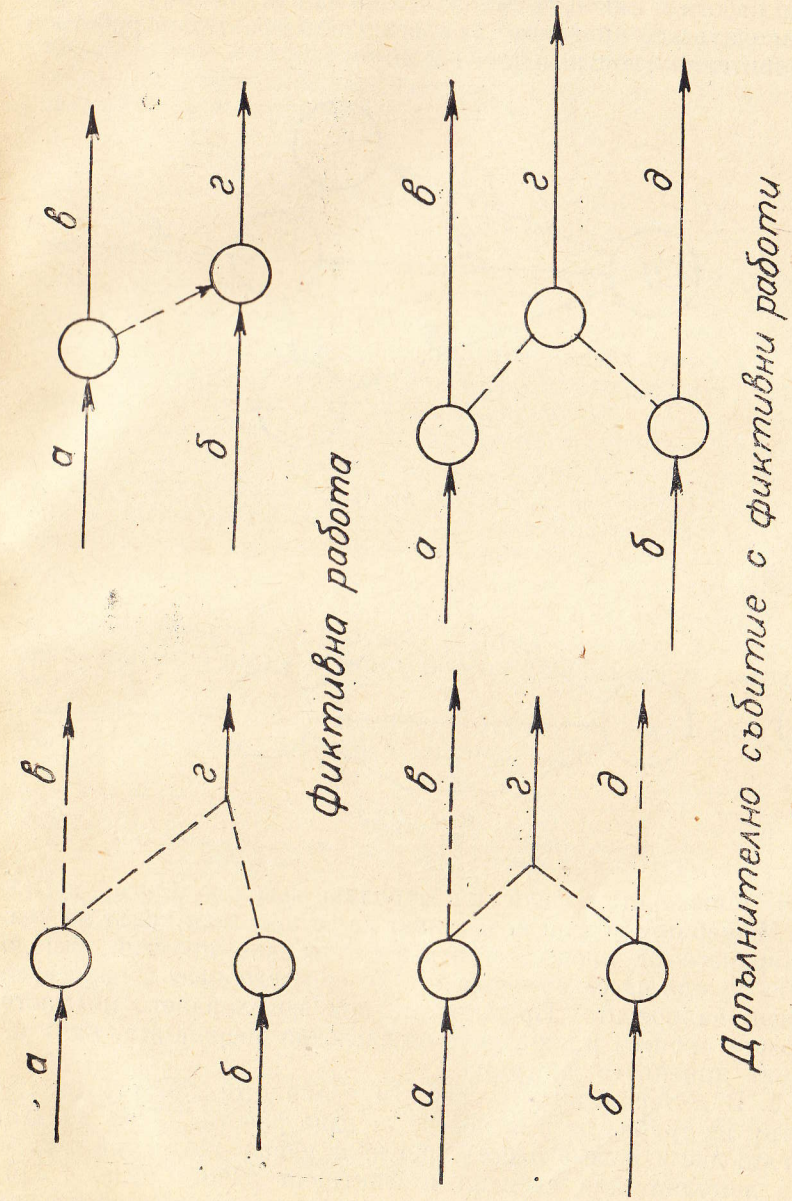
Фиг. 1.2.1

Освен това всички събития с изключение на изходното трябва да имат предшествуващи работи. Тези, които нямат, също се наричат „висящи".

Наличието на висящи събития показва, че е нарушена технологичната или логическата връзка в мрежовия график. Това е недопустимо.

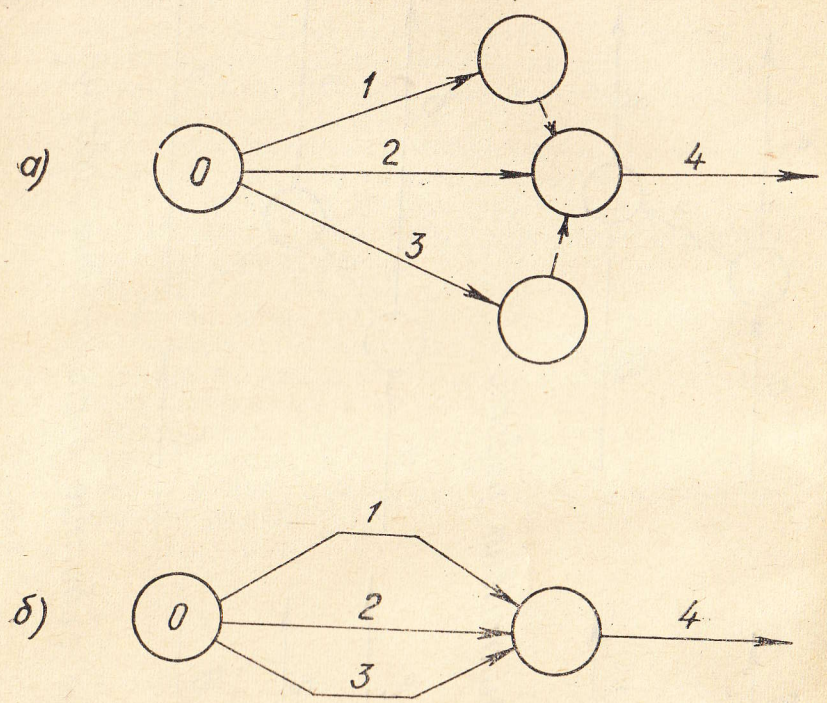
2. В мрежовия модел не трябва да има затворени контури и примки, т. е. не трябва да има нито един път, който да се връща повторно в едно и също събитие (фиг. 1.2.1).

3. Ако за дадена работа е необходимо изпълнението на ня-



Фиг. 1.2.2

колко работи и някои от тях са нужни за изпълнението на други използува се правилото за въвеждане на фиктивни работи и допълнителни събития (фиг. 1.2.2).



Фиг. 1.2.3

4. Мрежовите модели се построяват мащабно или произволно. Мащабните модели позволяват да се проследи ходът на реализирането на процеса и отразяват всички промени, без да става нужда да се пречертават. Те се построяват в определен мащаб на времето. Прилагат се при моделирането на много сложни процеси и изразяват по-нагледно операцията, като заменят линейната диаграма.

5. В литературата се среща и правилото: „Между две събития не трябва да има повече от една работа.“ Това налага, когато две и повече работи протичат паралелно, да се въвеждат допълнителни събития и фиктивни работи (фиг. 1.2.3). За да не се усложнява мрежовият график и да не се претрупва

с излишни фиктивни работи и допълнителни събития, може да се допусне тези работи да се чертаят паралелно, както е показано на фиг. 1.2.3,б. В тези случаи трябва да не се забравя при намиране на сроковете на събитията да се работи с тази работа, която има най-продължително време. По това правило е разработена и програмата за ЕИМ „Минск-22“.

3. ИЗГОТВЯНЕ НА ЗАДАНИЕ (ОПИСАНИЕ) НА ОПЕРАЦИЯТА

За построяване на мрежовия модел е необходимо да се подготвят данни, т. е. да се изготви задание (описание) на операцията. То представлява пълен списък на всички работи, които следва да се изпълнят, за да се реши цялата операция.

Съставянето на задание (описание) на операцията е най-отговорната дейност в мрежовото планиране, от качественото решаване на която зависят целият по-нататъшен ход и крайният резултат от изследването. Поради това тя винаги трябва да се възлага на специалист или на група специалисти, които познават в подробности същността на операцията. Не е задължително те да са специалисти по мрежово планиране. Достатъчно е да съставят пълно и вярно описание на операцията, да участвуват при анализа на резултата и оптимизирането на мрежовия график по време и ресурси, когато се наложат изменения в предварително разработеното задание (описание) на операцията.

У нас е прието заданието (описанието) на операцията да се съставя във вида, посочен в таблица 1.2.1.

Таблица 1.2.1.

№ по ред	Наименование на работите	Продължителност (t)	Номер на непосредствено предшествуващите работи	Ресурси

В таблицата се записват всички работи, от които се състои моделираният процес. Не е задължително да се подреждат в някаква технологична или логическа последователност. На всяка работа се дава номер, който се записва в графа 1.

Освен номера и наименованието се нанасят още:

Продължителността на работите (в графа 3). Единицата мярка за времето се избира от съставителя на заданието в зависимост от общата продължителност на операцията и на отделните работи, от необходимата точност, която се търси. За една операция може да е необходима единица мярка в секунди, а за други е достатъчна в дни или дори в седмици (например в строителството).

Трябва да се има пред вид обаче, че е задължително в един и същ мрежов график да се използува само една единица мярка за времето.

Много важно е да се определи точно времето, за което ще се изпълни всяка работа. Умишленото увеличаване или намаляване е абсолютно недопустимо, тъй като от точността на определеното време зависи цялата по-нататъшна точност на мрежовия график. Затова времето трябва да се определя от специалисти въз основа на натрупания опит, като използуват съответните нормативи и справочници. При нужда може да се направят и по-подробни разчети.

Начинът за определяне на продължителността на работите за различните операции е също различен и по това мрежовите графици се подразделят на две основни групи: определени (детерминирани) и вероятностни (стохастични).

Определени (детерминирани) са тези, за които може сравнително точно да се определи времето за изпълнение на отделните работи. При това се използуват наличните нормативи и справочници, в които е отразен дългогодишният опит за изпълнението им при различни условия. Работите, за които няма нормативи, се определят с помощта на разчети или по опитен път.

Вероятностни (стохастични) графици са тези, за които предварително не може да се определи продължителността на отделните работи, тъй като върху изхода им оказват влияние случайни събития, които предварително не може да се предвидят.

Времето като параметър на управлението винаги се отчита на мрежов график. Наред с него обаче може да се управлява и по други параметри, като стойност, ресурси, технико-икономически и оперативно-тактически показатели. Тези параметри може да се комбинират различно в зависимост от характера на операцията и търсената ефективност.

Данните, които определят мястото на работата в мрежовия модел, се нанасят в графа 4. Това се постига, като се дават непосредствено работите,

които по технологични или организационни съображения предшествуват изпълнението на разглежданата работа, т. е. работите, които задължително трябва да се завършат, за да може непосредствено след тях да започне нейното изпълнение. За тези работи, с които започва операцията, в графа 4 се записва нула.

В литературата се среща и друг метод, при което се записват непосредствено следващите работи. У нас е възприет първият.

За да се попълнят правилно данните в графа 4, необходимо е съставителят на заданието (описанието) на операцията предварително да си изясни добре следните въпроси:

— кои работи трябва да се завършат преди започването на дадената работа, т. е. работите, които я предшествуват;

— кои работи могат да започнат след нейното завършване, т. е. работите, които я следват;

— кои работи могат да се изпълняват едновременно с нея т. е. паралелните.

Ресурсите, които са необходими за изпълнението на всяка работа, се нанасят в графа 5. Ако се използуват различни ресурси и се налага оптимизирането на всеки от тях, те се нанасят в отделни графи. Тогава след графа 4 трябва да има толкова графи, колкото вида ресурси се използуват: например графа 5 — човекочаса, графа 6 — машиночаса, графа 7 — парични средства и др. В някои случаи необходимите човешки или машинни ресурси се подразделят по специалности.

Не винаги е възможно заданието да се състави веднага в окончателен вид. Често пъти при построяването на мрежовия модел се нанасят поправки, които дават отражение и върху описанието (заданието) на операцията.

Примерно задание (описание) на операцията „построяване на дълговременно огнево съоръжение“ може да има вида, показан на таблица 1.2.2.

Таблица 1.2.2

№ по ред	Наименование на работите	Продължителност на работите, часове	№ на непосредствено предшествуващите работи	Необходими човекочаса
1	Избиране на мястото на ДОС по карта	5	0	3
2	Избиране на мястото на ДОС на местността	10	1	3
3	Проектиране на ДОС	30	4,5	3
4	Избиране на височината на нулевата линия	5	2	3
5	Избиране на секторите за стрелба	5	2	3
6	Прокарване на път до мястото за построяване на ДОС	40	37	30
7	Осигуряване на транспорт	20	0	1
8	Доставяне на пясък	32	6,7	5
9	Доставяне на чакъл	34	6,7	5
10	Доставяне на цимент	30	6,7	2
11	Доставяне на вода	20	6,7	2
12	Доставяне на бетонобъркачка	10	6,7	2
13	Трасиране на съоръжението	5	3	5
14	Доставяне на бетонно желязо за арматура	15	6,7	5
15	Доставяне на горена тел	15	6,7	1
16	Доставяне на материали за кофраж	10	6,7	4
17	Монтаж на кофража и арматурата на каземата	24	16,17	4
18	Монтаж на арматурата в основите	24	16,17	4
19	Приготвяне на бетона и наливане на основите	20	8, 9,10,11,12	
20	Наливане на бетона в стените	80	18, 19	6
21	Подготвяне на изкопа за фундамента	28	13	4
22	Втвърдяване на бетона	120	20	0
23	Монтиране на оръжията	25	24	4
24	Снемане на кофража	12	22	4
25	Монтиране на защитната врата	15	24	2
26	Монтиране на защитните устройства на амбразурите	10	38	2
27	Монтиране на ФВУ	10	38	2
28	Разчистване на обзора и обстрела	35	23	6
29	Почистване на площадката от строителни материали	15	39	4
30	Монтиране на ДОС	20	98, 22, 41	6
31	Устройване на телена мрежа около ДОС	25	32, 33	16
32	Доставяне на бодлива тел	12	7, 37	4
33	Доставяне на колове	12	6, 37	4
34	Стрелба от ДОС	10	30, 31, 36	2
35	Измерване на разстоянието до ориентирите	6	23	4
36	Съставяне на огнева картичка на ДОС	5	35	2
37	Подготовка на строителната площадка	10	13	12
38	Монтиране на херметичната врата	10	25	2
39	Записване на съоръженията	10	26	4
40	Монтиране на отоплителната инсталация	20	27	2
41	Изкопаване на ходове за съобщения за свързване на ДОС с отбраната	30	22	20

Забележка:

1. Приетите норми за време и ресурси са примерни.
2. Останалите ресурси са в достатъчно количество и оптимизация по тях не се предвижда.

4. ПОСТРОЯВАНЕ НА МРЕЖОВИЯ МОДЕЛ

За построяване на мрежовия модел е използуван горният пример — планиране на построяването на ДОС (таблица 1.2.2.), като приемем следните ограничения:

— общото време за строежа е 27 дни;

— част от работите може да се извършват на две или три смени, като при една и две смени работният ден е 10 часа, а при три смени — 8 часа;

— за строежа се предвижда личен състав до 35 души на смяна;

— снабдяването със строителни материали, транспортни и инженерни машини е осигурено;

— складовете са отдалечени на 15—20 km от мястото, където се строи ДОС.

При построяването на мрежовия график на практика не се взема под внимание конкретното съдържание на работите, а се манипулира с техните номера и с номерата на непосредствено предшествуващите ги работи, т. е. с данните, записани в графа 1 и 4 на заданието.

За построяване на мрежовия модел са разработени няколко алгоритъма. Един от тях има следното съдържание:

Първи етап. Определяне на началните и крайните събития на работите

На всяка работа се определя началното събитие с номер, равен на номера на непосредствено предшествуващите го работи, зададени в графа 4 на таблица 1.2.1, и се попълва графа 3 на таблица 1.2.3. След това се задава крайното събитие с номер, който има самата работа. За да могат всички работи, с които завършва процесът, да се слеят в едно завършващо събитие, присвоява им се крайно събитие с номер, какъвто няма нито едно крайно събитие на останалите работи. На практика, ако процесът се състои от n работи, на завършващото събитие се дава номер n+1. Работите, които ще имат крайно събитие с номер n+1, се откриват по това, че не фигурират в графа 4 на таблицата-задание, т. е. не са предшествувани от никоя работа. В нашия случай такива работи са 34 и 40.

Втори етап. Обединяване на събитията

Някои от работите (3, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 30, 31, 32, 33, 34) имат повече от едно начално събитие. Необходимо е всяка от тях да получи само едно, което може да стане чрез обединяването им по следния начин. Проверява се дали събитията, приети за начални за някои от тези работи, се срещат самостоятелно или в комбинация с други — като начални и за други работи. Ако не се срещат, заменят се с едно събитие (например с най-малкия номер). То става начално за работата, при която се извършва обединяването, и крайно на работите, които имат за крайни обединяващите се събития.

На таблица 1.2.3 събитията се обединяват чрез зачертаване на излишните номера в графа 2 и коригиране в съответствие с номерата на крайните събития в графа 3.

В нашия случай работи 3, 17, 18, 19, 20, 30, 31, 34 отговарят на условието за обединяване.

Таблица 1, 2, 3

№ по ред	№ на началното събитие	№ на крайното събитие
1	0	1
2	1	2
3	4,5	3
4	2	4
5	2	5,4
6	37	6
7	0	7
8	6,7	8
9	6,7	9*, 8
10	6,7	10*, 8
11	6,7	11*, 8
12	6,7	12*, 8
13	3	13
14	6,7	14
15	6,7	15*, 14
16	6,7	16
17	14, 15*, 21*	17*, 16
18	16, 17*	18
19	8, 9*, 10*, 11*, 12*	19*, 18
20	18, 19*	20
21	13	21*, 14
22	20	22
23	24	23
24	22	24
25	24	25
26	38	26
27	38	27
28	23	28
29	39	29*, 28
30	28, 29*, 41*	30
31	32, 33*	31*, 30
32	7,37	32
33	7,37	33, 32
34	30, 31, 36	42
35	23	35
36	35	36*, 30
37	13	37
38	25	38
39	26	39
40	27	42
41	22	41*, 28

Таблица 1, 2, 4

№ по ред	№ на началното събитие	№ на крайното събитие
1	0	1
2	1	2
3	4	3
4	2	4
5	2	4
6	37	6
7	0	7
8	$\overline{6}$,7	8
9	$\overline{6}$,7	8
10	$\overline{6}$,7	8
11	$\overline{6}$,7	8
12	$\overline{6}$,7	8
13	3	13
14	$\overline{6}$,7	14
15	$\overline{6}$,7	15
16	$\overline{6}$,7	16
17	$\overline{14}$	16
18	16	18
19	8	19
20	18	20
21	13	14
22	20	22
23	24	23
24	22	24
25	24	25
26	38	26
27	38	27
28	23	28
29	39	28
30	28	30
31	32	30
32	7,37,$\overline{43}$	32
33	7,37,$\overline{43}$	32
34	$\overline{30}$	42
35	23	35
36	35	30
37	13	37

* Звездичката означава, че цифрата е зачертана

Продължение от табл. 1.2.4

№ по ред	№ на началното събитие	№ на крайното събитие
38	25	38
39	26	39
40	27	42
41	22	28
42	7	6
43	7	43
44	37	43

Трети етап. Въвеждане на допълнителни събития и фиктивни работи

Допълнителни събития и фиктивни работи се въвеждат, след като събитията са проверени за обединяване. С работите, които имат повече от едно начално събитие, се постъпва по следния начин. Проверява се дали събитията (табл. 1.2.4) са начални и за други работи. Ако някое събитие не е, взема се за начално на работата, а всички останали се свързват с него чрез фиктивни работи. Всяка фиктивна работа получава следващия номер от списъка на работите.

В нашия пример при работи 8, 9, 10, 11, 12, 14, 15, 16 се прилага правилото за въвеждане на фиктивна работа. Може да има случаи, когато всички начални събития за дадена работа се оказват едновременно начални и за други. Такъв е примерът с работи 32 и 33, които имат за начални събития 7 и 37. И двете събития са начални за други работи. Затова се въвежда ново събитие, наречено допълнително, което става начално за работи 32 и 33 и има номер, който не се среща в таблицата. Всички останали събития се свързват с него чрез фиктивни работи.

На таблица 1.2.4 събитията, които стават начални за съответните работи, се обграждат и фиктивните работи се записват с техните начални и крайни събития.

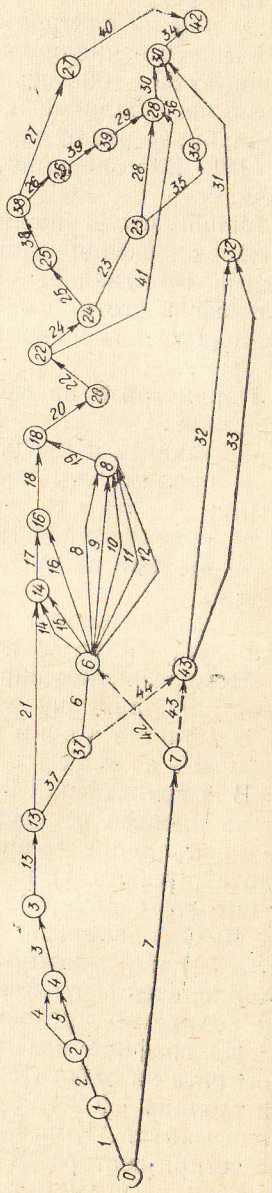
След тази дейност се попълва таблица 1.2.5, по която се начертава мрежовият модел (фиг. 1.2.4).

5. ПАРАМЕТРИ (ЧИСЛЕНИ ХАРАКТЕРИСТИКИ) НА МРЕЖОВИЯ ГРАФИК И ТЯХНОТО ИЗЧИСЛЯВАНЕ

Системата на мрежовото планиране и управление се изгражда чрез определяне на кртичния път и оптимизиране на изпълнението на работите по време и ресурси. Определянето на критичния път и резервите от време на некритичните работи е една от първостепенните задачи при прилагането ѝ.

Таблица 1, 2, 5

Начално съб.	0	1	4	2	2	37	0	6	6	6	6	3	6	6	14	16	8	18	13	20		24		
№ на работ.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22		23
Крайно съб.	1	2	3	4	4	6	7	8	8	8	8	8	13	14	15	16	16	18	19	20	14	22		23
Начално съб.	22	24	38	38	23	39	28	32	43	30	23	35	13	25	26	27	22	7	7	37				
№ на работ.	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44			
Крайно съб.	24	25	26	27	28	28	30	30	32	32	35	42	35	30	37	38	39	42	28	6	43	43		



Фиг. 1, 2, 4.

1000

Параметрите на мрежовия график може да се изчисляват ръчно или на елктронноизчислителна машина.

Ръчното изчисляване намира приложение в модели, съдържащи до 80—100 операции. За тази дейност са необходими от 3 до 5 часа. При мрежови графици, съдържащи повече от 100 операции, то рязко нараства. Например моделите, които включват 150—200 операции, поглъщат средно 15—20 часа работно време.

Машинното изчисляване може да се приложи към всички мрежови графици независимо от броя на операциите, но по-голяма ефективност се получава при обемистите графици, включващи стотици операции. Електронните изчислителни машини спестяват огромен човешки труд и икономисват разход на време.

Параметрите на мрежовия график се изчисляват, като се определят:

— ранните и късните срокове за настъпване на събитията;

— времето на ранното начало и ранното завършване на работите;

— критичният път;

— времето на късното начало и късното завършване на работите.

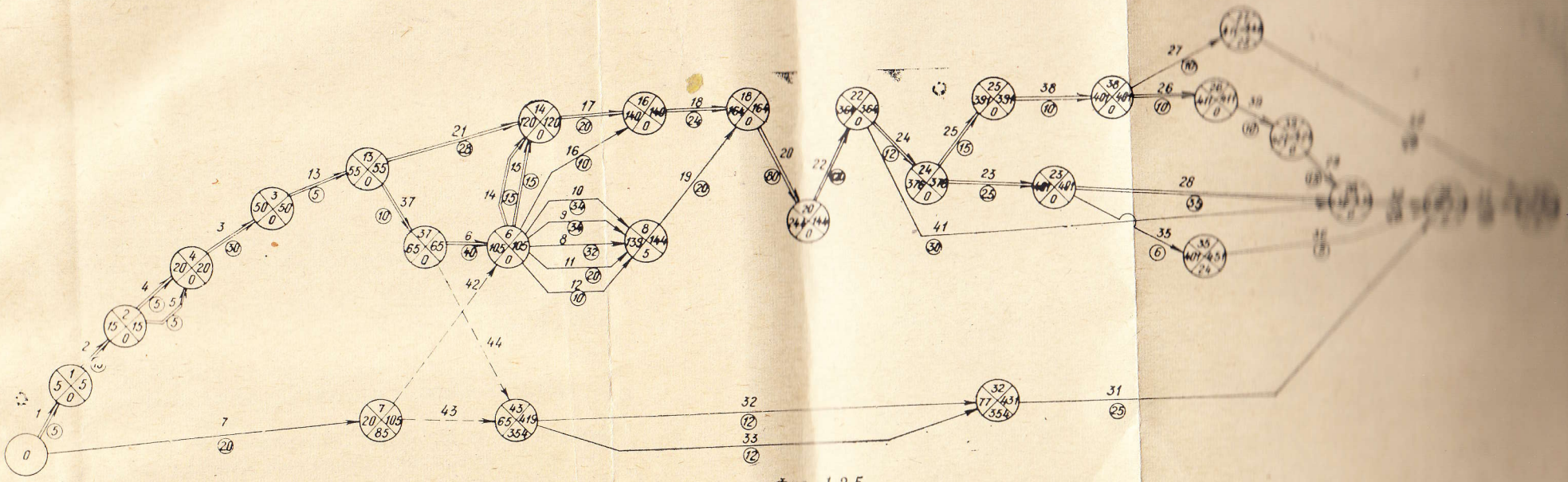
— всички видове резерви на некритичните работи (пълен, свободен, частен от първи и втори вид).

Нека изчислим параметрите на мрежовия график чрез примера за планиране на построяването на ДОС.

Изчисляване на ранните и късните срокове за настъпване на събитията

В графика (фиг. 1.2.5) нулевото събитие (0) означава началото на процеса по построяването на ДОС, т. е. пристъпването към изпълнение на операцията „избиране на място на ДОС по карта“ (работа 1) и „осигуряване на транспорт“ (работа 7). Събитието с номер 42 означава, че процесът по построяването на ДОС е завършен — проведена е изпитателна стрелба (работа 34) и е монтирана отоплителна инсталация (работа 40). Останалите събития са междинни и са резултат от изпълнението на конкретно предшествуващите ги работи.

На графика над стрелките, т. е. в числителя, са записани номерата на работите (наименованията им са отразени в графа 2 на таблица 1.2.2.), а под всяка стрелка — продължителността им в минути. Кръгчетата, означаващи събитията, се разделят на четири сектора. В горния се записва номерът на събитието, в левия — времето на ранното настъпване на събитието, в дес-



Фиг. 1.2.5

Пор. № 1402 — към стр. 107—108

ния — времето на късното настъпване на събитието, и в долния — резервът от време. Разделянето на кръгчетата на сектори създава известно удобство при изчисляване на параметрите на мрежовия график и повишава нагледността. Веднага трябва да се отбележи, че такова разграфяване е целесъобразно за сравнително малки графици, включващи до няколко десетки събития.

От графика се вижда, че работата 0,1 се изпълнява за 5 минути. Затова най-ранното време за настъпване на събитие 1 е пет минути след началото на процеса. Събитие 2 ще настъпи след реализиране на работа 1,2, което ще стане 15 минути след началото на процеса.

Нека определим най-ранния срок за настъпване на събитие 14. То се предшествува от три последователности от работи (от три пътя):

0, 1, 2, 4, 3, 13, 14;
0, 1, 2, 4, 3, 13, 37, 6, 14;
0, 7, 6, 14.

Събитието настъпва едва тогава, когато се реализират всички предшествуващи го работи, които имат следната продължителност:

(0, 1, 2, 4, 3, 13, 14)=5+10+5+30+5+28=83 min;
(0, 1, 2, 4, 3, 13, 37, 6, 14)= 5+10+5+30+5+10+40+ +15=120 min.;
(0, 7, 6, 14)=20+0+15=35 min.

Най-ранният срок за настъпване на събитие 14 е 120 min след началото на процеса.

Като се изхожда от изложеното, може да се даде дефиниция: **времето на ранното настъпване на дадено събитие в графика е равно на времето на най-продължителния от пътищата, които го предшествуват.**

Това правило може да се изрази аналогично чрез формулата:

$$t_р(i)=\max t[L_1(i)],$$

където $t_р(i)$ — време на ранното настъпване на даденото събитие;
$\max t(L_1(i)]$ — продължителност на максималния път, предшествуващ събитието.

Ранното настъпване на събитието (j) може да се определи по формулата

$$t_р(j)=\max[t_р(i)+t(i,\ j)],$$

където i — номер на събитието, което предшествува дадената работа;

j — номер на събитието, което следва след нея.

Нека определим ранното настъпване на събитие 18.

$$t_р(18)=\max\begin{cases}t_р(16)+t(16,\ 18)=140+24=164;\\ t_р(8)+t(8,\ 18)=139+20=159.\end{cases}$$

$$t_р(18)=164 \text{ min}$$

Времето на ранното настъпване на събитията се изчислява последователно от ляво на дясно, т. е. започва се от изходното събитие на графика и се стига до завършващото. Времето на ранното настъпване на завършващото събитие е и критичното време на мрежовия график. В нашия пример

$$t_{кр}=t_р(42)=466 \text{ min}.$$

Всяко събитие в мрежовия график трябва да настъпи в срок, осигуряващ необходимото време за изпълнение на всички работи, следващи след него.

Нека разгледаме събитие 38 от графика на фиг. 1.2.4. То трябва да настъпи в такъв срок, че да остане време за изпълнение на работи (38, 27), (27, 42), (38, 26), (26, 39), (39, 28), (28, 30) и (30, 42).

От времето на завършващото събитие, което е и критичното време на графика, трябва да се отнеме времето на максималния от пътищата, следващи след събитие 38, т. е. пътят (38, 26, 39, 28, 30, 42).

Затова

$$t_к(38)=t_{кр}-t(38, 26, 39, 28, 30, 42)=466-65=401 \text{ min},$$

където: $t_к$ — късно настъпване на дадено събитие;

$t_{рк}$ — критично време на графика.

Това означава, че най-късното време за настъпване на събитие 38 не трябва да превишава 401 минути след началото на процеса. Всяко забавяне води до удължаване срока за реализиране на разработката.

Ако се означи с $t_к(i)$ късният срок за настъпване на събитие i, а с $L_2(i)$ — най-продължителният от пътищата след него, изложеното по-горе дава право да се приложи формулата

$$t_к(i)=t_{кр}-t[L_2(i)].$$

Късният срок за настъпване на дадено събитие i се изчислява като разлика между продължителността на критичния път и максималния път от следващите след събитието i пътища.

Късното настъпване на събитието може да се изчисли и по формулата

$$t_к(i)=\min[t_к(j)-t(i, j)],$$

При изчисляването се започва от завършващото събитие на графика и се върви към изходното събитие, т. е. от дясно на ляво.

Нека определим късното настъпване на събитие 23.

$$t_к(23)=\min\begin{cases}t_к(28)-t(23, 28)=436-35=401 \text{ min};\\ t_к(36)-t(23, 35)=451-6=445 \text{ min}.\end{cases}$$

$$t_к(23)=401 \text{ min}.$$

Събитията, чиито ранен и късен срок на настъпване съвпадат, лежат на критичния път. Стрелките, които ги съединяват, съответствуват на критичната последователност на работите.

Изчисляване на времето на ранното начало и ранното завършване на работите

Като се изходи от обстоятелството, че събитията нямат продължителност, завършването на работите, които предшествуват дадено събитие, означава, че то е настъпило и може да се пристъпи към изпълнение на работите, излизащи от него.

Времето на ранното начало на работата $[t_{рн}(i\ j)]$ е равно на времето на ранното настъпване на предшествуващото я събитие $[t_р(i)]$ т. е.

$$t_{рн}(i, j)=t_р(i)$$

Например $t_{рн}(35, 30)=t_р(35)=407$ min.

Времето на ранното завършване на работата $[t_{рз}(i, j)]$ се определя като сума от времето на ранното настъпване на предшествуващото я събитие $[t_р(i)]$ и времето на продължителността на самата работа $[t(i, j)]$.

$$t_{рз}(i, j)=t_р(i)+t(i, j).$$

$$t_{рз}(36, 30)=t_р(35)+t(35, 30)=407+5=412 \text{ min}.$$

Работата (35, 30) „съставяне на огнева картичка на ДОС“ може да завърши най-рано 412 минути след началото на процеса.

Изчисляване критичното време и критичния път

От графика на фиг. 1.2.4 се вижда, че мрежовият модел на процеса включва редица последователности от работи, които нарекохме пътища.

Взаимната връзка между работите е такава, че всяка от тези последователности задължително трябва да се запази. Неизпълнението на отделни работи, включени в графика, води до неизпълнение на цялата разработка.

В нашия пример чрез изчисляване на ранното настъпване на завършващото събитие 42 се определя и критичното време на графика — 466 минути. Това е най-дългият път в мрежовия график и същевременно минималното необходимо време за построяване на ДОС при приетата последователност и продължителност на работите.

Названието критичен път има за цел да привлече вниманието към онази група работи, които определят общата продължителност за изпълнение на проекта. Всяко задържане на работите, лежащи на критичния път, увеличава неговата продължителност, а следователно и времето за изпълнение на целия процес.

Определянето на критичния път, а оттам и работите и събитията, лежащи на него, позволява да се съсредоточи вниманието преди всичко върху критичните работи, които определят продължителността на целия процес.

В един мрежов график може да има няколко критични пътища. Всеки от тях може да се разклонява на няколко пътища и отново да се съединява в един.

Освен критичните пътища трябва да се контролират и подкритичните, т. е. тези, които имат продължителност, близка до продължителността на критичния.

Изчисляване на времето на късното начало и късното завършване на работите

В мрежовия график всяка некритична работа освен ранно начало и ранно завършване има късно начало и късно завършване.

При тяхното изчисляване започваме от завършващото събитие и се придвижваме в ляво до изходното събитие на графика.

Срокът на късното начало на работата $[t_{кн}(i, j)]$ **се определя като разлика между нейното късно завършване** $[t_{кз}(i, j)]$ **и продължителността на самата работа** $[t(i, j)]$.

$$t_{кн}(i, j)=t_{кз}(i, j)-t(i, j).$$

$$t_{кн}(27, 42)=t_{кз}(27, 42)-t(27, 42)=466-20=446 \text{ min}.$$

Това означава, че работа (27, 42) трябва да започне не по-късно от 446 min след началото на процеса. Ако започне

по-късно, целият процес ще се удължи с величината на закъснението.

Срокът на късното завършване на работата $[t_{кз}(i, j)]$ **се определя по срока на късното начало на следващата работа**

$$t_{кз}(i, j)=t_{кн}(j, k).$$

$$t_{кз}(38, 27)=t_{кн}(27, 42)=446 \text{ min}.$$

Срокът на късното завършване на работата, след която следват няколко работи, е равен на минималното значение на късното начало на всички следващи работи.

$$t_{кз}(i, j)=\min t_{кн}(j, k).$$

$$t_{кз}(25, 38)=\min\begin{cases}t_{кн}(38, 27)=436 \text{ min};\\ t_{кн}(38, 26)=401 \text{ min}.\end{cases}$$

$$t_{кз}(25, 38)=401 \text{ min}.$$

Изчисляване на резервите от време на събитията, пътищата и работите

Всички събития и работи в мрежовия график, лежащи на некритичните пътища, притежават резерви от време. Определянето и използуването на тези резерви е основната идея на системата на мрежовото планиране и управление. Това дава възможност от работите и пътищата, които разполагат с резерви от време, да се снемат човешки и материални ресурси и да се прехвърлят за изпълнение на работите, лежащи на критичните пътища. По такъв начин сроковете за тяхното изпълнение ще се съкратят, а оттам и срокът за реализиране на разработката като цяло.

Разликата между времето на късното и ранното настъпване на дадено събитие е неговият резерв от време $[P(i)]$

$$P(i)=t_к(i)-t_р(i).$$

$$P(35)=t_к(35)-t_р(35)=451-407=44 \text{ min};$$

$$P(24)=t_к(24)-t_р(24)=376-376=0 \text{ min}.$$

Равенството $t_р(i)=t_к(i)$ е признак, че дадено събитие лежи на критичния път.

За да се определи дали даден път от мрежовия график разполага с резерв от време, трябва да се сравни с критичния, който е най-дългият път в мрежовия график.

Разликата между дължината на критичния път $(t_{кр})$ **и дължината на даден път** (t_L) **се нарича пълен резерв от време** (P_L) **на този път.**

$$P_L=t_{кр}-t_L.$$

$$P=(0, 7, 43, 32, 30, 42)=t_{кр}—t(0, 7, 43, 32, 30, 42) = 466—67= =399 \text{ min}.$$

Пълният резерв от време на пътя показва колко може да се увеличи продължителността на всички работи, които му принадлежат, без да се удължава срокът за изпълнение на цялата разработка, т. е. без да се удължава $t_{кр}$. Пълният резерв от време на пътя е общ за всички работи, лежащи на некритичния му участък.

Работите от мрежовия график може да имат пълен, свободен (независим) и частен резерв от първи и втори вид.

Всяка работа, лежаща на некритичен път, притежава резерв от време.

Резервът от време на работата, определен с помощта на величината на резерва от времето на пътя, на който тя лежи, се нарича пълен резерв [$P_п(i, j)$]. Той показва колко може да се увеличи продължителността на работата при условие, че дължината на максималния път, преминаващ през нея, не превишава дължината на критичния път.

Пълният резерв от време на работата се изчислява по формулата

$$P_п(i, j)=t_к(j)—t_р(i)—t(i, j),$$

$$P_п(22, 28)=t_к(28)—t_р(22)—t(22, 28)=436—364—30=42 \text{ min}.$$

Той може да се предостави на една от работите или да се разпредели между всички работи, лежащи на некритичния участък от пътя.

Резервът от време на работата, който е образуван, когато продължителността ѝ е по-малка от разликата между ранния срок за настъпване на следващото събитие и късния срок за настъпване на предшествуващото събитие, се нарича свободен резерв [$P_с(i, j)$].

$$P_с(i, j)=t_р(i)—t_к(i)—t(i, j).$$

От формулата се вижда, че работата ще има свободен резерв от време при условие, че $t_р(j)—t_к(i)>t(i, j)$.

$$P_с(6, 16)=t_р(16)—t_к(6)—t(6, 16)=140—105—10=25 \text{ min}.$$

Свободният резерв от време показа колко може да се увеличи продължителността на дадената работа, без да се влияе върху сроковете за настъпване на нейното начално и

крайно събитие и върху величините на резервите от време на всички останали работи в графика.

Частните резерви от първи и втори вид се образуват в места, където се пресичат пътищата с различна продължителност, и възникват при работите, принадлежащи на пътищата с по-малка продължителност.

Частен резерв от първи вид [$P'_п(i, j)$] се образува при работи, излизащи от събития, от които водят началото си пътищата с различна продължителност.

На фиг. 1.2.4. такива са работите с номера 7, 8, 9, 10, 11, 12, 16, 21, 27, 35 и 41.

Този резерв показва каква част от пълния резерв от време на работата може да се изразходва, за да се увеличи продължителността на дадената и на следващите зад нея работи, принадлежащи на участъка от пътя между две най-близки точки на пресичането му с по-дълги пътища, при условие че увеличението не предизвиква съкращаване на резервите от време нито в една от предшествуващите работи.

Частният резерв от първи вид се изчислява по формулата

$$P'_п(i, j)=t_к(j)—t_к(i)—t(i, j).$$

$$P'_п(23, 35)=t_к(35)—t_к(23)—t(23, 35)=451—401—6=44 \text{ min}.$$

Частен резерв от втори вид [$P''_п(i, j)$] се образува при работи, непосредствено предшествуващи събитие, в което се пресичат пътища с различна дължина — 8, 10, 12, 11, 16, 19, 21, 31, 36, 40 и 41.

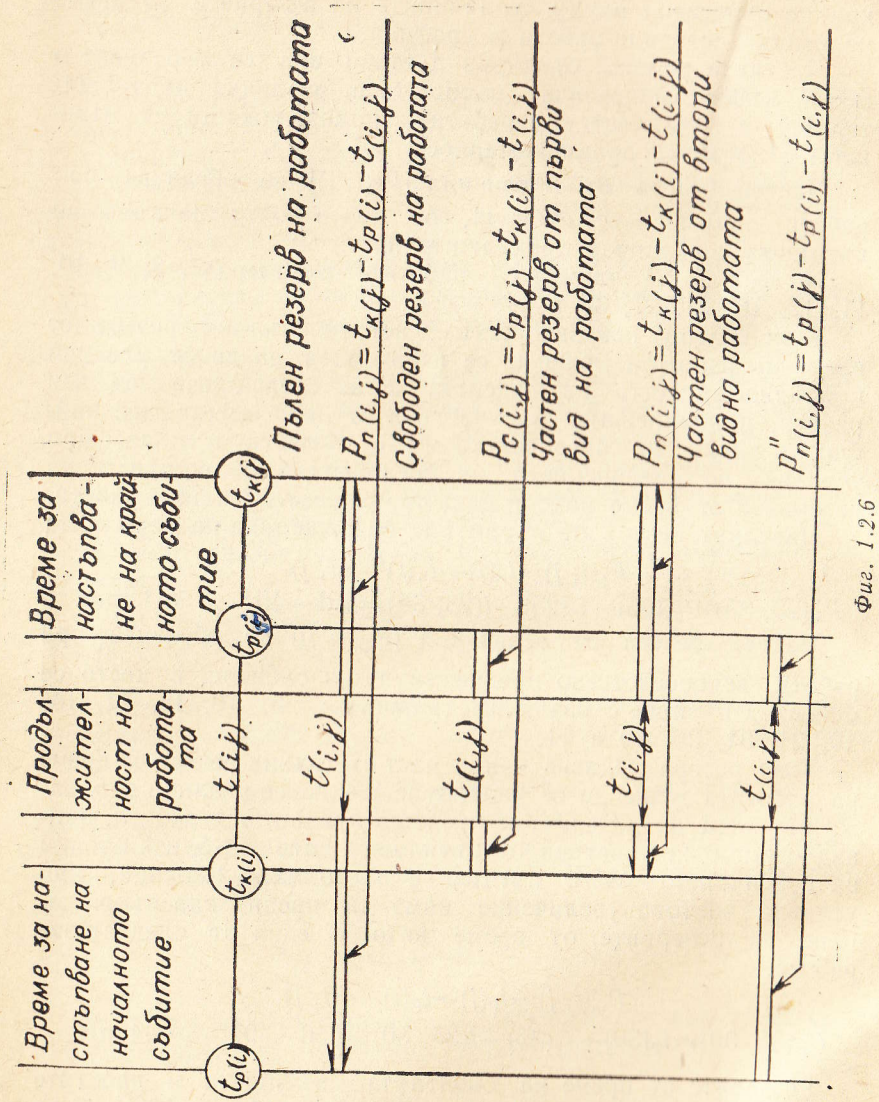
Този резерв показва каква част от пълния резерв от време на работата може да се използува, за да се увеличи продължителността на дадената и предшествуващите я работи, принадлежащи на участъка от пътя между две най-близки точки на пресичането му с пътища с по-голяма дължина, при условие че това увеличение няма да предизвика съкращаване на резервите от време нито в една от следващите работи.

$$P''_п(i, j)=t_р(j)—t_р(i)—t(i, j).$$

$$P''_п(35, 30)=t_р(30)—t_р(35)—t(35, 30)=456—407—5=44 \text{ min}.$$

Резервите от време на събитията, пътищата и работите са необходими за подобряване на изходните графици, за контролиране и прогнозиране на работите, като се изхожда от фактическото им състояние и предполагаемите изменения.

Образуването на различните видове резерви от време на



Фиг. 1.2.6

работите може да се представи нагледно по следния начин (фиг. 1.2.6).

Резултатите от разчета са нанесени в таблица 1.2.8.

Така съставеният и разчетен мрежов график се подлага на анализ, въз основа на който се определя в каква степен съответствува на поставената задача.

6. ПОСТРОЯВАНЕ И ИЗЧИСЛЯВАНЕ НА МРЕЖОВИЯ ГРАФИК ЧРЕЗ ЕЛЕКТРОННОИЗЧИСЛИТЕЛНА МАШИНА

Когато трябва да се построяват и изчисляват по-сложни мрежови графици, може да се използува ЕИМ. Обикновено се счита, че операции с повече от 200—300 работи трябва да се решават с тяхна помощ. Разбира се, когато има достатъчно машинно време, може да се решават и задачи с много по-малко работи, тъй като това води до икономия на време, повишаване на точността и оперативността в работата.

За всеки тип електронноизчислителна машина са разработени конкретни програми за решаване на мрежови графици. Подолу е разгледана подготовката на входната информация и ползуването на полученото решение от програмата, разработена специално за машината „МИНСК-22“.

За тази програма входната информация обхваща само продължителността на работите и номерата на непосредствено предшествуващите работи. При това продължителността се записва със знак „—“, а номерът на непосредствено предшествуващите работи — със знак „+“. Данните се записват в паметта на машината, като се започва с клетка 1500 и продължава последователно до края, при което във всяка клетка се записва само по едно число. Номерацията на клетките е в осмична система, а входните данни се записват в десетична система.

За по-лесно записване и перфорация на входните данни е съставена таблица (таблица 1.2.6.). Нека запишем в нея входните данни по задачата за построяване на дълговременно огнево съоръжение, която по-горе беше решена ръчно. Те ще имат следния вид.

Таблица 1. 2. 6.

1500	— 5	+ 0	— 10	+ 1	—30	+ 4	+ 5	— 5
1510	+ 2	— 5	+ 2	—40	+37	—20	+ 0	—32
1520	+ 6	+ 7	— 34	+ 6	+ 7	—30	+ 6	+ 7
1530	—20	+ 6	+ 7	—10	+ 6	+ 7	— 5	+ 3
1540	—15	+ 6	+ 7	—15	+ 6	+ 7	—10	+ 6
1550	+ 7	—24	+ 16	+17	—24	+16	+17	—20
1560	+ 8	+ 9	+ 10	+11	+12	—80	+18	+19
1570	—28	+13	—120	+20	—25	+24	—12	+22
1600	—15	+24	— 10	+38	—10	+38	— 35	+23
1610	—15	+39	— 20	+28	+29	+41	—25	+32
1620	+33	—12	+ 7	+37	—12	+ 7	+37	—10
1630	+30	+31	+ 36	— 6	+23	— 5	+35	—10
1640	+13	—10	+ 25	—10	+26	—20	+27	—30
1650	+22							

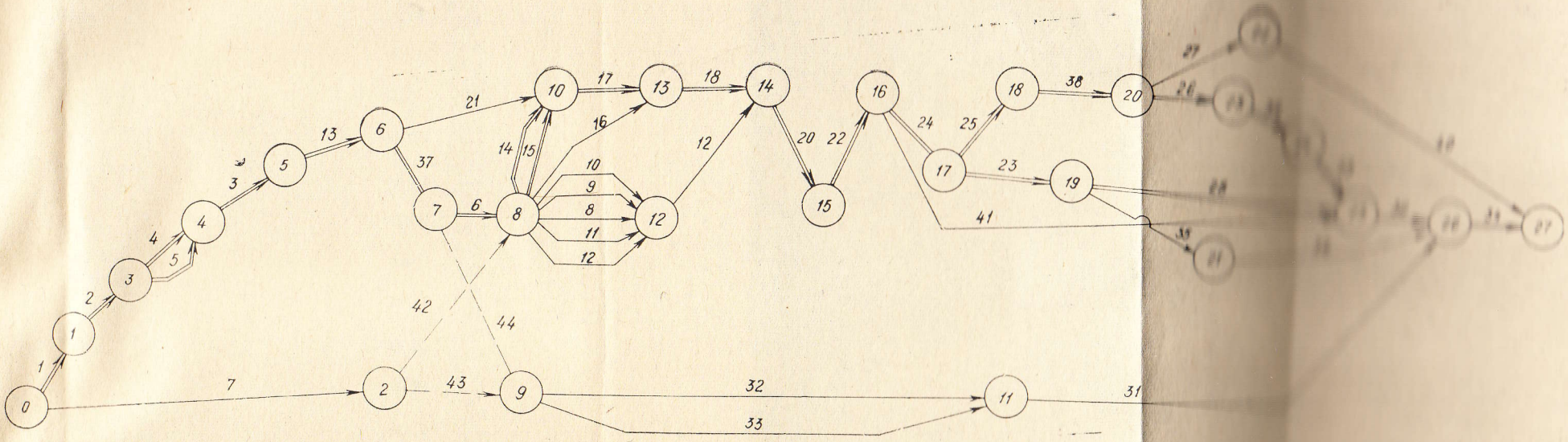
Така подготвените входни данни се перфорират на перфолента в машинен код.

Решението на машината се получава на тесен и на широк печат.

На тесен печат (ТБПМ) е и таблицата за построяване на мрежовия график. Работите са подредедени по ред, като за всяка е записано началното и крайното събитие, между които е заключена (табл. 1.2.7). Действителните работи се отделят от фиктивните съгласно заданието, тъй като те заемат последователно от началото толкова номера, колкото са общо работите в заданието (описанието) на операцията. Останалите работи са фиктивни.

На широк печат (АЦПУ) е таблицата с изчислените параметри на мрежовия график (табл. 1.2.8). Както се вижда, машината подрежда работите във възходящ ред по сроковете на ранното им започване. Това облекчава анализа на мрежовия модел и най-вече управлението на процеса при неговото реализиране.

Ако се сравни графикът, построен от електронноизчислителната машина (фиг. 1.2.7), със съответния график, построен ръчно (фиг. 1.2.5), ще се види, че те се различват само по номерата на събитията. Това се дължи на преномерирането на графика по правилото „зачертаване на дъгите“.



Пор. № 1402 — стр. 117—118

Фиг. 1.2.7

1500
1510
1520
1530
1540
1550
1560
1570
1600
1610
1620
1630
1640
1650

Така
лента в
Реше
печат.
На т
жовия
е запис
ключен
фиктив
телно о
в задан
са фик
На
на мре
подреж
им запо
вече у
Ако
ната м
ръчно
мерата
график

0000	0001 0001	0018	0023 0020
0001	0002 0003	0017	0024 0018
0004	0003 0005	0018	0025 0019
0003	0004 0004	0019	0026 0022
0003	0005 0004	0021	0027 0024
0007	0006 0008	0020	0028 0026
0000	0007 0002	0025	0029 0026
008	0008 0012	0026	0030 0027
008	0009 0012	0013	0031 0027
008	0010 0012	0009	0032 0013
008	0011 0012	0009	0033 0013
008	0012 0012	0027	0034 0028
0005	0013 0006	0020	0035 0023
008	0014 0010	0023	0036 0027
008	0015 0010	0006	0037 0007
008	0016 0014	0019	0038 0021
0010	0017 0014	0022	0039 0025
0014	0018 0015	0024	0040 0028
0012	0019 0015	0017	0041 0026
0015	0020 0016	0002	0042 0008
0006	0021 0010	0002	0043 0009
0016	0022 0017	0007	0044 0009

7. АНАЛИЗ НА ПОЛУЧЕНИТЕ РЕЗУЛТАТИ. ОПТИМИЗИРАНЕ НА МРЕЖОВИЯ МОДЕЛ ПО ВРЕМЕ И ПО РЕСУРСИ

Мрежовият модел не е самоцел. Той се съставя, за да се проиграе по него предстоящата операция, да се открият недостатъците в замислената операция и се отстранят те, преди да е започнало изпълнението ѝ. Затова след съставянето му и изчисляване на неговите параметри задълбочено се анализира полученото решение, сравняват се резултатите със заповядания срок и наличните ресурси и се правят такива изменения, които да ги приведат в съответствие, т. е. търси се оптималният вариант на плана.

При анализа на мрежовия график по време са възможни три изхода:

1. Полученото време за изпълнение на операцията съвпада със заповядания срок или различията са незначителни, т. е. в рамките на допустимите отклонения. В този случай разработеният план е оптимален и може да се изпълнява. Назначението на мрежовия график и на неговите параметри е да послужат те на ръководителя за управление на операцията в хода на нейното изпълнение.

По наше мнение, подобен случай трябва да се счита за изключение, тъй като сравнително рядко е възможно още с първоначалното построяване на мрежовия модел да се постигне направо желаната цел — оптималният план. Обикновено отклоненията от заповядания срок ще са значителни и ще се налага времето да се оптимизира.

2. Полученото време е по-кратко от заповядания срок. При такъв изход също може да има два случая:

— операцията е относително самостоятелна и всяко съкращаване на срока е благоприятно. В този случай планът също е оптимален и се изпълнява, като мрежовият модел служи за ръководство и управление на операцията;

— операцията е елемент от друга по-голяма, което налага точно да се спазва определеният срок. В този случай се налага да се удължи критичният път на мрежовия график. Това обикновено става сравнително по-лесно, като най-често се намаляват ресурсите за изпълнение на операцията.

3. Полученото време е по-дълго от заповядания срок. В този случай се налага да се съкрати критичният път. Това изисква сериозен анализ на цялата операция и на всяка от работите поотделно, както и на структурата на мрежовия модел. В ни-

какъв случай не е допустимо просто да се коригират сроковете

План . . .

Крит. път: 466,00 единици

Мрежово планиране

Работа №	Съдържание	Разход на време	Начало		Край		Резерви			
			рано	късно	рано	късно	пълен	част 1	част 2	свободен
1		5,00	,00		5,00		крит. работа			
7		20,00	,00	85,00	20,00	105,00	85,00	85,00	,00	,00
2		10,00	5,00		15,00		крит. работа			
4		5,00	15,00		20,00		крит. работа			
5		5,00	15,00		20,00		крит. работа			
3		30,00	20,00		50,00		крит. работа			
13		5,00	50,00		55,00		крит. работа			
21		28,00	55,00	92,00	85,00	120,00	37,00	37,00	37,00	37,00
37		10,00	55,00		65,00		крит. работа			
6		40,00	65,00		105,00		крит. работа			
32		12,00	65,00	419,00	77,00	431,00	354,00	,00	,00	,00
		12,00	65,00	419,00	77,00	431,00	354,00	,00	,00	,00
33		25,00	77,00	431,00	102,00	456,00	354,00	,00	354,00	,00
31		32,00	105,00	112,00	137,00	144,00	7,00	,00	2,00	,00
8		34,00	105,00	110,00	109,00	144,00	5,00	,00	,00	,00
9		30,00	105,00	114,00	135,00	144,00	9,00	,00	4,00	,00
10		20,00	105,00	124,00	125,00	144,00	19,00	,00	14,00	,00
11		10,00	105,00	134,00	115,00	144,00	29,00	,00	24,00	,00
12										
14		15,00	105,00		120,00		крит. работа			
15		15,00	105,00		120,00		крит. работа			
16		10,00	105,00	130,00	115,00	140,00	25,00	,00	25,00	,00
17		20,00	120,00		140,00		крит. работа			
19		20,00	139,00	144,00	159,00	164,00	5,00	,00	5,00	,00
18		24,00	140,00		164,00		крит. работа			
20		80,00	164,00		244,00		крит. работа			
22		120,00	244,00		364,00		крит. работа			
24		12,00	304,00		376,00		крит. работа			
41		30,00	364,00	406,00	394,00	436,00	42,00	42,00	42,00	42,00
23		25,00	376,00		401,00		крит. работа			
25		15,00	376,00		391,00		крит. работа			
38		10,00	391,00		401,00		крит. работа			
26		10,00	401,00		411,00		крит. работа			
27		10,00	401,00	436,00	411,00	446,00	35,00	35,00	,00	,00
28		35,00	401,00		436,00		крит. работа			
35		6,00	401,00	445,00	407,00	451,00	44,00	44,00	,00	,00
36		5,00	407,00	451,00	412,00	456,00	44,00	,00	44,00	,00
39		10,00	411,00		421,00		крит. работа			
40		20,00	411,00	446,00	431,00	466,00	35,00	,00	35,00	,00
29		15,00	421,00		436,00		крит. работа			
30		20,00	436,00		456,00		крит. работа			
34		10,00	456,00		466,00		крит. работа			

игр
цит
поч
ван
нот
и н
ги
на

три

със
в р
тен
на
те
но

кл
во
пр
кл
ла

та

кр
е
рѣ

то
да
нс
ля

то
ва
пс

11

какъв случай не е допустимо просто да се коригират сроковете и продължителността на работите, за да се „приведат“ в съответствие със заповядания срок. Това трябва да стане в резултат на задълбочено проучване и сериозни изменения както в технологията, така и в организацията на работата. Общо дейностите, насочени към съкращаване на критичния път, може да се сведат в две групи:

— целящи съкращаване на времето за изпълнение на отделните работи, които лежат на критичния или на подкритичните пътища. Те трябва да са реални и действително да съкращават срока за изпълнение на отделните работи. Такива дейности може да са: увеличаване на ресурсите, подобряване на организацията или технологията на изпълнение на отделните работи, технически и научни нововъведения и други;

— изменящи конструкцията на мрежовия график, което е насочено към максимално използуване на възможностите за съвместване на отделните работи чрез разчленяване или паралелно изпълнение на няколко, които са изпълнявани по-рано последователно. По такъв начин цели работи, които са лежали на критичния път, може да се изключат от него, като се дадат за изпълнение успоредно с други.

Този важен момент от взаимните връзки между работите и събитията трябва да се анализира с участието на специалисти по дадената операция и отделните работи.

Отразяването на дейностите по съкращаване на критичния път води до поправки в заданието (описанието) на операцията, след което мрежовият график се изчислява наново и полученият критичен път се сравнява със запоядания срок. Ако и след това отклоненията са значителни, процедурата се повтаря.

Анализирането на мрежовия модел по ресурси се налага от необходимостта да се установи материално-техническото осигуряване на изпълнението на плана. Изпълнението на задачата зависи не само от добрата организация на работата, но и от осигуреността с ресурси и успешното разположение на силите и средствата. Оптимизирането на ресурсите дава възможност да се постигне съответствие между заповяданите срокове за завършване на работите, съставляващи дадената операция, с определените за тази цел ресурси.

Оптимизирането на мрежовия график по ресурси възниква при решаването на широк кръг задачи, някои от които може да са следните:

— разпределение на силите и средствата при изпълнение на бойна задача;

— строителство на отбранителни съоръжения;
— материално-техническо осигуряване на бойните действия на войските;
— планиране на научноизследователската работа;
— планиране на бойната подготовка;
— производство на нова бойна техника и други военни изделия;
— партийно-политическо осигуряване на действията на войските и други.

Последователността на работата е следната:

Съставя се линейна диаграма на операцията. Това е познатият линеен график на Гант. Диаграмата на операциите служи не само за оптимизиране на мрежовия график по ресурси, но и за непосредствено ръководене изпълнението на операцията, тъй като е далеч по-нагледна от мрежовия график (особено когато операцията се състои от повече работи).

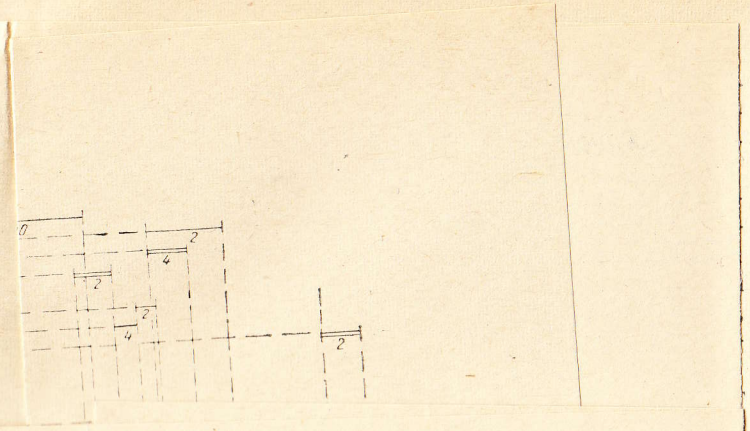
Диаграмата се начертава върху координатната система. По вертикалната ос У с произволни деления се нанасят номерата на работите, а хоризонталната ос Х се разделя мащабно на съответните единици, за които се изпълняват отделните работи и цялата операция.

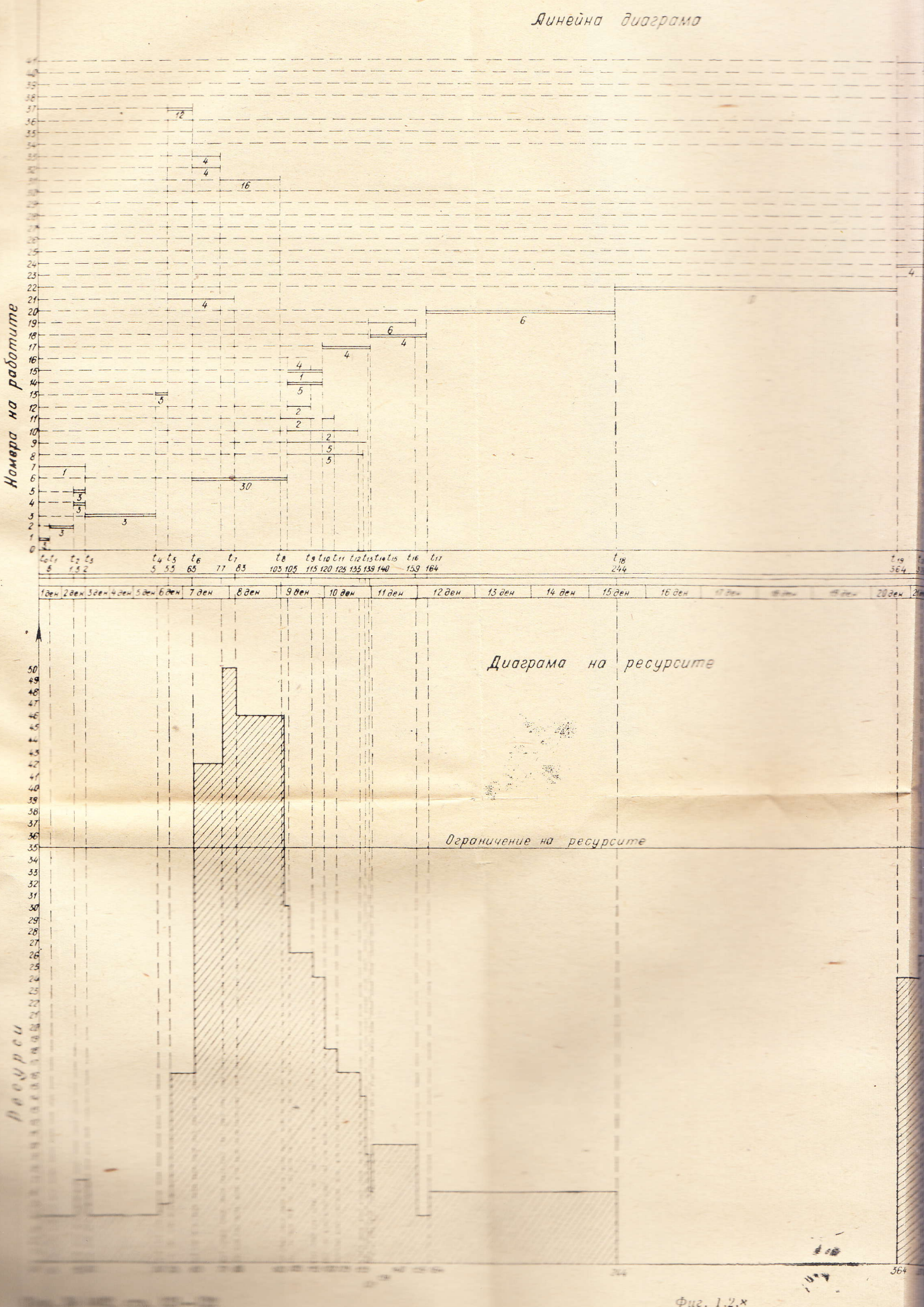
Всяка работа върху линейната диаграма се нанася като права, чието положение е определено от две точки, които се получават от пресичането на хоризонталната линия, преминаваща през номера на работата успоредно на оста Х, и вертикалните, преминаващи през деленията, съответствуващи на ранното начало и ранния край на работата върху оста Х. По такъв начин дължината на правата, която изобразява всяка работа, е равна на времето за нейното изпълнение. Тя се нанася в съответния мащаб (фиг. 1.2.8). На фигурата е дадена линейната диаграма на разгледания мрежов график за построяване на дълговременно огнево съоръжение.

Така върху оста Х се получават множество точки, обозначаващи началото и края на всяка работа. Те се номерират последователно: t_0, t_1, t_2, t_3, . . ., t_n.

Под всяка работа върху линейната диаграма се записват ресурсите, които са необходими за нейното изпълнение.

Под линейната диаграма се начертава диаграмата на необходимите ресурси. Тя представлява също координатна система, разположена точно под линейната диаграма, върху чиято хоризонтална ос се пренасят точките t_0, t_1, t_2, t_3, . . . , t_n, а върху вертикалната ос се нанасят равни деления, съответствуващи на единиците на ресурсите. След това се сумират необходимите




Линейна диаграма
Номера на работите
1 ден 2 ден 3 ден 4 ден 5 ден 6 ден 7 ден 8 ден 9 ден 10 ден 11 ден 12 ден 13 ден 14 ден 15 ден 16 ден 20 ден
Диаграма на ресурсите
Ограничение на ресурсите
Ресурси
364

Фиг. 1.2.*

— стр
— мат
вия на в
— пла
— пла
— про
делия;
— па
ските и
После
Съ с т
Това е по
щите слу
ресурси,
операция
(особено
Диагр
вертикал
на работи
ответните
и цялата
Всяка
права, ч
получава
ваща пре
ните, пр
ното нач
към начи
бота, е р
в съответ
ната диа
на дълго
Така
чаващи
следоват
Под в
сурсите,
Под л
ходимите
ма, разп
хоризонт
ху верти
на едини

ресурси за изпълнението на всички работи между деленията t_0—t_1, t_1—t_2 и т. н., като сумата се нанася графично върху диаграмата. На същата фигура е начертана и диаграма за необходимите ресурси от личен състав за построяването на дълговременно огнево съоръжение.

Ако ресурсите са ограничени през делението, което съответствува на наличните ресурси, прокарва се линия на „ограничението на ресурса“. Тя не трябва да пресича кривата на необходимите ресурси. В противен случай те не достигат за определен период от време и планът подлежи на оптимизиране, т. е. такова разместване на работите, че да се осигури съответствие между нуждите и наличните ресурси.

Оптимизирането по ресурси може да се постигне по един от следните начини:

— разместват се некритичните работи за сметка на пълния им резерв от време, за да се ликвидира недостигът от ресурси. Най-често именно по този начин се решава задачата — некритичните работи не започват в реалното си начало, а по-късно;

— проверява се дали е възможно да се намали нуждата от ресурси за некритичните работи за сметка на удължаването на времето в рамките на техния резерв;

— търси се начин да се увеличи запасът от ресурси;

— проверява се възможността да се прекъснат за определен срок в рамките на резерва от време отделните некритични работи;

— ако по някои от тези способи не е възможно да се намери решение, критичните работи се разместват, което води до удължаване на общия срок за завършване на операцията.

Нека разгледаме диаграмата за необходимите ресурси при построяването на дълговременно огнево съоръжение (фиг. 1.2.8). Съгласно със заданието (табл. 1.2.2) разполагаме с по 35 души на смяна. Прокарваме линията на ограничението през 35 деление-и виждаме, че в участъка t_6—t_8 тя пресича кривата на диаграмата за нуждите от ресурси. Това показва, че от 65-ия до 103-ия час за построяването на ДОС не достигат от 7 до 15 души. Разглеждаме работите, които се изпълняват през този период, и виждаме, че работите 31, 32 и 33 разполагат с голям общ резерв от време и тяхното изпълнение може да започне по-късно. Приемаме, че работите 32 и 33 ще започнат заедно с работа 20 в 164-ия час, а работа 31 — непосредствено след тях в 176-ия. Тогава и диаграмата за ресурсите ще добие вида, показан на фиг. 1.2.9, т. е. недостигът от ресурси ще се ликвидира и с разполагаемите 35 души на смяна може да се изпълни задачата.

Трябва да се има пред вид, че оптимизирането се извършва поотделно за всеки вид ресурс. Следователно трябва да се начертаят толкова диаграми, по колкото вида ресурси се извършва оптимизиране.

Диаграмата за ресурсите може да се начертае само с външните контури, които изразяват общата сума от необходимите ресурси, или да се покажат те за всяка работа поотделно. П първия начин е начертана диаграмата на фиг. 1.2.8, а по втория — диаграмата на фиг. 1.2.9.

В заданието за построяване на дълговременно огнево съоръжение има още едно условие — строежът да се извърши за 27 дни. От мрежовия график се вижда, че работите може да се извършат за 466 часа, т. е., ако се работи на една смяна по 10 часа на ден, съоръжението може да се завърши за 47 дни. Следователно част от работите трябва да се извършат на две и на три смени. Разглеждаме характера на работите и виждаме, че работите 1, 2, 3, 4, 5 и 13 задължително трябва да се извършват на една смяна, следващите работи до 18 — на две смени, а работите 19, 20 и 22 задължително на три смени непрекъснато, което се налага от технологията им (наливане на бетона и втвърдяването му). Следващите работи след 22-ра работа също може да се извършат на една и две смени. По такъв начин може да се спази заповяданият срок от 27 дни. За създаването на тази организация на работата под линейната диаграма може да се начертае скала, върху която да се изрази по колко часа ще се работи ежедневно и оттам да се види кога по дни или дати ще се извършат отделните работи и цялата операция.

В някои случаи оптимизацията по ресурси вместо по диаграма може да се извърши върху таблица, като сумираните нужди не се начертават на диаграмата, а се записват в таблицата под всеки отрязък от време под линейната диаграма. По-нататък работата протича аналогично на първия случай, с тази разлика, че не се чертае диаграма.

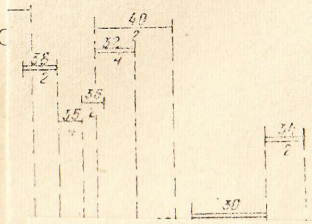
За някои типове електронноизчислителни машини има разработени програми за оптимизиране на мрежовите модели по няколко ресурса едновременно. Това дава възможност да се работи бързо и да се планира в широки мащаби.

В тази област най-богат и поучителен опит у нас е натрупан в строителните организации и Института по строителна кибернетика. Строителството за цялата година се планира в рамките на строителните райони и на цели окръзи, като се оптимизира за 7—8—9 вида ресурси, включително основните строителни материали, паричните средства и работната ръка по видове

специалис
Това дава
планира,
прекомер
шава пла

8. ВЕРО

Най-г
е оцер
спом
тер

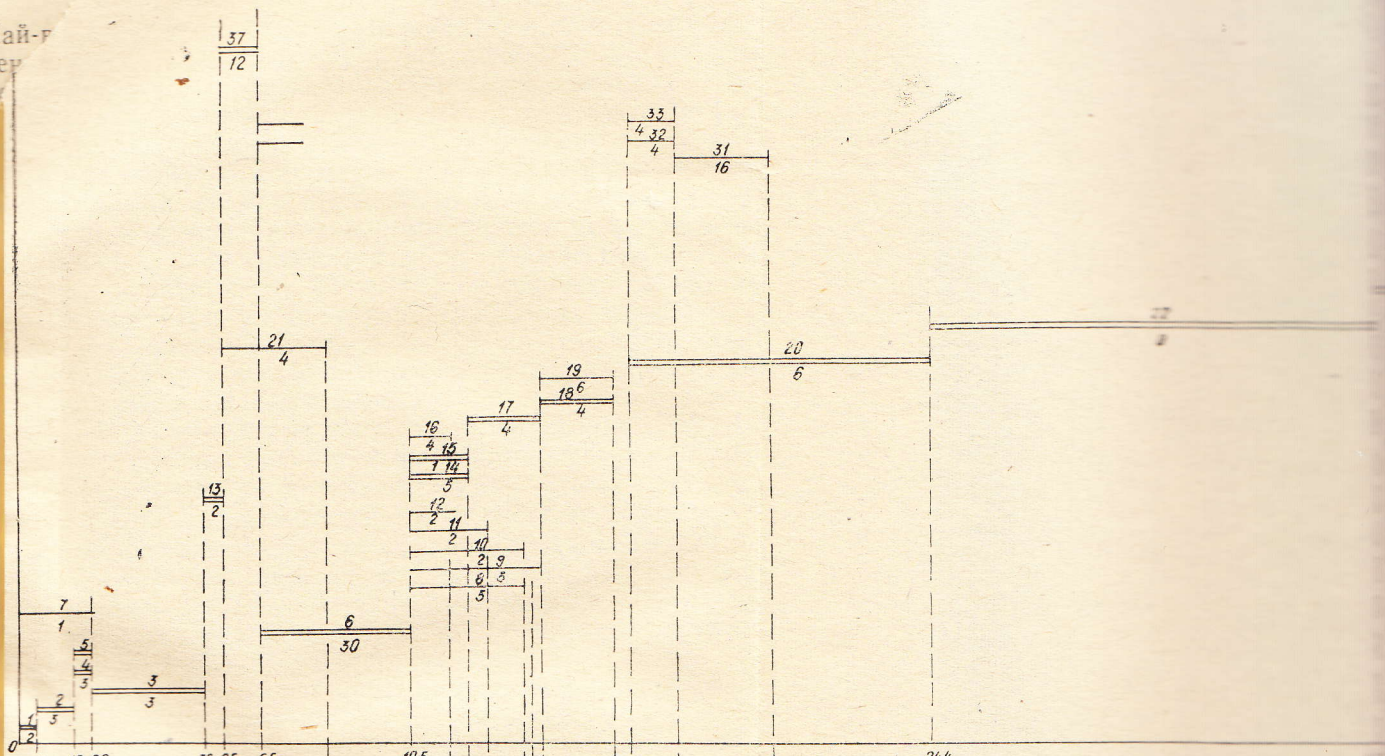


планира, но и да се м
прекомерно запасят
шава планът пор

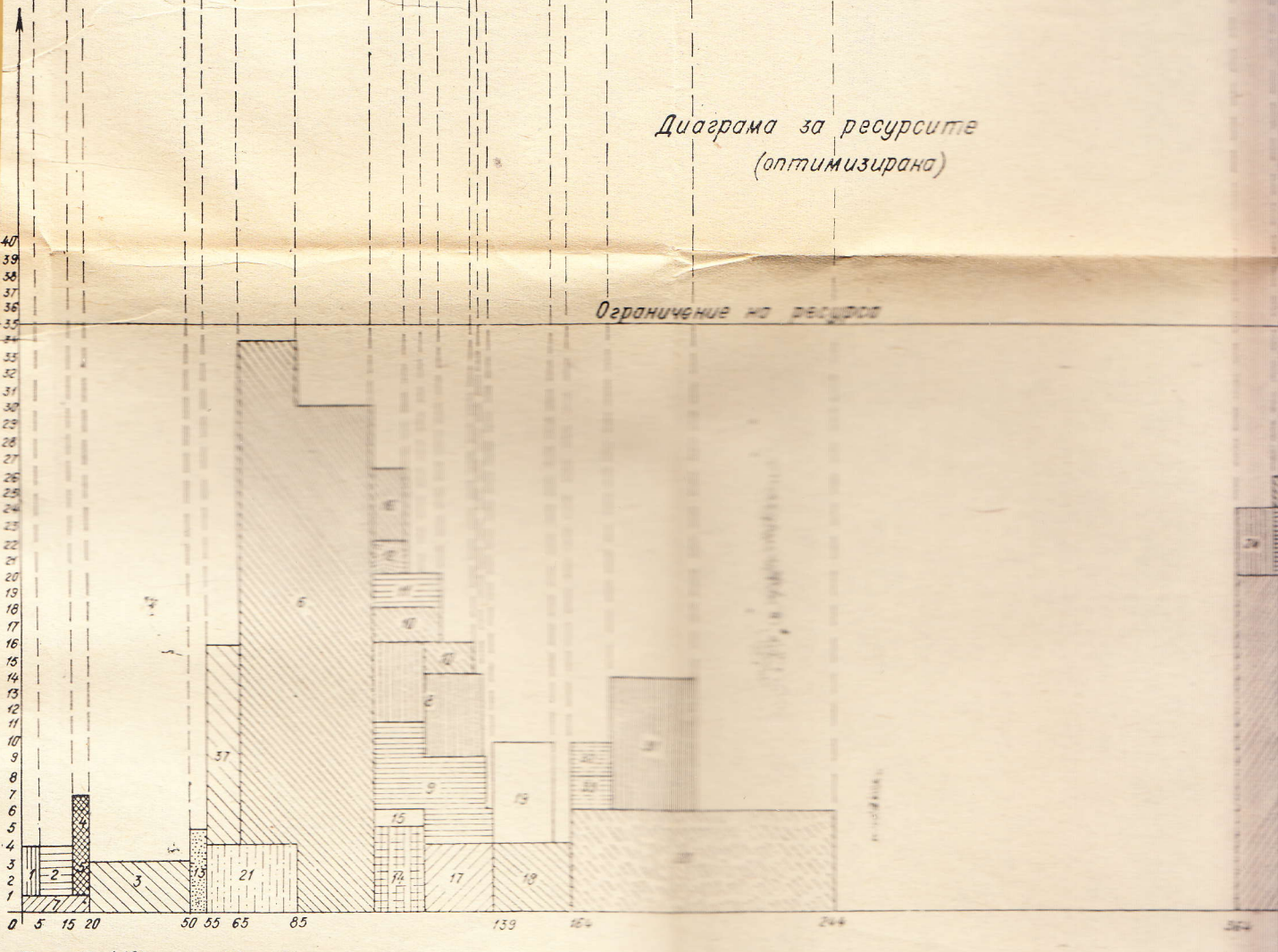
Линейна диаграма

8. ВЕРОЯТ

Най-г
е оцен
спом
тер



Диаграма за ресурсите (оптимизирана)



Пор. № 1402, стр. 121—122

Фиг. 1.2.9

специалисти (зидари, кофражисти, бетонджии, мазачи и други). Това дава възможност не само реално и перспективно да се планира, но и да се маневрира с ресурсите, без да се позволява прекомерно запасяване със строителни материали и да се нарушава планът поради недостиг на специалисти.

8. ВЕРОЯТНОСТНИ ПАРАМЕТРИ НА МРЕЖОВИТЕ МОДЕЛИ

Най-важният от параметрите на работите в мрежовия модел е оценката за продължителността на времето. Както вече се спомена, съществуват два подхода при определянето ѝ — детермиран и вероятностен.

При детермирания подход за всяка работа се задава оценка за продължителност, съобразена с конкретните условия, при които се очаква да се извърши тя. След изчисляване на мрежовия модел се получават необходимите параметри, по които се оценява планът. След оптимизиране на първоначалния план изчислените параметри на окончателния вариант служат за управление и контрол на планирания процес. Всичко това се извършва при предположение, че той ще протече точно така, както е моделиран, и че работите ще се изпълнят точно за такова време, каквото е предвидено.

При изпълнение обаче на нови работи (разработване на нов вид въоръжение), при планиране на бойните действия на войските и прогнозиране на резултатите от тях е доста трудно да се даде оценка за продължителността на работите. В този случай се прилага вероятностен метод, който дава възможност да се отчита степента на неопределеност на времето за изпълнение на всяка работа, като се използува функцията на разпределението на вероятностите. При този метод се определят три оценки за продължителността на всяка работа:

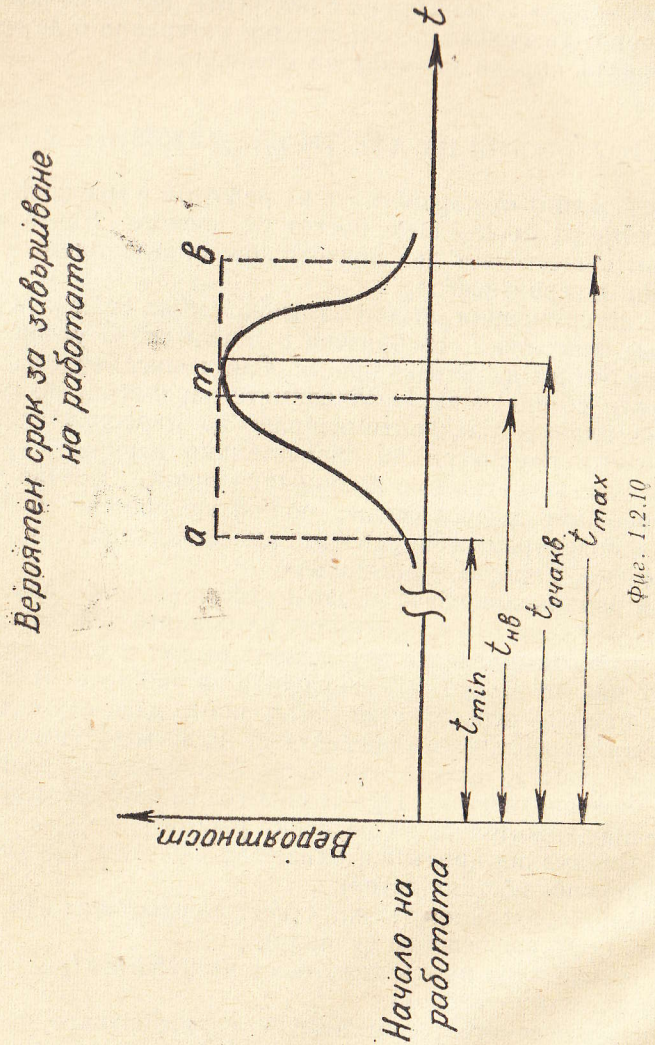
— минимална продължителност на работата t_{min} (при най-благоприятни обстоятелства);

— най-вероятна продължителност на работата $t_{нв}$ (при обикновени, често срещащи се условия);

— максимална продължителност на работата t_{max} (при най-неблагоприятни условия).

Предполагаемото разпределение на вероятната продължителност на работата, която сама по себе си е случайна величина, е изобразено с кривата на фиг. 1.2.10.

Върхът на кривата m показва най-вероятното време за изпълнение на работата. Тъй като минималната t_{min} и мак-



Фиг. 1.2.10

сималната t_{max} оценка се изменят по отношение на m, кривата на разпределението може да заема различно положение.

Окончателното време $t_{очакв.}$ за изпълнение на работата по трите оценки може да се получи с удовлетворителна точност от математическия израз

$$t_{очакв.}=\frac{t_{min}+4t_{нв}+t_{max}}{6}.$$

Понякога е трудно да се оцени най-вероятното време $t_{нв}$ за изпълнение на всяка работа. Освен това трите оценки увеличават информацията и работата по подготовката на входните данни за анализ на мрежовия модел. Затова може да се задават само две оценки — t_{max} и t_{min}, като очакваното време за продължителността на работата се изчислява по формулата

$$t_{очакв.}=\frac{3t_{min}+2t_{max}}{5}.$$

Освен математическото очакване за продължителността на работата се определя и дисперсията, т. е. мярката за неопределеност, свързана с нея. Дисперсията характеризира възможното разсейване на случайната величина относно очакваната продължителност, която се изчислява по формулата

$$D(t_{очакв.})=\left(\frac{t_{max}-t_{min}}{6}\right)^2.$$

Тези две величини са най-важните характеристики във вероятностния мрежов модел и се изчисляват най-напред. Въз основа на тях се контролира мрежовият модел, като се разкриват работите с голяма неопределеност.

Например за две работи се задават следните оценки за продължителност: първа работа — $t_{min}=3$, $t_{нв}=5$, $t_{max}=13$ седмици; втората работа — $t_{min}=3$, $t_{нв}=6$, $t_{max}=10$ седмици. В двата случая очакваното време за продължителност е еднакво.

$$t_{очакв.\ I раб.}=\frac{3+|4.5|+13}{6}=6;\quad t_{очакв.\ II раб.}=\frac{2+|4.6|+10}{6}=6.$$

Обаче по отношение на продължителността на изпълнението първата работа има по-голяма неопределеност от втората, тъй като дисперсията в нея е по-голяма.

$$D(t_{очакв.\ I раб})=\left(\frac{13-3}{6}\right)^2=2{,}76;\quad D(t_{очакв.\ II раб.})=\left(\frac{10-2}{6}\right)^2=1{,}78.$$

Колкото е по-голяма неопределеността на всяка работа, толкова е по-голяма неопределеността и на мрежовия модел. Дисперсията на сроковете за настъпване на събитията нараства от началното до завършващото събитие.

Колкото е по-сложен мрежовият модел, толкова повече неопределеността характеризира срока за завършване на разработката.

Редът за изчисляване на вероятностен мрежов модел е аналогичен на реда при детерминирания модел. Реализирана е програма за машинно построяване и вероятностен анализ на мрежовия модел. Формата и правилата за подготовката на заданието са, както при детерминирани модели, но вместо една се задават по две оценки за продължителността на всяка работа (табл. 1.2.9).

Таблица 1.2.9

№ по ред	Наименование на работата	Продължителност		Номер на непосредствено предшестващата работа	Забележка
		t_{min}	t_{max}		
1	2	3,а	3,б	4	5

В резултат на обработването на въведената в машината информация се отпечатва таблица, която дава връзката между вероятността проектът да се завърши преди изтичането на някакъв зададен срок и срока, до чието изтичане се очаква той да се завърши.

За определяне на продължителността на работите при вероятностните модели е целесъобразно да се използува моделът на груповата експертна оценка. Специалистите, които се привличат за целта, трябва да познават до съвършенство планирания процес.

Като се отчита голямото значение на оценката за продължителността на работите при планиране на процесите по метода на мрежовото планиране и управление, необходимо е да се събират статистически данни за всяка работа, свързана с бойната дейност на войските, и да се свеждат в справочни нормативни таблици.

9. УПРАВЛЕНИЕ НА ОПЕРАЦИЯТА ПОСРЕДСТВОМ МРЕЖОВ ГРАФИК

Цялата съвкупност от дейности по разработване и оптимизиране на мрежовия модел е насочена към постигането на една цел — да се осигури управлението на операцията за изпълнение на оптималния вариант. Изчислените параметри на мрежовия график дават възможност на ръководителя (командира) да поставя на подчинените си конкретни задачи и реални срокове за тяхното изпълнение, да разпределя съобразно с това наличните ресурси, да маневрира умело с резервите. Животът обаче е винаги по-сложен и от най-умния план. При изпълнението на всяка операция настъпват изменения в обстановката, голяма част от които не винаги може да се предвидят предварително. Ако те и техните последствия не се отчетат, може да се получат твърде нежелателни резултати. Планът не е фетиш, а ръководство за действие. Той трябва да е гъвкав и да се оптимизира непрекъснато съобразно с измененията на обстановката. Затова е наложително да се осигури непрекъснато събиране на информацията, която да постъпва своевременно до ръководителя (командира). Честотата на постъпване на донесенията при изпълнението на задачата зависи от характера на самата операция, бързината на измененията на обстановката и крайния срок за завършване на отделните работи и на операцията. Мрежовият график и линейната диаграма трябва да са непрекъснато пред ръководителя (командира). За него те са работен документ, върху който трябва да се отразява изпълнението на задачата. Във всеки момент ръководителят трябва да е наясно какво е предвидено по плана и какво е реалното изпълнение. При незначителни отклонения той трябва да взема съответните мерки, за да осигури изпълнението на задачите с по-висок темп и в съответствие с предвиденото в мрежовия график време. Когато обаче настъпват чувствителни изменения, мрежовият график трябва да се коригира и приведе в съответствие с реалната действителност. Това не означава, че трябва да се разработва нов мрежов график, тъй като операцията не се е изменила. Достатъчно е да се изчислят параметрите на разработения по-рано график съобразно с настъпилите изменения и да се коригират сроковете за изпълнение на задачите при новата обстановка. Тук също трябва да се проверят необходимостта и възможността за ново оптимизиране на плана по време и по ресурси. Поправките трябва да се нанасят и върху линейната диаграма, която, като по-нагледна, дава възможност за по-леко и опера-

тивно ръководство на операцията. За тази цел тя може да се съчетае със списъка на работите и тяхната продължителност. Такава линейна диаграма за построяване на дълготрайно огнево съоръжение е показана на фиг. 1.2.11.

В зависимост от общата продължителност на операцията този цикъл може да се повтаря различен брой пъти до пълното й завършване. Изобщо управлението на системата при реализиране на дадена операция трябва да протича като кибернетична система с непрекъснато действуваща пряка и обратна връзка (поставяне на задачи, изпълнение, постъпване на информация за изпълнението, коригиране на плана, поставяне на нови задачи и т. н.). В противен случай, ако някоя от връзките се прекъсне, системата се изражда и операцията престава да бъде управляем процес.

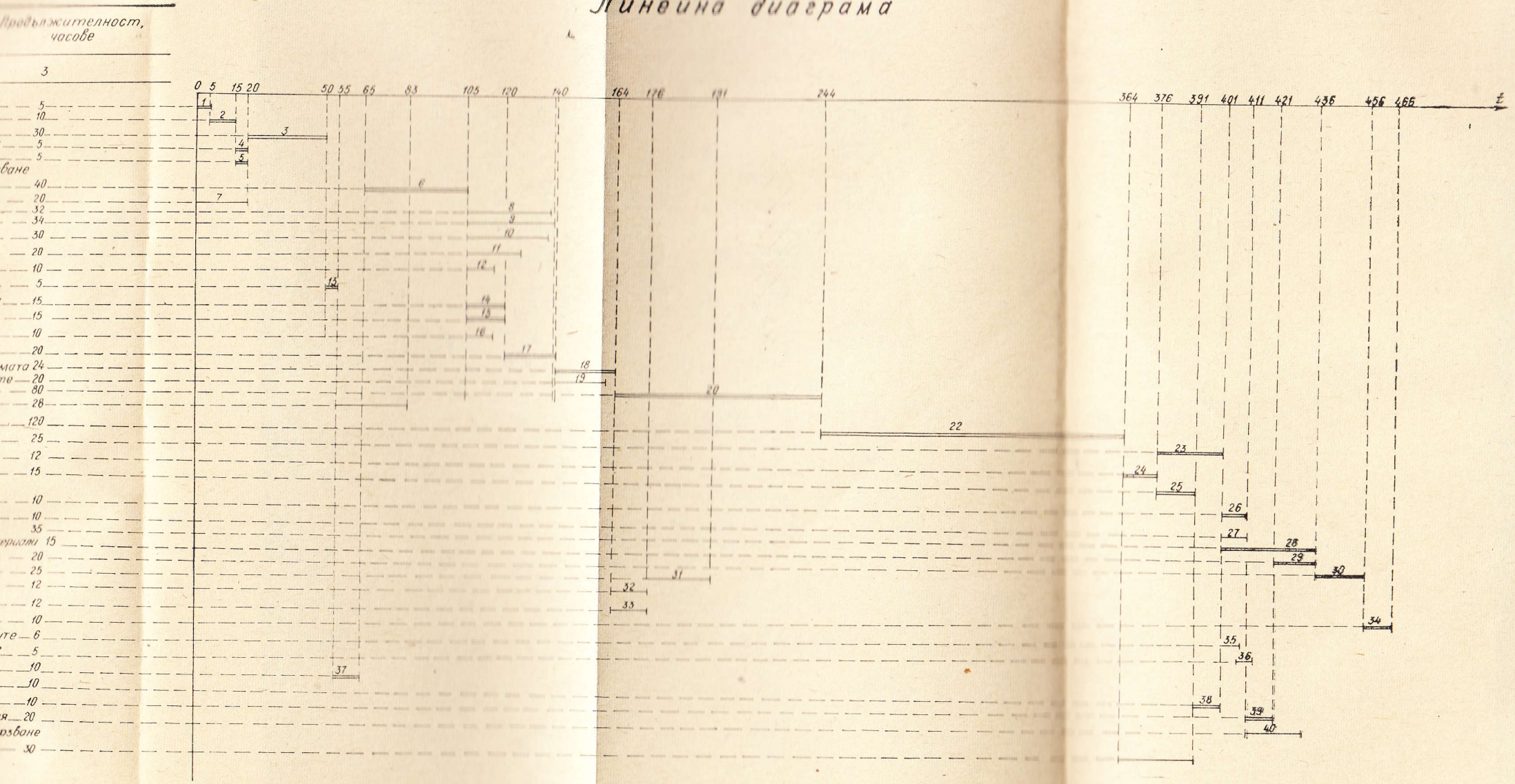
Важен момент в управлението по мрежов график е прогнозирането на по-нататъшния ход на процеса. Да ръководиш, значи да предвиждаш (още повече, когато операцията е планирана и проиграна с помощта на мрежов модел). Периодично трябва да се анализират задълбочено реалното изпълнение на задачите, възможностите на силите и средствата, осигуреността с ресурси и влиянието на всичко това върху по-нататъшния ход на процеса. Прогнозирането дава възможност да се предвидят и своевременно предотвратяват онези фактори, които застрашават изпълнението на задачите в предвидения по мрежовия график срок.

В заключение трябва да се подчертае, че мрежовото планиране и управление е съвременен високоефективен метод за изследване на операциите. Неговата универсалност и несложният му математически апарат го правят един от най-широко прилаганите методи за планиране, анализиране и оптимизиране на плановете за действие. Решенията, които се вземат въз основа на мрежов модел, може да бъдат най-целесъобразни, обосновани от обективния анализ на обстановката.

При реализиране на разработения план мрежовият график и линейната диаграма дават възможност за конкретно оперативно ръководство и контрол. При отклонение от плана има възможност да се внасят бързи изменения, съответстващи на конкретната обстановка. Без да се съставя нов график, само с преизчисляване на неговите параметри той се привежда в съответствие с обстановката и по него може да се продължи управлението на процеса.

Тези положителни качества на мрежовото планиране и управление го налагат като много надежден и перспективен метод, който бележи нов етап в развитието на науката за управлението.

Линейна диаграма



Фиг. 1.2.11

Раздел II

МАТЕМАТИЧЕСКО ПРОГРАМИРАНЕ

Математическото програмиране е съвкупност от методи за решаване на задачи, свързани с оптимално (най-добро) планиране на управляеми процеси. (Управляем процес се нарича такъв процес, върху който може да се оказва едно или друго въздействие.)

Терминът „програмиране“ не е най-сполучливият, тъй като под програмиране обикновено се разбира съставянето на изчислителната схема и програмата на дадена задача за решаване от ЕСМ. По-подходящо е названието „математическо оптимизиране“ или „математически метод за решаване на условни експериментални задачи“, но тъй като названието „математическо програмиране“ е добило вече гражданственост и е общоприето в литературата, то е използувано и в настоящия труд.

Напоследък се обръща голямо внимание на въросите по планирането и управлението във всички области на човешката дейност: промишленост, селско стопанство, транспорт, управление. Особено важно значение имат планирането и управлението на бойните действия на войските, разпределението и използуването на силите и средствата при подготовка и водене на боя.

За да се вземе обосновано правилно решение, необходимо е да се обработи огромно количество информация и от всички варианти да се избере най-икономичният, който отчита най-добре особеностите в развитието на управляемия процес. За целта трябва да се установят: условията за работа на системата; произтичащите от тях ограничения, които трябва да удовлетворява търсеното решение; критерият, по който да се оцени доколко даден вариант отговаря на поставените изисквания.

Задачите в математическото програмиране обикновено се свеждат до намиране на максимума (минимума) на функцията

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

при следните условия:

$g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq 0$, $i = 1,2,\ldots n$, които се наричат още изходни параметри.

В зависимост от вида на функциите f и g_i математическото програмиране се дели на линейно и нелинейно. Ако f и g_i са линейни функции на променливите x_j, задачите се решават чрез линейното програмиране. Всички останили задачи на математическото програмиране се решават чрез нелинейното програмиране.

В зависимост от това, дали изходните ограничаващи условия (параметри) са напълно определени или случайни величини, математическото програмиране може да се раздели на програмиране при пълна информация и стохастическо програмиране.

Методите на математическото програмиране се делят още на едноетапни (статистически) и многоетапни (динамически) в зависимост от това, дали планирането се извършва на един етап или се отчитат и следващите етапи.

Възможни са и други признаци за класифициране на методите на математическото програмиране. Например, ако търсените неизвестни могат да заемат само целочислени стойности, говори се за целочислено програмиране, а когато ограничаващите условия на задачата може да се изменят в някакви граници, програмирането се нарича параметрично.

При формиране на задачите от управлението и планирането особено внимание трябва да се отделя на избора на ограничаващите условия и на показателя, въз основа на който се търси екстремума (максимума или минимума) на функцията. Той се нарича критерий за оптималност.

Исторически бележки

Математическото програмиране е нова, бързо развиваща се дисциплина. Най-пълно и най-рано развита област от математическото програмиране е линейното програмиране. Първите работи в тази област принадлежат на унгарския математик Егервари, публикувал през 1931 г. статия, посветена на проблема за избора, и на съветския математик Л. В. Канторович, издал през 1939 г. своя труд „Математически методи на организацията и планирането на производството“, в който се установяват редица съществени резултати по линейно програмиране и се формулира методът на разрешаващите множители, тясно свързан с действената проблема в линейното програмиране. В този труд се дава и геометричната интерпретация на задачите от линейното програмиране.

През 1939 г. Канторович и Гавурин издават сборник „Проблеми за повишаване на ефективността в работата на транспорта“, в който чрез метода на разрешаващите множители решават транспортната задача.

Цялостна теоретична разработка на задачите на линейното програмиране и на метода на последователното подобряване на плана, наречен още симплекс-метод (общ и универсален метод за решаване на задачите на линейното програмиране), дава американският математик Дж. Данциг през 1949 г.

В областта на линейното програмиране оттогава работят много учени и се дават редица методи (алгоритми) за решаване както на общата задача на линейното програмиране, така и на някои частни задачи.

Наличните работи по нелинейно програмиране принадлежат на Кун и Такер (1951 г.), Голщейн, Зуковицки и други, а по динамично програмиране — на Белман.

Сега методите на математическото програмиране се прилагат най-широко при планирането и управлението на промишлеността, транспорта, селското стопанство, военното дело и др.

Глава първа

ИЗПЪКНАЛИ МНОЖЕСТВА И ИЗПЪКНАЛИ ФУНКЦИИ

1. МНОЖЕСТВА И ПРОСТРАНСТВА

1.1 Множества

Понятието множество е толкова общо, че е трудно да му се даде определение, което да не се свежда просто до замяна на думата „множество“ с нейните синоними съвкупност, набор от елементи и т. н. Изобщо всяка съвкупност от произволен вид обекти се нарича множество, а обектите — елементи на множеството. Множествата се означават с главни букви A, B, . . ., а техните елементи — с малките букви a, b, . . . Твърдението, че „елементът a принадлежи на множеството A“, символично се записва $a \in A$. Записът $a \notin A$ означава, че елементът a не принадлежи на множеството A.

Ако множеството е крайно, т. е. състои се от n елемента, то може да се определи чрез изброяване на всичките му елементи (например множеството от 25 слушатели от 320 класно отделение: Андреев, Борисов, . . .) или чрез някое тяхно общо свойство (например слушатели от 320 кл. отделение). Ако множеството е безкрайно, т. е. съдържа безкраен брой елементи, принадлежността към него се определя по някакво правило, което показва свойството, което те притежават. Например

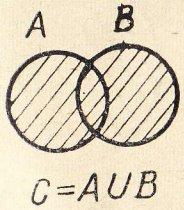
$$A=\{x|0\leq x\leq a\}$$

означава, че множеството A съдържа само тези числа x, които се намират между 0 и a. Символът вляво от чертата показва как се означават елементите на множеството A, а вдясно от нея е дадено правилото, по което се определя принадлежността към множеството.

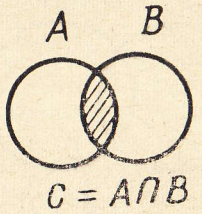
Понякога не се знае предварително дали съдържа определено множество поне един елемент (например множеството от корените на дадено уравнение). Затова е целесъобразно да се въведе понятието **празно** множество, т. е. множество $\varnothing$, което не съдържа нито един елемент.

Нека са дадени две множества A и B. Ако всички елементи на множеството A влизат и в множеството B, казва се, че A **е подмножество на** B и се записва $A \subset B$. Например множеството на положителните цели числа е подмножество на множеството на целите числа.

Ако $A \subset B$ и $B \subset A$, двете множества съдържат едни и същи елементи и означаваме $A=B$. Нека A и B са произволни множества. **Сума** или **обединение** $C=A \cup B$ се нарича множеството, съставено от всички елементи, принадлежащи поне на едно от множествата A и B (фиг. 2.1.1.).



Фиг. 2.1.1



Фиг. 2.1.2

Сечение $C=A \cap B$ на множествата A и B се нарича множеството, състоящо се от всички елементи, принадлежащи както на множеството A, така и на множеството B (фиг. 2.1.2.).

Разлика $C=A/B$ на множествата A и B се нарича съвкупността от всички елементи на множество A, които не се съдържат в множество B (фиг. 2.1.3). Ако B е **собственото подмножество** на A, т. е. всички елементи на B принадлежат и на A, тогава $C=A/B$ се нарича още и **допълнение** на B до A (фиг. 2.1.3).

По аналогичен начин може да се определи сума и произведение на произволен (краен или безкраен) брой множества. Ако A_i са произволни множества, тяхната сума $C=\bigcup_i A_i$ представлява съвкупност от елементи, всеки от които принадлежи поне на едно от множествата A_i. Сечението $C=\bigcap_i A_i$ на множествата A_i е множеството от елементи, принадлежащи на всички множества A_i.

Операциите събиране и умножение (пресичане) на множества удовлетворяват комутативния, асоциативния и дистрибутивния закони[1], т. е.

[1] Могат да се установят чрез непосредствена проверка.

$$A \cup B = B \cup A; \qquad A \cap B = B \cap A;$$
$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C); \qquad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C);$$
$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C); \qquad (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

Множеството S се нарича **наредено**, ако в него може да се определи такава операция R (например операцията „по-малко **или равно** ($\leq$)", че да са в сила следните отношения:



Фиг. 2.1.3

1) xRx за всички $x \in S$ (рефлективност);
2) от xRy и yRz следва, че xRz (транзитивност);
3) от xRy и yRx следва, че $x=y$

Например по отношение на операцията „$\leq$" множеството от целите числа е наредено, тъй като: 1) $x \leq x$; 2) от $x \leq y$ и $y \leq z$ следва, че $x \leq z$, 3) от $x \leq y$ и $y \leq x$ следва, че $x=y$.

Множеството от двойки (a, b), за които $a \in A$, $b \in B$, се нарича декартово произведение на множествата A и B и се означава с $A \times B$. Елементите на множеството $A \times B$ се разглеждат не като два обекта, а като двойка обекти. $A \times B$ е наредено множество в смисъл, че първият елемент от двойката винаги се взема от първото множество, а вторият — от второто.

Очевидно е, че $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$. Следователно може да се определи декартовото произведение на произволен краен брой множества $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \prod_{i=} A_i$. Елементите на това множество са n-мерни, като i-така съставяща на n-мерния елемент a винаги принадлежи на i-то множество и се нарича **компонента** или **координата** на n-мерния елемент $a=(a_1, a_2, \ldots a_n)$.

1.2. Метрични пространства

Метрично пространство се нарича двойката (S, ρ), състояща се от някакво множество S и неотрицателна реална функция $\rho(x, y)$ (разстояние), определена за произволни x, $y \in S$ и такава, че:

1) $\rho(x, y)=0$ тогава и само тогава, когато $x=y$;
2) $\rho(x, y)=\rho(y, x)$;
3) неравенство на триъгълника $\rho(x, y)+\rho(y, z) \geq \rho(x, z)$.

Пространството, което се използува най-често, се определя по следния начин.

Нека R е множество от реални числа. Тогава множеството, зададено от декартовото произведение на n-те множества $R \times R \times \ldots \times R = R^n$, се нарича **реално n-мерно пространство.** Ако в R^n е въведено определено разстояние, т. е. функция $\rho(X, Y)$, удовлетворяща горните условия, (R^n, ρ) се нарича реално n-мерно метрично пространство.

Елементите на R^n са n-мерни, т. е. наредени n-торки от реални числа. Ако $X \in R^n$, то $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Елементите на R^n се наричат точки или вектори. Функцията $\rho(X, Y)$ може да се определи по различен начин, за да удовлетворява горните условия. Например, ако

$$\rho = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2},$$

двойката (R^n, ρ) се нарича **n-мерно евклидово** пространство и се означава чрез E^n.

В R^n функцията $\rho(X, Y)$ може да се определи още и по следния начин:

$$\rho_1(X, Y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|.$$

Метричното пространство (R^n, ρ_1) се означава с R_1^n. Ако $\rho_0(X, Y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$, метричното пространство (R_1^n, ρ_0) се означава с R_0^n.

Например, ако $X, Y \in R^3$, $X=(3, -4, 2)$, $Y=(5, 2 -3)$, то

$$\rho = \sqrt{(3-5)^2 + (-4-2)^2 + (2-(-3))^2} = \sqrt{4+36+25} = \sqrt{65};$$

$$\rho_1=\sum_{i=1}^{3}|x_i-y_i|=|3-5|+|-4-2|+|2+3|-2+6+5=13;$$

$$\rho_0=\max_{1\leq i\leq 3}|x_i-y_i|=\max|2,\ 6,\ 5|=6.$$

Много често, когато вече е определена метриката, метричното пространство (S,ρ) се означава само с една буква S, т. е. със същия символ, с който се означава множеството S.

При зададено разстояние ρ в пространството S, ε — околност на точка $X\in S$ се определя като множество от всички точки Y, за които $\rho(X,Y)<\varepsilon$, където ε е реално положително число, което обикновено се приема достатъчно малко.

Казва се, че множеството $G\subset S$ е **отворено**, ако всяка точка $X\in G$ има ε-околност (при достатъчно малко ε), която изцяло да лежи в G. Например множеството $G=\{x|0<X<1\}$ е отворено, тъй като за произволна точка $X=(1-h)\in G$ и разстояние $\rho(X,Y)=|X-Y|$ околността $U_\varepsilon(x)=\left\{Y|\rho(X,Y)<\frac{h}{2}\right\}$ принадлежи изцяло на G.

Нека $G\in S$. Казва се, че X е **вътрешна** точка на G, когато поне една ε-околност на X се съдържа в G. Y е **външна** точка на G, ако поне една нейна ε-околност не се съдържа в G. Z се нарича **гранична** точка на G, ако всяка нейна ε-околност съдържа както принадлежащи, така и непринадлежащи на G точки. За разгледания по-горе пример $x=\frac{3}{4}$ е вътрешна, $x=1$ — гранична, а $x=1+\varepsilon$ — външна точка (при всяко $\varepsilon>0$).

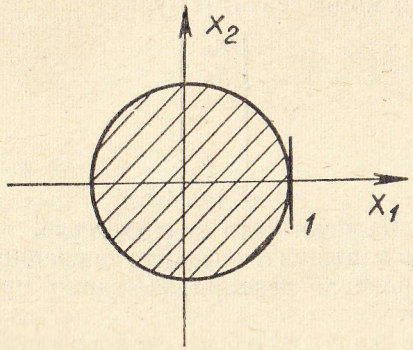
Точката $X^*\in G$ се нарича **точка на сгъстяване** за множеството G, ако всяка нейна ε-околност съдържа безкраен брой точки от G.

За множеството $G=\{x|0<x<1\}$ всяка точка е точка на сгъстяване. Точките 0 и 1, които не принадлежат на множеството G, също са точки на сгъстяване, тъй като всяка тяхна ε-околност съдържа безкрайно много точки, принадлежащи на G. Множеството от всички точки на G и всички точки на сгъстяване $\hat{G}$ се нарича **затваряне** на G.

Множеството G се нарича **затворено**, когато съдържа

всички свои точки на сгъстяване. Например множеството $G=G\cup\hat{G}=\{x|0\leq x\leq 1\}$ е затворено.

Друго важно свойство на множествата в метричните пространства е ограничеността. Множеството G се нарича **ограничено**, ако разстоянието между две негови произволни точки е по-малко или равно на някакво крайно положително число, т. е. $\rho(X,Y)\leq\rho_0$ за произволни $X,Y\in G$.



Фиг. 2.1.4

Множеството G от горния пример е ограничено, тъй като $\rho(X,Y)\leq 1$ за всяко $X,Y\in G$.

Нека разгледаме още един пример. Нека $T=\{x|x_1^2+x_2^2<1\}$ и $\rho=\sqrt{(x_1-y)^2+(x_2-y_2)^2}$. Това е множеството от всички точки, принадлежащи на кръга с център $O=(0,0)$ и радиус $r=1$ (фиг. 2.1.4) без точките от окръжността $x_1^2+x_2^2=1$. Множеството T е отворено. Точките, за които $x_1^2+x_2^2<1$, са вътрешни, тези, за които $x_1^2+x_2^2=1$, са гранични, а тези, за които $x_1^2+x_2^2>1$, са външни. Точки на сгъстяване $\hat{T}$ на T са всички вътрешни точки плюс граничните точки.

Множеството $\overline{T}=\{X|x_1^2+x_2^2\leq 1\}$ е затворено, тъй като $\overline{T}=\hat{T}\cup T$.

Множествата T и $\overline{T}$ са ограничени, защото $\rho(X,Y)\leq 2$ за всяко $X,Y\in T$ или $X,Y\in\overline{T}$.

В по-сложните случаи, за да се докаже, че едно множество е ограничено, достатъчно е да се покаже, че то може изцяло да се затвори от някаква проста геометрична фигура — хиперкуб или хиперсфера.

Затворено и ограничено множество, принадлежащо на E^n, се нарича **компактно** множество.

2. ВЕКТОРИ И МАТРИЦИ

2.1. Действия с вектори

Както вече беше отбелязано в 1.2, векторите са n-мерни елементи, принадлежащи на метричните пространства R^n или E^n. Те се записват във вида $X=(x_1,x_2,\ldots,x_i,\ldots,x_n)$, където x_i е i-тата координата или i-тата компонента на вектора X. Така записан, векторът X се нарича **вектор-ред**. Ако се запишат вертикално компонентите му

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix},$$

казва се, че X е написан като **вектор-стълб.**

С векторите се извършват следните операции: умножение със скалар, събиране на вектори, скаларно произведение на два вектора и др.

Умножение на вектор със скалар. Ако λ е реално число, а X — вектор, векторът $\lambda X=(\lambda x_1,\lambda x_2,\ldots,\lambda x_1,\ldots,\lambda x_n)$.

Събиране на вектори. Ако $X,Y\in E^n$,

$$X+Y=(x_1+y_1,\ldots,x_i+y_i,\ldots,x_n+y_n).$$

Тези действия притежават следните свойства:

$$(X+Y)+Z=X+(Y+Z); \quad 1.X=X;$$
$$X+Y=Y+X; \quad \lambda(X+Y)=\lambda X+\lambda Y;$$
$$X+(-1)X=\vec{0}; \quad (\lambda+\mu)X=\lambda X+\mu X;$$
$$0.X=\vec{0}; \quad \lambda(\mu X)=\lambda\mu X,$$

където $\lambda,\mu,0,1,\alpha\in R$, т. е. те са реални числа (скалари), а $X,Y,Z,\vec{0}\in E^n$, т. е. те са вектори. С $\vec{0}$ е означен векторът, всички кординати на който са нули.

Когато от текста е ясен смисълът на написаното и няма опасност от възникване на недоразумения, със символа 0 се означават и нулевият вектор, и скаларът нула.

Векторно пространство се нарича пространството от елементи, удовлетворяващи горните равенства. Векторното пространство зависи от двете множества: R^n (в частност E^n), на което принадлежат векторите, и R, на което принадлежат скаларите $\lambda,\mu,0,1$.

Друга важна операция в R^n (E^n) е операцията **скаларно произведение** на два вектора. Нека $X,Y\in E^n$, X е вектор-ред,

а Y — вектор-стълб със същата размерност. Тогава скаларното произведение на двата вектора се означава с (X,Y) или само с XY и то се определя от равенството

$$XY=\sum_{i=1}^{n} x_i y_i .$$

Например, ако

$$X=(3,2,-1); \qquad Y=\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix};$$

$$XY=(3.2+2(-3)+(-1).5)=6+(-6)+(-5)=-5.$$

Очевидно скаларното произведение на два вектора е число.

Ако X е вектор-стълб, векторът-ред X' със същите компоненти се нарича транспониран, а самата операция — транспониране. От определението следва, че $(X')'=X$. Скаларното произведение на вектори е реална функция, определена за всяка двойка $X,Y\in E^n$, чиято стойност е число. Тя удовлетворява следните условия:

1. $XY=YX$;
2. $(x_1+x_2)Y=x_1Y+x_2Y$;
3. $(\lambda X)Y=\lambda(XY)$;
4. $XX\geqslant 0$.

Скаларното произведение на векторите X' и X е

$$X'X=\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2 .$$

Дължина на вектора X или **норма** се нарича положителната стойност на квадратния корен от $X'X$. Ако скаларното произведение на двата вектора е нула, казва се, че те са: **ортогонални.**

2.2 Линейно подпространство. Размерност и базис

Нека V е векторно пространство и L е непразно подмножество на пространството V със следните свойства:

1) ако $X,Y\in L$, то $X+Y\in L$;
2) ако $\lambda\in R$, $X\in L$, то $\lambda X\in L$.

Тогава L се нарича **линейно или векторно подпространство на векторното пространство** V. Например, ако $V=E^n$, множеството вектори, k-тата компонента на които е равна на нула, образува линейно подпространство в E^n.

Нека $V,V^2,\ldots,Vm \in V$. Векторите $V^1,V^2,\ldots,V^m$ са **линейно зависими**, ако съществуват числа $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m$, поне едно от които да е различно от нула и такива, че

$$\sum_{i=1}^{m}\lambda_i V^i=0.$$

Ако не съществуват такива числа, векторите са **линейно независими**.

Векторът X е **линейна комбинация** на векторите $V^1,V^2,\ldots,V^m$, ако съществуват такива числа $\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_m$, че

$$X=\sum_{i=1}^{m}\mu_i V^i .$$

Например векторите $e'=(1,0,\ldots,0)$, $e^2=(0,1,0,\ldots,0)$, $e^n=(0,0,\ldots,0,1)$, принадлежащи на E^n, са линейно независими, защото равенството $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i e^i=0$ е еквивалентно на n независими равенства $\lambda_i e^i=0$, които се удовлетворяват само при $\lambda_i=0$ за $i=1,2,\ldots,n$.

Ако $X=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in E^n$ е произволен вектор, то $X=\sum_{i=1}^{n}x_i e^i$, т. е. векторът $X\in E^n$ може да се представи във вид на линейна комбинация на векторите $e^i, i=1,2,\ldots,n$, където $\mu_i=x_i$

Теорема 1. Произволни $m+1$ вектори, всеки от които е линейна комбинация на m-те вектора $V^1,V^2,\ldots,V^m$, са линейно зависими.

Доказателство. Нека векторите $X^1,X^2,\ldots,X^{m+1}$ са линейни комбинации на векторите $V^1,V^2,\ldots,V^m$. Тогава

$$X^j=\sum_{i=1}^{m}\lambda ij V^i ,\quad j=1,2,\ldots,m+1.$$

Трябва да се докаже, че съществуват числа μ_j, поне едно от които е различно от нула и

$$\sum_{j=1}^{m+1}\mu_j X^j=0.$$

Теоремата се доказва по индукция. Ако $m=1$, то $X'=\lambda_1.V$ и $X^2=\lambda_2.V$. При $\lambda_1=\lambda_2=0$ X^1 и X^2 са линейно зависими, т. е. $X^1=0$, $X^2=0$ и при произволни $\mu_1,\mu_2\neq 0$ $\sum_{j=1}^{2}\mu_j X^j=0$. Да допуснем, че $\lambda_1\neq 0$ и да вземем $\mu_1=-\lambda_2$, $\mu_2=\lambda_1$. Тогава

$$\mu_1 X^1+\mu_2 X^2=-\lambda_2\lambda_1 V+\lambda_1\lambda_2 V=0.$$

С това теоремата е доказана при $m=1$. Предполагаме, че твърдението е вярно при $m=k-1$. Да докажем, че е вярно и при $m=k$, т. е.

$$X^j=\sum_{i=1}^{k}\lambda_{ij}V^i,\quad j=1,2,\ldots,k+1.$$

Нека $\lambda_{11}\neq 0$. Определяме векторите

$$Z^j=X^j-\frac{\lambda ij}{\lambda_{11}}V^i$$

(сумираме от $i=2$, тъй като коефициентът пред V^1, $\frac{\lambda^1 j}{\lambda_{11}}=0$). По този начин всеки вектор Z_j е линейна комбинация на векторите $v^2,v^3,\ldots,v^k$ и векторите Z^j трябва да са линейно зависими, т. е.

$$\sum_{j=1}^{k+1}\mu_j Z^j=\sum_{j=1}^{k+1}\mu_j X^j-\frac{1}{\lambda_{11}}\left(\sum_{j=1}^{k+1}\mu_j\lambda_{1j}\right)X^1=0 \text{ и } \mu_j\neq 0$$

поне за едно j.

Да положим $\mu_1'=\mu_1-\frac{1}{\lambda_{11}}\left(\sum_{j=1}^{k+1}\mu j\lambda_{1j}\right)$, а за $j=2,3,\ldots,k$ $\mu_j'=\mu_j$

Тогава

$$\sum_{j=1}^{k+1}\mu_j X^j=0,\ \mu_j^0=0 \text{ за някое } j,$$

т. е. X^j са линейно зависими. С това теоремата е доказана.

Нека L е линейно подпространство във V. Максималният брой линейно независими вектори, които може да се изберат в L, се нарича **ранг** или **размерност** на L. Например размерността на E^n е n, тъй като n-те единични вектори $e^1, e^2,\ldots,e^n$ са линейно независими и всеки вектор $X\in E^n$ може да се представи като тяхна линейна комбинация. По теоремата следва, че произволни $n+1$ вектори са линейно зависими. Следователно максималният брой линейно независими вектори в E^n е n.

Ако размерността на линейното подпространство L е k то произволни k-линейно независими вектори образуват базис в L.

Теорема 2. Системата линейно независими вектори $V^1,V^2\ldots,V^k$ образуват базис в L тогава и само тогава, когато всеки вектор от L може да се представи като линейна комбинация на векторите $V^1,V^2,\ldots,V^n$.

Доказателство. От теорема 1 следва, че ако всеки вектор от L може да се представи като линейна комбинация на векторите $V^1,V^2,\ldots,V^k$, то всички $k+1$ вектори са линейно независими. Тогава L има размерност k, а векторите $V^1,V^2,\ldots,V^k$ образуват базис.

Ако векторите $V^1,V^2,\ldots,V^k$ образуват базис, то размерността на L е k и векторите $V^1,V^2,\ldots,V^k,X$ са линейно зависими за всяко $X\in L$, т. е.

$$\sum_{i=1}^{k}\lambda_i V^i+\lambda_{k+1}X=0,$$

където $\lambda_{k+1}\neq 0$, защото в противен случай векторите V^i, $i=1,2,\ldots,k$ са линейно зависими. Следователно

$$X=\frac{1}{\lambda_{k+1}}\sum_{i=1}^{k}\lambda_i V^i,$$

т. е. $X\in L$ се представя като линейна комбинация на векторите V^i, $i=1,2,\ldots,k$.

Да разгледаме един пример. Нека $L=E^2$. Тогава векторите $V^1=(2,3)$ и $V^2=(-2,4)$ са линейно независими и образуват базис в E^2. Наистина

$\mu_1V^1+\mu_2V^2=0$ е еквивалентно на системата

$$\begin{cases}2\mu_1-2\mu_2=0\\ 3\mu_1+4\mu_2=0,\end{cases}$$

откъдето се получава $\mu_1=\mu_2=0$.

Нека вземем произволен вектор $X=(3,1)$, който може да се представи чрез векторите от базиса по следния начин. Търсят се такива λ_1 и λ_2, че $\lambda_1V^1+\lambda_2V^2=X$, т. е. $2\lambda_1-2\lambda_2=3$ и $3\lambda_1+4\lambda_2=1$. Като се реши системата, получава се $\lambda_1=1$, $\lambda_2=-1/2$, т. е.

$$X=V^1-1/2V^2.$$

2.3. Матрици и действия с тях.

Матрица с размери $m\times n$ се нарича всяка правоъгълна таблица от числа с m реда и n стълба, т. е.

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}a_{12}\ldots a_{1n}\\ a_{21}a_{22}\ldots a_{2n}\\ \vdots\\ a_{m1}a_{m2}\ldots a_{mn}\end{pmatrix}.$$

Много често матриците се записват по-просто: $A=\|a_{ij}\|m\times n$ или $A=(a\ j)m\times n$.

Матрицата A с размери $m\times n$ може да се разглежда като съставена от m вектора-редове $A_{i_0}=(a_{i1},a_{i2},\ldots,a_{in})$ с по n компоненти или като съставена от n вектора-стълбове $A_{0j}=(a_{1j},a_{2j},\ldots,a_{mj})$ с по m компоненти.

Например матрицата $A=\begin{pmatrix}3&-2&5\\ -4&0&5\end{pmatrix}$ с размери 2×3

е съставена от два вектора-редове $(3, -2, 5)$ и $(-4, 0, 2)$ или от три вектора-стълбове $\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Векторите-редове с по n компоненти може да се разглеждат като матрици с размери $(1 \times n)$, а векторите-стълбове с по m компоненти — като матрици с размери $(m \times 1)$.

Матриците с размери $n \times n$ се наричат **квадратни**.

Над матриците може да се дефинират следните операции: умножение на матрицата със скалар, събиране, транспониране и умножаване на матрици.

Умножение на матрица със скалар. Произведението λA, където λ — скалар, а $A=(a_{ij})m \times n$ е матрица с елементи λa_{ij}, т. е. $\lambda A=(\lambda a_{ij})m \times n$.

Събиране на матрици. Тази операция е определена само за матрици с еднакви размери. Ако $A=(a_{ij})m \times n$, $B=(b_{ij})m \times n$, сумата на матрицата A и B е матрица $C=A+B$ с елементи $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ и размерност $m \times n$.

Матрицата с размерност $m \times n$, всички елементи на която са нули, се нарича нулева и се означава със символа 0 или с O, когато от текста е ясно дали става дума за матрица или за реално число.

Ако A, B и C са матрици с една и съща размерност, а λ и μ са числа, в сила са следните равенства:

$$(A+B)+C=A+(B+C);\ A=A;$$
$$A+B=B+A;\ \lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B;$$
$$A+(-1)A=0;\ (\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A;$$
$$O.A=0;\ \lambda(\mu A)=\lambda\mu A,$$

т. е. асоциативният, комутативният и дистрибутивният закон по отношение на разглежданите операции.

Ако A е матрица с размерност $m \times n$, $A=(a_{ij})\ m \times n$, транспонирана на матрица A, се нарича матрица с размери, $n \times m$ и с елементи $(a_{ij}$ и се означава с A' или A^T, т. е. $A^T=(a_{ji})n \times m$. С други думи, операцията транспониране означава замяна на редовете на матрицата A със стълбовете ѝ (първият ред става първи стълб и т. н.), т. е.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11}, a_{12}, \ldots a_{1n} \\ a_{21}, a_{22}, \ldots a_{2n} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m1} a_{m2} \ldots a_{mn} \end{pmatrix};\quad A^T=\begin{pmatrix} a_{11} a_{21} \ldots a_{m1} \\ a_{12} a_{22} \ldots a_{m2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{1n} a_{2n} \ldots a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Например, ако $A=\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -3 & 2 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}$,

$$A^T=\begin{pmatrix} 5 & -3 & 4 \\ 0 & 2 & -6 \end{pmatrix}.$$

Умножение на матрици. Произведението на две матрици A и B е определено само тогава, когато броят на стълбовете на първата е равен на броя на редовете на втората. Ако $A=(a_{is})m \times n$, $B=(b_{sj})k \times n$, елементите на матрицата $C=AB$, C_{ij} се пресмятат по следния начин: $C_{ij}=A_{i_0}B_{0j}=\sum_{i=1}^{k} a_{is}b_{sj}$. Това означава, че елементът е равен на скаларното произведение на i-тия ред на матрицата A и j-тия стълб на матрицата B. За да е възможна тази операция, размерностите на вектора-ред A_{i_0} и вектора-стълб B_{0j} трябва да са едни и същи.

За броя на редовете на матрицата A и на стълбовете на матрицата B няма ограничения. Броят на редовете на матрицата A определя броя на векторите-редове A_{i_0}, а следователно и на редовете на матрицата C. Аналогично броят на стълбовете на матрицата B определя броя на стълбовете на матрицата C, следователно тя е с размери $m \times n$.

За операцията умножение на матрици комутативният закон не е в сила, т. е. $AB \neq BA$, тъй като матрицата AB има размери $m \times n$, а произведението AB въобще може да не е определено, тъй като броят на стълбовете на матрицата B може да не е равен на броя на редовете на матрицата A. Дори при $A=(a_{is})m \times n$, $B=(b_{sj})m \times n$ произведението AB е матрица с размерност $m \times m$, а произведението BA — матрица с размерност $n \times n$.

Да разгледаме един пример. Нека

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

В този случай са определени двете произведения AB и BA, т. е.

$$AB=\begin{pmatrix}-7&-2\\21&6\end{pmatrix},\quad BA=\begin{pmatrix}11&5&8\\-4&-12&-8\\-7&7&0\end{pmatrix}.$$

За операцията умножение на матрици са в сила асоциативният и дистрибутивният закон

$$A(BC)=(AB)C;$$
$$(A+B)C=AC+BC;$$
$$A(\lambda B)=\lambda AB,$$

ако матриците A, B и C имат необходимите за операцията умножение размерности.

Може да се провери чрез непосредствено умножение, че ако $A=(a_{is})m\times k$, $B=(b_{sj})k\times n$, вярно е следното равенство:

$$(AB)^{\tau}=B^{\tau}A^{\tau}.$$

Ако A е матрица с размери $m\times n$, а X е n-мерен вектор-стълб, т. е. матрица с размери $m\times 1$, определено е произведение AX, което представлява матрица с размери $m\times 1$, т. е. вектор-стълб с размерност m. По такъв начин матрицата A преобразува векторите от E^n в E^m

Ако $У\in E^m$ е вектор-ред, произведението $УA$ е n-мерен вектор-ред, т. е. чрез умножение отляво матрицата A преобразува E^m в E^n.

Максималният брой линейно независими стълбове на матрицата A е равен на максималния ѝ брой линейно независими вектор-редове и се нарича нейн **ранг**.

Равенството

$$AX=B,$$

(където $A=(a_{ij})m\times n$ е матрица с размерност $m\times n$ и ранг r, $B=(b_1,b_2,\ldots,b_m)^{\tau}$ — вектор- стълб, а $X=(x_1,x_2,\ldots,x_n)^{\tau}$ — неизвестен вектор-стълб) определя система линейни уравнения с постоянни коефициенти

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i,\ i=1,2,\ldots,m.$$

Тази система може да се запише и по следния начин:

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ \ldots\ +a_{1n}x_n=b_1\\
&a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ \ldots\ +a_{2n}x_n=b_2\\
&\cdot\qquad\qquad\qquad\cdot\\
&\cdot\qquad\qquad\qquad\cdot\\
&\cdot\qquad\qquad\qquad\cdot\\
&a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ \ldots\ +a_{mn}x_n=b_m\ ,
\end{aligned}$$

или

$$\sum x_jA_{0j}=b,$$

където $A_{0j}=(a_{1j},a_{2j},\ldots,a_{mj})$ са вектор-стълбове на матрицата A.

Ако се използува последната форма на запис, твърдението „системата $AX=B$ има решения“ и „векторът B е линейна комбинация на вектор-стълбовете на матрицата A“ са еквивалентни.

Системата $AX=B$ може да няма решение при зададени m,n,r и произволен вектор B, може да има безброй много решения при всяко B или единствено решение за всяко B.

За да може произволен вектор B да се представи като линейна комбинация на векторите $A_{0j},j=1,2,\ldots,n$, необходимо и достатъчно е системата вектори A_{0j} да съдържа m линейно независими вектори, т. е. базис и размерност m. Следователно системата $AX=B$ има решение за всяко B тогава и само тогава, когато $r=m$. Затова е необходимо $m\leq n$.

Ако $r=m=n$, системата $AX=B$ има единствено решение.

Ако вземем $r=m$ линейно независими вектори от системата A_j, те ще образуват квадратна матрица A_B с размери $m\times m$, която се нарича **базис** на A. Системата

$$A_B\bar{X}=B,$$

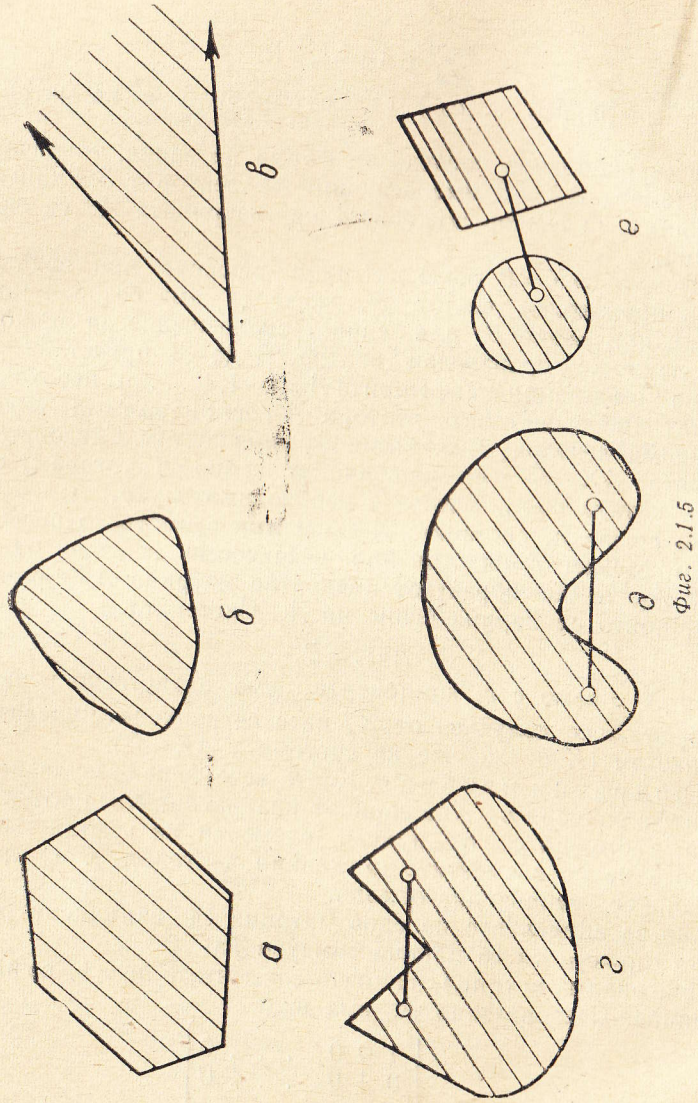
където X е само с m компоненти, има единствено решение. Векторът $\bar{X}$ се получава от X, като се изпуснат нулевите му компоненти (X е решение на системата $AX=B$).

К в а д р а т н и м а т р и ц и. Както вече беше отбелязано, матриците с размери $n\times n$ се наричат квадратни. Квадратната матрица, състояща се от нулеви елементи на всички места с изключение на елементите по главния диагонал, т. е. елементите a_{ii}, се нарича диагонална.

Ако за елементите на една матрица са изпълнени равенствата $a_{ij}=a_{ji}$, тя се нарича **симетрична.**

Диагонална матрица, за която елементите $a_{ii}=1$, се нарича единична. Следователно тя има вида

$$E=\begin{pmatrix}1&0&0&\ldots&0\\0&1&0&\ldots&0\\\cdot&&&&\\\cdot&&&&\\\cdot&&&&\\0&0&0&\ldots&1\end{pmatrix}.$$



Фиг. 2.1.5

Ако A е произволна квадратна матрица, то $EA=AE=A$. Квадратната матрица се нарича неизродена, ако детерминантната ѝ е различна от нула.

Ако A е неизвестна квадратна матрица, уравнението

$$AB=E,$$

където B е също квадратна матрица с размерите на A, може да се реши относно B. Получената в резултат на решението матрица B се нарича **обратна** на A и се означава с A^{-1}.

3. ИЗПЪКНАЛИ МНОЖЕСТВА И КОНУСИ

3.1. Изпъкнали множества

Ако е дадена точката $X \in E^n$, точките с представяне λX лежат на безкрайната права, минаваща през O и X. Ако X и Y са произволни точки от E^n, всички точки от отсечката, съединяваща X и Y, имат представянето

$$\lambda X+(1-\lambda)Y \quad \text{при} \quad 0 \leqslant \lambda \leq 1.$$

Ако $0 \leq \lambda < \infty$, $\lambda X+(1-\lambda)Y$ е уравнението на точките от лъча, излизащ (с начало) от Y в направление X.

Нека P е даден вектор-ред с n компоненти и $X \in E^n$. Тогава

$$PX=0$$

е уравнението на **хиперравнината,** която минава през точката O и перпендикуляра на вектора P.

Уравнението $PX=c$ е уравнението на хиперравнината, перпендикулярна на вектора P и присичаща нормалата на разстояние (c) от началото на координатната система.

Всяка хиперравнина разделя пространството на две полупространства H^+ и H^-. Точките от H^+ удовлетворяват равенството

$$PX \geq c,$$

а точките от H^- — неравенството

$$PX \leq c.$$

Всяка точка $X \in E^n$ принадлежи поне на едно от двете множества (полупространства)

$$H^+=\{X/PX \geq c\} \text{ и } H^-=\{X/PX \leq c\},$$

а точките от хиперравнината $H=\{X/PX=c\}$ — и на двете. Множествата H^+ и H^- се наричат **отворени полупространства,** ако от тях се изключат точките от H.

Определение 1. Множеството от точки, които принадлежат на E^n, се нарича изпъкнало, ако заедно с всеки две произволни свои точки X и Y съдържа и точките от съединяващата ги отсечка.

Следователно множеството G е изпъкнало, ако $\lambda X+(1-\lambda)Y \in G$ за произволни $X, Y \in G$ и $0 \leq \lambda \leq 1$. Например в E^2 множествата на фиг. 2.1.5, *а*, *б* и *в* са изпъкнали, а на фиг. 2.1.5 г. д. е не са изпъкнали.

Изпъкналото множество може да е ограничено (фиг. 2.1.5, а, б,) или неограничено (фиг. 2.1.5, в).

Пространството E^n, произволното негово линейно подпространство, полупространството и хиперравнината са изпъкнали множества. Това следва непосредствено от дефиницията. Например да покажем, че $H^+=\{X|PX \geq c\}$ е изпъкнало множество.

Нека $\overline{X}$ и $\overline{Y} \in H^+$, т. е. $P\overline{X}>c$ и $P\overline{Y}>c$. Тогава и $\lambda\overline{X}+(1-\lambda)\overline{Y}$ при $0 \leq \lambda \leq 1$ ще принадлежи на H^+, тъй като $P(\lambda\overline{X}+(1-\lambda)\overline{Y})=\lambda P\overline{X}+(1-\lambda)P\overline{Y} \leq \lambda c+(1-\lambda)c=\lambda c+c-\lambda c=c$. Следователно H^+ е изпъкнало множество.

3.2. Свойства на изпъкналите множества

Нека G е изпъкнало множество и $X_1, X_2 \in G$. Точката $X=\lambda_1 X_1+\lambda_2 X_2$ при $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_2 \geq 0$ и $\lambda_1+\lambda_2=1$ се нарича изпъкнала линейна комбинация на точките X_1 и X_2. По определение 1 тя принадлежи на $G(\lambda_1=\lambda, \lambda_2=1-\lambda)$. Да вземем точката $X_3 \in G$ и $X_3 \neq X, X_1, X_2$. Тогава $\mu_1 X+\mu_2 X_3 \in G$ при $\mu_1 \geq 0$, $\mu_2 \geq 0$ и $\mu_1+\mu_2=1$. Нека заместим в последния израз X с равното му. Получаваме $\mu_1(\lambda_1 X_1+\lambda_2 X_2)+\mu_2 X_3=\mu_1\lambda_1 X_1+\mu_1\lambda_2 X_2+\mu_2 X_3 \in G$. Да положим $\mu_1\lambda_1=\nu_1$, $\mu_1\lambda_2=\nu_2$ и $\mu_2=\nu_3$. Тогава $\nu_1 \geq 0$, $\nu_2 \geq 0$ и $\nu_3 \geq 0$, тъй като λ_1, λ_2, μ_1 и $\mu_2 \geq 0$ и $\nu_1+\nu_2+\nu_3=\mu_1\lambda+\mu_1\lambda_2+\mu_2=\mu_1(\lambda_1+\lambda_2)+\mu_2=\mu_1+\mu_2=1$.

Следователно $\nu_1 X_1+\nu_2 X_2+\nu_3 X_3 \in G$ при $\nu_1 \geq 0$, $\nu_2 \geq 0$, $\nu_3 \geq 0$ и $\nu_1+\nu_2+\nu_3=1$.

Като се обобщи този израз, получава се следното твърдение:

1. Ако $X_1, X_2, \ldots, X_m$ са точки, принадлежащи на изпъкналото множество G, всяка тяхна изпъкнала линейна комбинация също принадлежи на G, т. е., ако $X=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i X_i$,

$\lambda_i \geq 0$, $i=1, 2, \ldots, m$, $\sum_{i=1}^{m}\lambda_i=1$, $X \in G$.

От теорема 3 следва, че множеството, съставено от всички изпъкнали линейни комбинации на произволен брой точки от E^n, е изпъкнало.

Ако G_1 и G_2 са изпъкнали множества, $G_1 \cap G_2 \neq \varnothing$ и X, Y принадлежат на двете множества, т. е. на $G_1 \cap G_2$, тогава и отсечката, която съединява тези точки, ще принадлежи и на двете множества. Следователно $G_1 \cap G_2$ е изпъкнало множество. Изобщо е вярно твърдението:

2. Сечението на краен брой[1] изпъкнали множества е изпъкнало множество.

Нека $X_1, X_2, \ldots, X_m$ са точки от E^n. Съвкупността от всички техни изпъкнали комбинации се означава с $C_0(X_1, X_2, \ldots, X_m)$ и се нарича **изпъкнала обвивка на векторите** $X_1, X_2, \ldots, X_m$. $C_0(X_1, X_2, \ldots, X_m)$ е сечението на всички изпъкнали множества, съдържащи точките $X_1, X_2, \ldots, X_m$.

Ако S е произволно множество (не непременно изпъкнало), принадлежащо на E^n, най-малкото изпъкнало множество, което съдържа S, се нарича **изпъкнала обвивка на множеството** S и се означава чрез $C_0(S)$.

Понякога $C_0(S)$ се определя като сечението на всички изпъкнали множества, съдържащи множеството S.

Ако множеството S е изпъкнало, то $C_0(S)=S$. Ако не е изпъкнало, както множеството на фиг. 2.1.5, *д* и *е*, $C_0(S)$ **има вида, показан на** фиг. 2.1.6, *б*.

Сечението на всички изпъкнали затворени множества, съдържащи множеството S, се нарича изпъкнала затворена обвивка на множеството S и се означава чрез $C_0(S)$.

В линейното програмиране много често ограничаващите условия се задават във вид на неравенства

$$AX \leq B,$$

където

$A=(a_{ij})m \times n$, $X=(x_1, x_1, \ldots, x_n)^T$, $B=(b_1, b_2, \ldots, b_m)^T$.

Тази система неравенства може да се напише още по следния начин:

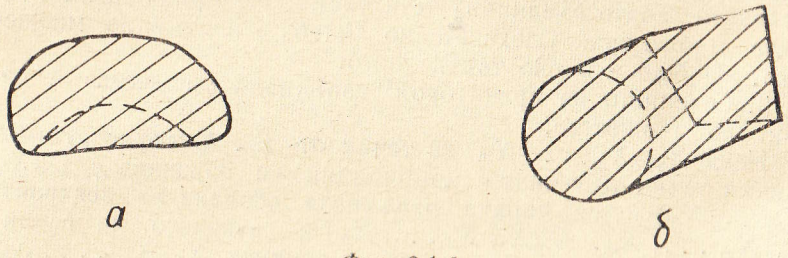
$$A_{i_0}X \leq b_i, \quad i=1, 2, \ldots, m.$$

[1] Може да се покаже, че сечението на безкраен брой изпъкнали множества е изпъкнало множество.

Множеството

$$H_i^- = \{X | A_{i_0} X \leq b_i\}$$

е полупространство и следователно е изпъкнало. Точката X е решение на системата, ако принадлежи едновременно на всички множества H_i^-, т. е. на сечението на полупространствата H_i^-, всяко от които е изпъкнало. Следователно в сила е следното твърдение:



Фиг. 2.1.6

3. Множеството решения на системата линейни неравенства $AX \leq B$ е изпъкнало.

Ако към системата $AX \leq B$ се добави и неравенството $X \geq 0$, множеството от неотрицателните решения на системата неравенства е изпъкнало, тъй като множеството $X \geq 0$ е изпъкнало, множеството решения на системата $AX \leq B$ е изпъкнало, следователно и тяхното сечение ще е изпъкнало множество.

Множеството решения на системата линейни уравнения $AX = B$ също е изпъкнало, тъй като е сечение на изпъкналите множества $\{X | A_{i_0} X = b_i\}$, от което следва, че:

4. Множеството неотрицателни решения на системата линейни уравнения е изпъкнало.

3.3. Разделяща и опорна хиперравнина

Ако S и T са изпъкнали множества в E^n, хиперравнината $PX = c$ се нарича **разделяща** S и T, когато

$$Ps \leq c \text{ за всички } s \in S \text{ и } Pt \geq c \text{ за всички } t \in T.$$

Съществуването на такива хиперравнини се установява от следната теорема за разделящата хиперравнина (теорема на Минковски).

Теорема 3. (Теорема на Минковски). Нека S е затворено изпъкнало и ограничено множество, T — затворено изпъкнало множество и $S \cap T = \varnothing$. Тогава съществува хиперравнина $PX = c$, която строго ги разделя.

Доказателство. Да разгледаме непрекъснатата функция на две променливи $\rho(s, t)$, дефинирана за всяко $s \in S$ и $t \in T$. Тогава съществуват точки $s \in S$ и $t \in T$, за които $\rho(s, t)$ приема най-малка стойност. Да прекараме хиперравнина през средата на отсечката $[s_0, t_0]$ и покажем, че тя е търсената.

Хиперравнината H е перпендикулярна на вектора $p = t_0 - s_0$ и минава през точката $\frac{t_0 + s_0}{2}$, т. е.

$$H = \left\{ X | (t_0 - s_0)X = (t_0 - s_0)\ \frac{t_0 + s_0}{2} \right\}.$$

Да вземем произволна точка $s \in S$ и да я съединим с точката S_0. Тогава

$z = \lambda s + (1 - \lambda) s_0 \in S$ при $0 \leq \lambda \leq 1$, т. е. всички точки от отсечката $[s, s_0]$ принадлежат на S.

Да вземем квадрата на разстоянието между t_0 и z

$$(t_0 - z)^2 = (t_0 - (\lambda s + (1 - \lambda) s_0))^2$$

и да разгледаме функцията

$$f(\lambda) = (t_0 - \lambda s - (1 - \lambda) s_0)^2 - (t_0 - s_0)^2.$$

Очевидно за всяко $0 \leq \lambda \leq 1$ $f(\lambda) \geq 0$, т. е.

$f(\lambda) = 2\lambda(t_0 - s_0)(s_0 - s) + \lambda^2 (s_0 - s)^2 \geq 0$ за $0 \leq \lambda \leq 1$.

Тогава и $\frac{f(\lambda)}{\lambda}$ е отрицателно и $\lim\limits_{\lambda \to 0} \frac{f(\lambda)}{\lambda} = f'(0) = 2(t_0 - s_0)$. $(s_0 - s) \geq 0$.

Като се има пред вид, че $t_0 - s_0 = p$, получаваме

$$P(s_0 - s) \geq 0, \text{ т. е.}$$

$$Ps \leq Ps^0 \text{ за всяко } s \in S.$$

Тъй като $P(t_0 - s_0) = P.P > 0$, т. е.

$$Ps_0 < Pt_0.$$

Изпълнено е дори и неравенството

$$Ps_0 < P\ \frac{t_0 + s_0}{2} < Pt_0.$$

Следователно, като се взема пред вид неравенството $Ps \leq Ps_0$, получава се

$$Ps \leq Ps^0 < P\frac{t_0 + s_0}{2} = c \text{ за всички } s \in S.$$

Аналогично може да се докаже, че

$$Pt > P\frac{t_0+s_0}{2} = C \text{ за всички } t \in T_0.$$

Следователно H е търсената хиперравнина и с това теоремата е доказана.

Следствие 1. Ако S е изпъкнало затворено множество и Z е точка, която не принадлежи на S, тогава S и Z може да бъдат разделени с хиперравнина.

Ако се приложи теорема 3 към множествата S и множеството, което се състои от единствената точка Z, получава се доказателството на следствие 1.

Нека S е изпъкнало множество и точката $X^0 \in S$ е гранична. **Хиперравнината H се нарича опорна** за множеството S в точката X^0, ако минава през X^0 и S лежи изцяло в едно от полупространствата, определени от тази хиперравнина. В сила е следствие 2.

Следствие 2. Ако S е изпъкнало множество и X^0 е негова гранична точка, в X^0 съществува хиперравнина, опорна за S.

Върху доказателството на това следствие няма да се спираме.

Точката X, която принадлежи на изпъкналото множество G, се нарича крайна точка на G, ако не може да се представи по следния начин:

$$X = \lambda X_1 + (1-\lambda) X_2,$$

където $0 < \lambda < 1$ и $X_1 X_2 \in G$. Тъй като $\lambda < 1$, следва, че крайна точка не може да лежи в отсечката, съединяваща две точки от множеството.

Например, ако G е триъгълник в E^2, крайни точки на G са само трите му върха.

Ако G е кръг в E^2, крайни са всички точки от окръжността, които го заграждат.

Изпъкнало множество с краен брой крайни точки се нарича **изпъкнало многостенно множество**. Ако е ограничено, то се нарича **многостен**.

За крайните точки са в сила следните две теореми, на чието доказателство няма да се спираме.

Теорема 4. Ако G е изпъкнало затворено и ограничено множество, всяка негова опорна хиперравнина съдържа поне една крайна точка.

Теорема 5. Изпъкналото затворено и ограничено множество G е изпъкнала обвивка на множеството от крайните му точки. Ако G е многостен, всяка негова точка може да се представи

чрез изпъкналата линейна комбинация на краен брой негови крайни точки.

Ако G е изпъкнало затворено и ограничено множество, с $\ddot{G}$ се означава множеството от крайните му точки. Тогава теорема 5 може да се формулира по следния начин: ако G е изпъкнало затворено и ограничено множество, $G = C_0(\ddot{G})$. Това означава, че посочените множества са определени напълно от множеството на крайните им точки.

3.4. Изпъкнали конуси

Множеството от точки K се нарича **изпъкнал конус с връх в точката X_0**, ако заедно с всяка своя точка Y то съдържа и лъча, който излиза от X_0 по направление на Y, т. е.

$$K = \{X | X = \lambda Y + (1-\lambda) X_0 \in K, \text{ ако } X_0,\ Y \in K \text{ и } \lambda \geq 0\}.$$

Ако точката $X_0 = 0$, върхът на конуса лежи в началото на координатната система и

$$K = \{X | X = \lambda Y \in K, \text{ ако } Y \in K \text{ и } \lambda \geq 0\}.$$

В E^2 конусите с връх в точката X_0 и в точката O ще имат вида на фиг. 2.1.7, *а, б*.

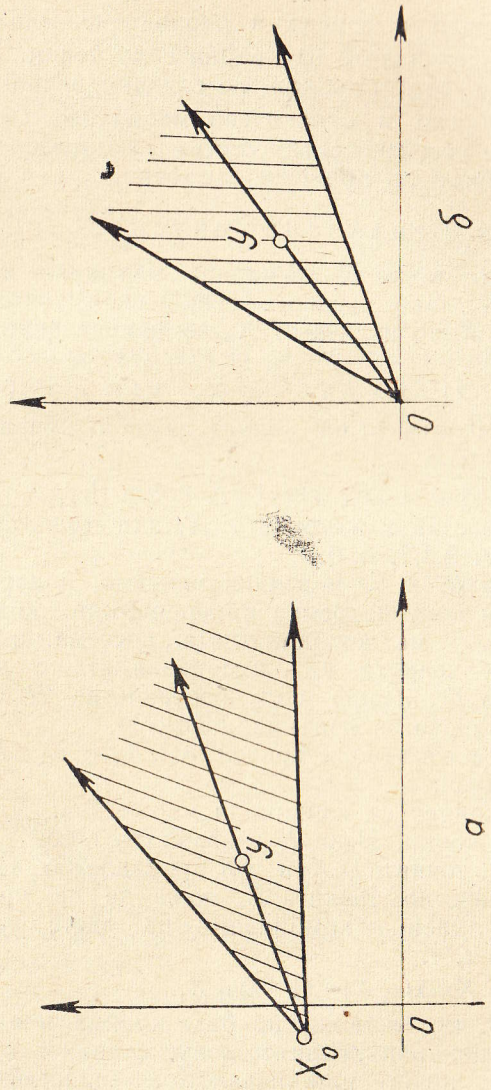
Пространствата R^n и E^n и всички линейни подпространства са изпъкнали конуси. Всяка хиперравнина, която минава през началото на координатната система, е изпъкнал конус с връх точката 0. Хиперравнината е линейно подпространство в E^n. Двете полупространства H^+ и H^-, определени от H, също са изпъкнали конуси.

Ако K_1 и K_2 са изпъкнали конуси, $K_1 \cup K_2$ и $K_1 \cap K_2$ също са изпъкнали конуси.

Изпъкналите конуси са изпъкнали множества. Да намерим крайните им точки. Нека K е изпъкнал конус. Тогава, ако $X \in K$ и $X \neq 0$, точките $\mu_1 X$ и $\mu_2 X$ принадлежат на K при $\mu_1,\ \mu_2 \geq 0$. Следователно точката X може да се представи като изпъкнала линейна комбинация на двете различни точки $\mu_1 X$ и $\mu_2 X$, т. е.

$$X = \lambda(\mu_1 X) + (1-\lambda)\mu_2 X.$$

Оттук, ако $X \neq 0$, тя не може да бъде крайна и е в сила следното твърдение: изпъкналият конус с връх в началото или няма крайни точки, или началото е единствената му крайна точка. Ако е линейно подпространството, той няма крайни точки. Например конусите на фиг. 2.1.7, а, б имат крайна точка, а хиперравнината и полупространството нямат.



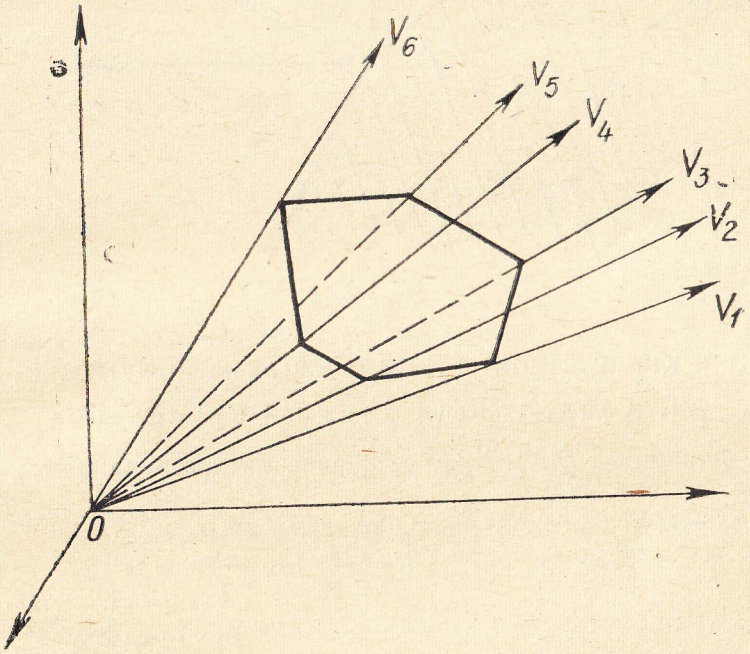
Фиг. 2.1.7

Остър конус се нарича изпъкнал конус с крайна точка.

Всяко сечение на изпъкнал конус с хиперравнина, която не минава през върха му, е изпъкнало множество. Ако това сечение е изпъкнал многоъгълник, конусът се нарича **краен.**

От определението следва, че всяка точка, принадлежаща на един краен конус, може да се представи като неотрицателна линейна комбинация на краен брой вектори.

На фиг. 2.1.8 всяка точка от конуса K може да се представи като неотрицателна линейна комбинация на векторите V_1, V_2, V_3, V_4, V_5 и V_6. Ако K_1 и K_2 са крайни конуси, конусите $K_1 \cup K_2$ и $K_1 \cap K_2$ също са крайни.

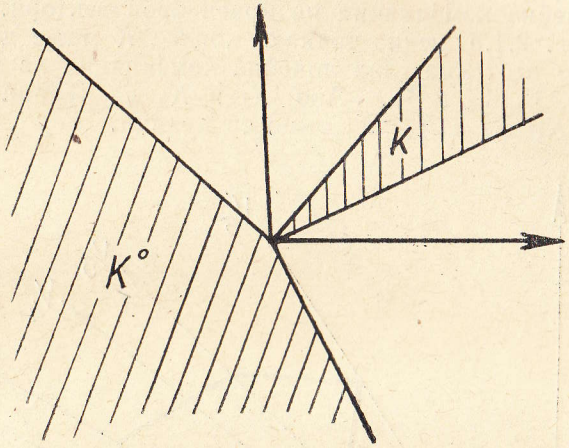


Фиг. 2.1.8

Хиперравнината, минаваща през началото на координатната система, и полупространствата, определени от тази хиперравнина, са крайни конуси, тъй като всяко от посочените множества може да се представи като сума от крайни конуси. Например в E^3 полупространството $H^+ = \{X =$

$=(x_1\, x_2, x_3),\ x_3 \geq 0\}$ може да се представи като сума от първите четири октаноти, всеки от които е краен конус.

Ако K е изпъкнал конус, множеството $K^0=\{Y/XY\leq 0$ за всяко $X \ni K\}$ се нарича **двойствен или** полярен конус на K. На фиг. 2.1.9 в E^2 са изобразени конусите K и K^0.



Фиг. 2.1.9

4. КВАДРАТИЧНИ ФОРМИ И ИЗПЪКНАЛИ ФУНКЦИИ

4.1. Квадратични форми. Определеност

Функцията $Q(X)$, $X \in E^n$ се нарича **квадратична форма,** ако има следния вид:

$$\begin{aligned} Q(X)=Q(x_1,\ x_2,\ldots,x_n)=c_{11}x_1^2+2c_{12}x_1x_2+2c_{13}x_1\ x_3+\ldots \\ +2c_{1n}x_1\,x_n+c_{22}x_2^2+2c_{23}x_2\,x_3+\ldots+2c_{2n}x_3\,x_n+ \\ +c_{33}x_3^2+\ldots+2c_{3n}x_3\,x_n+ \qquad (2.1.1) \\ +\ldots\ldots+ \\ +\ldots\ldots\ldots+ \\ +c_{nn}x_n^2. \end{aligned}$$

Коефициентите c_{ij} са реални числа. Като се приемат за симетрични ($c_{ij}=c_{ji}$), квадратичната форма $Q(X)$ може да се запише по следния начин.

$$\begin{aligned} Q(X)=(c_{11}x_1+c_{12}x_2+\ldots+c_{1n}x_n)x_1+ \\ +(c_{21}x_1+c_{22}x_2+\ldots+c_{2n}x_n)x_2+ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} +\ldots\ldots\ldots\ldots+ \qquad (2.1.2) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ +(c_{n1}x_1+c_{n2}x_2+\ldots+c_{nn}x_n)x_n. \end{aligned}$$

Следователно, ако се представят коефициентите c_{ji} като елементи на симетричната матрица C от n-ти ред, квадратичната форма $Q(X)$ ще има следното представяне:

$$Q(X)=X'CX. \qquad (2.1.3)$$

Квадратната симетрична матрица C се нарича **неотрицателно определена** или **положително полуопределена,** ако

$$X'CX \geq 0 \text{ за всяко } X.$$

Тя се нарича положително **определена** или **строго положително определена,** ако

$$X'CX>0 \text{ за всяко } X \neq 0.$$

Матрицата C се нарича **отрицателно определена (полуопределена),** ако матрицата — C е положително определена (полуопределена).

Съответната определеност на матрицата C се разпространява и на съответната ѝ квадратична форма. Следователно **положително** полуопределената квадратична форма $Q(X)=X'CX$ никога не може да приема отрицателни стойности, а ако е строго определена, $Q(X)=0$ само при $X=0$. За квадратичните форми $Q(X)=X'CX$ и симетричната матрица C са в сила следните свойства.

Свойство 1. Ако C е положително полуопределена, $CX=0$ за всички X, за които

$$X'CX=0.$$

Доказателство. За произволни Y и λ имаме

$$\begin{aligned} (Y+\lambda X)'C(Y+\lambda X)=Y'CY+2\lambda(Y'CX)+\lambda^2(X'CX)= \\ =Y'CY+2\lambda(Y'CX)\geq 0. \end{aligned}$$

Това неравенство е възможно, ако $Y'CX=0$, тъй като може да бъде избрано произволно. Равенството $Y'CX=0$ е вярно при произволно Y. Следователно за това е необходимо

$$CX=0.$$

Свойство 2. Строго определената матрица е неособена, т. е. ако $X'CX=0$ за всяко $X \neq 0$, то $|C| \neq 0$.

Доказателство. От свойство 1 следва, че ако $X'CX=0$, то $CX=0$, т. е. $CX=0$ само за $X=0$. Това означава, че детерминантата на матрицата C е различна от нула.

Нека C е симетрична матрица от n-ти ред, а A — произволна матрица с размери $n\times m$.

Свойство 3. Ако C е положително полуопределена, то и $A'CA$ е положително полуопределена. Ако C е положително определена и рангът на матрицата A е равен на m, то и $A'CA$ е положително определена.

Доказателство. Матрицата $A'CA$ е от m-ти ред. Да положим $Y=AX$. Векторът Y е n-мерен, ако векторът X е m-мерен.

Тогава

$$X'(A'CA)X=(X'A')C(AX)=(AX)'C(AX)=Y'CY\geq 0$$

за всички Y и следователно за всички X.

Ако рангът r на матрицата A е равен на m, то от $X=0$ следва $Y\neq 0$ и ако C е строго определена, то $X'(A'CA)X>0$ за всички $Y\neq 0$, а следователно и за всички $X\neq 0$.

Ако $C=E$, то $A'EA=A'A$, а тъй като E е положително полуопределена, то и $A'A$ е положително определена.

Ако $A=C^{-1}$, то $A'CA=(C^{-1})'CC^{-1}=C^{-1}E=C^{-1}$. Следователно, ако C е положително определена, то и C^{-1} също е положително определена.

От представянето (2.1.2) следва, че ако квадратичната форма има някаква определеност и някои фиксирани променливи са равни на нула, относно останалите променливи квадратичната форма запазва определеността си. Това означава, че ако матрицата C има някаква определеност, то и всяка нейна подматрица, получена чрез зачертаване на съответните редове и стълбове, има същата определеност. Следователно, ако матрицата C е положително определена (полуопределена), диагоналните ѝ елементи са положителни (неотрицателни). Това условие е необходимо, но не и достатъчно, за да е C положително определена (полуопределена).

Необходимото и достатъчно условие C да е положително определена е детерминантите

$$|C_1|=c_{11},\ |C_2|=\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix},\quad |C_3|=\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix},\ldots,|C_n|=|C|$$

да са положителни. Матрицата C е положително полуопределена и има ранг r, ако (след разместване на едноименните

редове и стълбове) първите r- детерминанти $|C_1|, |C_2|,\ldots,|C_r|$, да са положителни, а останалите $|C_{r+1}|,\ldots, |C_n|=C$ да са нули.

Например матрицата

$$C=\begin{pmatrix} 6 & -5 & 2 \\ -5 & 12 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

е положително определена, защото

$$C_1|=6>0, |C_2|=\begin{vmatrix} 6, & -5 \\ -5, & 12 \end{vmatrix}=47>0,\ |C_3|=\begin{vmatrix} 6 & -5 & 2 \\ -5 & 12 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix}=140>0,$$

квадратичната форма е

$$Q(X)=X'CX=(x_1,\ x_2,\ x_3).\begin{pmatrix} 6 & -5 & 2 \\ -5 & 12 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \end{pmatrix}=$$

$$=6x_1^2-25x_1x_2+2.2.x_1x_3+12x_2^2-10x_1x_2+4x_1x_3+12x_2^2+4x_3^2.$$

4.2. ИЗПЪКНАЛИ ФУНКЦИИ

4.2.1. Определение

Разглеждаме реални функции, дефинирани в E^n и приемащи стойности от $-\infty$ до $+\infty$. С всяка такава функция $f(X)$, $X\in E^n$ са свързани двойката множества: ефективно множество $domf$ и надграфик на функцията $f(X)$, $detf$ (фиг. 2.1.10.), които се дефинират по следния начин:

$$domf=\{X\in E^n / f(X)<\infty\},$$

$$detf=\{(X,\xi)\in E^n\times R/f(X)\leq\xi \text{ за } X\in domf\}.$$

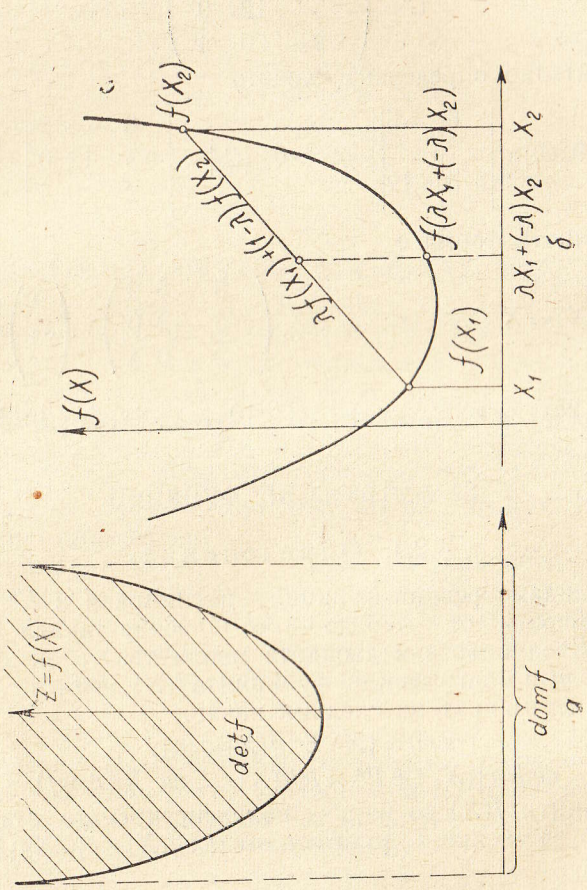
Функцията $f(X)$ се нарича **полунепрекъсната** отдолу (отгоре), ако за всяко C множеството $\{X|f(X)\leq c\}(\{X|f(X)\geq c\})$ е затворено.

Функцията $f(X)$ се нарича **травиална**, ако или $f(X)=\infty$ за всяко $X\in E^n$, или $f(X)=-\infty$ поне за едно X.

Функцията

$$\delta_s(X)=\begin{cases}0, & \text{ако } X\in S\\ \infty, & \text{ако } X\in S\end{cases}$$

се нарича индикаторна функция на множеството S.



Фиг. 2.1.10

Определение. Ще казваме, че $f(X)$ е изпъкнала функция на изпъкналото множество $G \in E^n$, ако за две произволни точки X_1, $X_2 \in G$ и $\lambda \in [0,1]$ е изпълнено неравенството

$$f(\lambda X_1+(1-\lambda)X_2) \leq \lambda f(X_1)+(1-\lambda)f(X_2). \qquad (2.1.4)$$

Множеството G може да съвпада с множеството *domf*, а може да е и негово подмножество. Множеството *domf* трябва да е изпъкнало множество.

На фиг. 2.1.10, б е показано геометрично как изглежда неравенството (2.1.4).

Много често се използува следното определение: функцията $f(X)$ се нарича изпъкнала, ако нейният надграфик *detf* е изпъкнало множество.

Ще покажем, че двете определения са еквивалентни. Нека за всеки X_1, $X_2 \in G$ и $0 \leq \lambda \leq 1$

$$f(\lambda X_1+(1-\lambda)X_2) \leq f(X_1)+(1-\lambda)X_2.$$

Ще покажем, че множеството

$$detf=\{(X_1\xi) \in E^{n+1} | f(X) \leq \xi \text{ за } X \in demf, \xi \in R\}$$

е изпъкнало, т. е, ако $Z_1=(X_1, \xi_1)$ и $Z_2=(X_2, \xi_2) \in detf$, то и $Z=\lambda Z_1+(1-\lambda)Z_2$, $0 \leq \lambda \leq 1$ също принадлежи на *detf*, $Z=\lambda Z_1+(1-\lambda)Z_2=(\lambda X_1+(1-\lambda)X_2, \lambda \xi_1+(1-\lambda)\xi_2)=(X, \xi)$. Тъй като $Z_1, Z_2 \in detf$, то $f(X_1) \leq \xi_1$ и $f(X_2) \leq \xi_2$. Тогава $f(X^*)=f(\lambda X_1+(1-\lambda)X_2) \leq \lambda f(X_1)+(1-\lambda)f(X_2) \leq \lambda \xi_1+(1-\lambda)\xi_2=\xi^*$.

Следователно точката $(X^*, \xi^*)=Z$ принадлежи на множеството *detf*.

Нека сега множеството *detf* е изпъкнало. Ще покажем, че неравенството (2.1.4) е изпълнено за всички X_1, $X_2 \in G$ и $0 \leq \lambda \leq 1$.

Ако точките $(X_1, f(X))$ и $(X_2, f(X_2))$ принадлежат на множеството *detf*, то и точка $Z=\lambda(X_1, f(X_1))+(1-\lambda)(X_2, f(X_2))=(\lambda X_1+(1-\lambda)X_2, \lambda f(X_1)+(1-\lambda)f(X_2)$ също ще принадлежи на *detf* за $0 \leq \lambda \leq 1$, т. е.

$$f(\lambda X_1+(1-\lambda)X_2) \leq \lambda f(X_2)+(1-\lambda)+(X_2),$$

следователно неравенството (2.1.4) е изпълнено.

Функцията $f(X)$ се нарича **строго изпъкнала**, ако в (2.1.4) имаме строго неравенство, т. е. $f(\lambda X_1+(1-\lambda)X_2)<\lambda f(X_1)+(1-\lambda)f(X_2)$. Геометрично това означава, че графикът на строго изпъкналите функции няма „праволинейни“ участъци (фиг. 2.1.10).

Функцията $g(X)$ се нарича вдлъбната, ако $-g(X)$ е изпъкнала.

4.2.2. Свойства на изпъкналите функции

Свойство 1. Ако функцията $f(X)$ е изпъкнала, то множеството $V=\{X|f(X)|\leq c\}$ е изпъкнало за всяко $c\in R$.

Ако функцията $g(X)$ е вдлъбната, множеството $V=\{X|g(X)\geq \geq c\}$ е изпъкнало.

Доказателство. Нека X_1, $X_2\varepsilon V$. Тогава

$$f(X_1)\leq c \text{ и } f(X_2)\leq c.$$

Тъй като $f(X)$ е изпъкнала, изпълнено е (2.1.4), т. е.

$$f(\lambda X_1+(1-\lambda)X_2)\leq\lambda f(X_1)+(1-\lambda)f(X_2)\leq\lambda c+(1-\lambda)c=c.$$

Следователно точката $\lambda X_1+(1-\lambda)X_2$ също принадлежи на V, т. е. V е изпъкнало множество.

За случая, когато $g(X)$ е вдлъбната, твърдението се доказва по същия начин.

Свойство 2. Ако функцията $f(X)$ е изпъкнала, то и функцията $\varphi(t)=f(X+Ut)$ е изпъкнала.

Ако функцията $g(X)$ е вдлъбната, функцията $\psi(t)=g(X+ +Ut)$ също е вдлъбната.

Доказателство. Нека $f(X)$ е изпъкнала и t_1, $t_2\in dom\,\varphi$. Тогава

$$\varphi(\lambda t_1+(1-\lambda)t_2)=f(X+\lambda t_1 U+(1-\lambda)t_2 U)=$$
$$=f(\lambda(X+t_1U)+(1-\lambda)(X+t_2U))\leq\lambda f(X+t_1U)+$$
$$+(1-\lambda)f(X+t_2U)=\lambda\varphi(t_1)+(1-\lambda)\varphi(t_2).$$

Следователно $\varphi(t)$ е изпъкнала функция. По същия начин се доказва, че $\psi(t)$ е вдлъбната.

Свойство 3. Ако $f(X)$ е изпъкнала функция на множеството G и има локален[1] минимум в точката $X_0\in G$, то тя в нея достига и абсолютния[2] си минимум на G.

Доказателство. Да допуснем, че в X_0 функцията $f(X)$ има локален, но не и глобален минимум, т. е. съществува точка $Y\in G$ и $Y\neq X_0$, че

$$f(Y)<f(X_0).$$

Да вземем точката $\lambda X_0+(1-\lambda)Y$, принадлежаща на затворения интервал $[X_0, Y]$, т. е. $0\leq\lambda\leq 1$. Тъй като $f(X)$ е изпъкнала, то

[1] Казва се, че функцията $f(X)$ има локален минимум в $X_0\in G$, ако $f(X_0)\leq f(X)$ за близките до X_0 точки X.

[2] Функцията $f(X)$ има глобален минимум в $X_0\in G$, ако $f(X_0)\leq f(X)$ за всяко $X\in G$.

$$f(\lambda X_0+(1-\lambda)Y)\leq\lambda f(X_0)+(1-\lambda)f(Y)<\lambda+(X_0)+(1-\lambda)f(X_0)=$$
$$=f(X_0)$$

за $\lambda<1$. Точката $Z=\lambda X_0+(1-\lambda)Y$ ще се намира колкото си искаме по-близо до точката X_0 за λ, близки до 1, т. е.

$$f(Z)<f(X_0)$$

за Z, близка до X_0. Но тъй като X_0 е точка на локален минимум за $f(X)$, получаваме

$$f(Z)\geq f(X_0)$$

за Z, близки до X_0. От полученото противоречие следва, че в X_0 функцията $f(X)$ достига глобалния си минимум.

По същия начин може да се покаже, че ако X_0 е точка на локален максимум за вдлъбнатата функция $g(X)$, тя е и точката, в която $g(X)$ достига глобалния си максимум.

Свойство 4. Изпъкналите и вдлъбнатите функции са непрекъснати във вътрешността на $domf$.

Доказателство. Ако точката $Z=\lambda X_1+(1-\lambda)X_2$, X_1, $X_2\in domf$ $0\leq\lambda\leq 1$ представим във вида

$$Z=X_2+\lambda(X_1-X_2),$$

непосредствено от формула (2.1.4) получаваме

$$f(X_2+\lambda(X_1-X_2))\leq f(X_2)+\lambda(f(X_1)-f(X_2));$$
$$f(X_2+\lambda(X_1-X_2))-f(X_2)\leq\lambda(f(X_1)-f(X_2)).$$

Когато λ клони към нула, $\lambda(f(X_1)-f(X_2))$ клони към нула и следователно $f(X_2+\lambda(X_1-X_2))-f(X_2)$ също ще клони към нула, т. е. $f(X)$ е непрекъсната функция.

Свойство 5. Ако функцията $f(X)$ е изпъкнала и диференцируема на множеството $domf$, тогава за всяко $X_0\in domf$ е изпълнено неравенството

$$f(X)-f(X_0)\geq\nabla f(X_0)(X-X_0). \qquad (2.1.5)$$

Доказателство. Тъй като $f(X)$ е изпъкнала,

$$f(\lambda X+(1-\lambda)X_0)=f(X_0+\lambda(X-X_0)\leq f(X_0)+\lambda(f(X)-f(X_0)).$$

По формулата на Тейлор

$$f(X_0+\lambda(X-X_0))=f(X_0+\lambda(X-X_0)\leq f(X_0)+\lambda(f(X)-f(X_0)).$$
$$0\leq\theta\leq 1,$$

следователно

$$f(X_0)+\lambda\nabla f(X_0+\lambda\theta(X-X_0))(X-X_0)\leq f(X_0)+\lambda(f(X)-f(X_0)).$$

Делим на $\lambda>0$ и получаваме

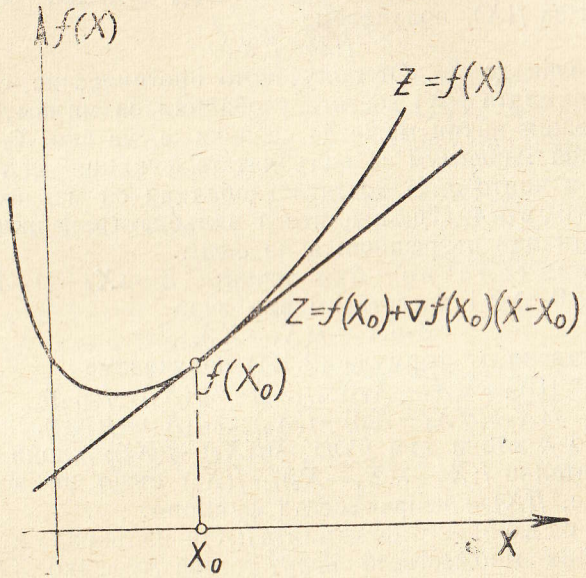
$$f(X)-f(X_0)\geq\nabla f(X_0+\lambda\theta(X-X_0))(X-X_0).$$

От последното неравенство следва, че

$$f(X-f(X_0)\geq\lim_{\lambda\to 0}\nabla f(X_0+\lambda\theta(X-X_0))(X-X_0)=$$
$$=\nabla f(X_0)(X-X_0), \text{ т. е.}$$
$$f(X)-f(X_0)\geq\nabla f(X_0)(X-X_0).$$

В E^2 (фиг. 2.1.11) неравенството (2.1.5) означава, че графиката на изпъкналата функция винаги лежи изцяло над допирателната в коя да е точка от кривата $Z=f(X)$.

Ако функцията $g(X)$ е вдлъбната и диференцируема, $g(X)-g(X_0)\leq\nabla g(X_0)(X-X_0)$ за всяко $X_0\in \mathrm{dom}\, g$



Фиг. 2.1.11

Свойство 6. Ако $f(X)$ е изпъкнала и два пъти диференцируема функция, матрицата $M=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}\right)$ е положително полуопределена за всяко $X\in \mathrm{dom}\, f$.

Доказателство: Ако $f(X)$ е изпъкнала, по свойство 2 функцията на една променлива $\varphi(t)=f(X+Ut)$ също е изпъкнала. Това означава, че $\varphi''(t)\geq 0$. Да пресметнем $\varphi''(t)$.

$$\varphi'(t)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f(X+Ut)}{\partial x_i}\cdot u_i;$$

$$\varphi''(t)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}u_i u_j\geq 0,$$

което означава, че квадратичната форма

$$U'MU\geq 0,$$

а следователно и матрицата

$$M=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}\right)$$

са положително полуопределени за всяко $X\in \mathrm{dom}\, f$.

Свойство 7. Квадратичната форма $Q(X)=X'CX$ е изпъкнала функция, ако C е положително полуопределена. Ако C е положително определена, $Q(X)$ е строго изпъкнала функция.

Доказателство. Ще докажем първото твърдение, че

$$Q(\lambda X_1+(1-\lambda)X^2)\leq\lambda Q(X_1)+(1-\lambda)Q(X_2),\ 0\leq\lambda\leq 1,$$

ако C е положително полуопределена, т. е., ако $X'CX\geq C$. При $0\leq\lambda\leq 1$ е изпълнено неравенството

$$\lambda X'CX\geq\lambda^2 X'CX.$$

Като имаме пред вид това неравенство, получаваме

$$\lambda Q(X_1)+(1-\lambda)Q(X_2)=\lambda X_1'CX_1+(1-\lambda)X_2'CX_2=$$
$$=\lambda X_2'C(X_1-X_2)+\lambda(X_1-X_2)'CX_2+\lambda(X_1-X_2)'C(X_1-X_2)+$$
$$+X_2'CX_2\geq\lambda X_2'C(X_1-X_2)+\lambda(X_1-X_2)'CX_2+\lambda^2(X_1-X_2)'C(X_1-$$
$$-X_2)+X_2'CX=(\lambda(X_1-X_2)+X_2)'C(\lambda(X_1-X_2)+X_2)=$$
$$=Q(\lambda X_1+(1-\lambda)X_2).$$

При доказателството на второто твърдение използуваме, че $X'CX>0$ и $\lambda X'CX>\lambda^2 X'CX$ при $0<\lambda<1$ и получаваме $Q(\lambda X_1+(1-\lambda)X_2)<\lambda Q(X_1)+(1-\lambda)Q(X_2)$.

Глава втора

ЛИНЕЙНО ПРОГРАМИРАНЕ

1. ОБЩА ЗАДАЧА НА ЛИНЕЙНОТО ПРОГРАМИРАНЕ

Линейното програмиране се занимава със задачи, при които критерият за оптималност и ограничаващите условия се изразяват чрез линейни функции на независимите променливи. То намира широко приложение при решаването на задачи, свързани с най-ефективното използуване или разпределение на ограничени ресурси за достигане на определени цели.

Математическата формулировка на общата задача на линейното програмиране е следната.

Да се намери минималната стойност на линейната функция

$$L(X)=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n \qquad (2.1.1)$$

при следните ограничаващи условия за неизвестните:

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n(\leq,=,\geq)b_1;\\
&a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n(\leq,=,\geq)b_2;\\
&\cdot\\
&\cdot\\
&\cdot\\
&\cdot\\
&a_{m_1}x_1+a_{m_2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n(\leq,=,\geq)b_m;
\end{aligned} \qquad (2.1.2)$$

$$x_1\geq 0;\ x_2\geq 0;\ \ldots\ x_m\geq 0. \qquad (2.1.3)$$

Задачите, свързани с намирането на максималната стойност на линейни функции, се свеждат към задачите за намиране на минималната стойност, като се сменят знаците на коефициентите c_j в линейната функция $L(X)$, защото

$$\max\sum_{j=1}^{n}c_jx_j=-\min\sum_{j=1}^{n}(-c_j)x_j.$$

Без да се нарушава общността на разглежданията, може да се приеме, че коефициентите b_i, $i=1,2,\ldots m$ са неотрицателни величини. В противен случай, ако някое $b_i<0$, умножава се съответното ограничаващо условие по -1 и ако е неравенство, сменя се знакът му.

От ограничаващите условия (2.2.2) лесно може да се премине към система уравнения, като към ограничаващите условия от вида

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\ldots+a_{in}x_n\leq b_i$$

се прибавят допълнителните положителни променливи x_{n+i}, така че съответното неравенство се превръща в равенство

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\ldots a_{in}x_n+x_{n+i}=b_i,$$

а от ограничаващите условия от вида

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\ldots+a_{in}x_n\geq b$$

се изваждат положителните допълнителни променливи x_{n+i} така че

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\ldots+a_{in}x_n-x_{n-i}=b_i.$$

Следователно общата задача на линейното програмиране може да се формулира така:

Да се намери минималната стойност на линейната функция

$$L(X)=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j \qquad (2.2.4)$$

при следните ограничаващи условия:

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i \quad \text{за} \quad i=1,2,\ldots,m; \qquad (2.2.5)$$

$$x_j\geq 0 \quad \text{за} \quad j=1,2,\ldots,n. \qquad (2.2.6)$$

Този начин за записване се нарича още канонична форма на задачата на линейното програмиране.

Коефициентите c_j се наричат коефициенти на стойността, а линейната функция $L(X)$ — целова функция.

Множествата $(x_1, x_2\ldots x_n)$, които удоволетворяват условията (2.2.2) и (2.2.3), респективно (2.2.4) и (2.2.5), образуват дефиниционната област (областта на определение) на линейната функция $L(X)$.

За записване на общата задача на линейното програмиране се използуват още и следните начини:

а. Да се намери минималната стойност на линейната функция $L(X)=CX$, ако $A.X=B$, $X\geq 0$, където с C е означен векторът-ред $C=(c_1, c_2 \ldots c)$, с X векторът-стълб $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, с A матрицата

$$A=\begin{Bmatrix} a_{11}\, a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22} \ldots a_{2n} \\ . \\ . \\ . \\ a_{m1}\, a_{m2} \ldots a_{mn} \end{Bmatrix}$$

и с B (или P_0) — векторът-стълб $B=(b_1, b_2, \ldots b_m)$.

б). Да се намери минималната стойност на линейната функция

$$L(X)=CX,$$

$$\text{ако } x_1P_1+x_2P_2+\ldots+x_nP_n=P_0,$$

където с $\vec{P}_j$; $j=1, 2, \ldots n$ е означен векторът-стълб

$$P_j=(a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj}).$$

За така формираната обща задача на линейното програмиране може:

1. Условията (2.2.2) и (2.2.3) да са противоречиви, т. е. не съществуват числа $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, които да удовлетворяват ограничаващите условия. Тогава дефиниционната област на функцията $L(X)$ е празната съвкупност и задачите нямат решение.

2. Условията (2.2.2) и (2.2.3) са съвместими, но областта, определена от тях, е неограничена.

3. Условията (2.2.2) и (2.2.3) са съвместими и областта, определена от тях, е ограничена.

В случаите 2 и 3 задачата е разрешима, ако съществува множество $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, удовлетворяващо (2.2.1) и (2.2.3) и минимизиращо (максимизиращо) стойността на линейната функция.

. . . . . .

2. ПРИЛОЖЕНИЕ НА ЛИНЕЙНОТО ПРОГРАМИРАНЕ ВЪВ ВОЕННОТО ДЕЛО

а) Задача за планиране на производството и строителството

Най-общата постановка на тази задача е следната.

Има m на брой различни видове ресурси в количества съответно $b_1, b_2, \ldots, b_m$, т. е. b_i означава началното количество от i-тия ресурс. Необходимо е да се произведат n различни видове предмети (съоръжения, конструкции и т. н.). За производството на всеки предмет са известни необходимото количество от всеки ресурс и стойността на всеки предмет. Производството (по колко броя от всеки предмет да се произведе) трябва да се планира така, че стойността на произведената продукция да е максимална.

Ако с a_{ij} означим количеството продукти от i-тия ресурс, необходимо за производството на един предмет от i-тия вид, с C_j — цената на j-тия предмет, с x_j — планираната продукция от j-тия предмет, общата формулировка на задачата е следната.

Да се намери максималната стойност на функцията

$$L(X)=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n,$$

като се спазват следните условия за неизвестните:

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}X_n\leq b_1;$$
$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n\leq b_2;$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n\leq b_m;$$
$$x_j\geq 0,\ j=1,2,\ldots,n.$$

За да изясним казаното, нека разгледаме следния пример: да се построят убежища от два типа, ако има в наличност 580 m³ железобетон, 124 m³ дървен материал, 24 машиночаса екскаватори и 95 машиночаса кранове. За построяването на едно убежище от първия тип са необходими 17 m³ железобетон, 6 m³ дървен материал, 0,8 часа работа с екскаватори, 5 часа работа с кранове, а за построяване на едно убежище от втори тип — 29 m³ железобетон, 5 m³ дървен материал, 1,2 часа работа с екскаватори и 3 часа работа с кранове. По колко убежища от първия и втория тип да се построят, за да се поберат в тях максимален брой хора, ако едно убежище от първия тип побира 25, а от втория — 30 души.

Ако с x_1 означим броя на убежищата от първия тип, а с x_2 — броя на убежищата от втори тип, общият брой на хората, които ще се поберат в убежищата, е

$$25x_1+30x_2.$$

Критерият за оптималност в тази задача е броят на хората, които ще се поберат в укритията. Той се изразява чрез линейната функция

$$L(X)=25x_1+30x_2$$

и се търси нейната максимална стойност.

Количеството железобетон, необходимо за построяване на x_1 укрития от първия вид и x_2 укрития от втория вид, е

$$17x_1+29x_2.$$

То трябва да е по-малко или равно на наличното количество железобетон, т. е.

$$17x_1+29x_2\leq 580.$$

Аналогични ограничения се налагат и за общото количество дървен материал, за екскаваторите и за крановете.

Следователно математическата формулировка на задачата е:

Да се определят x_1 и x_2 така, че линейната функция

$$L(X)=25x_1+30x_2$$

да получи най-голяма стойност, като за x_1 и x_2 се изпълняват следните условия:

$$\begin{gathered}17x_1+29x_2\leq 580;\\ 6x_1+5x_2\leq 124;\\ 0{,}8x_1+1{,}2x_2\leq 24;\\ 5x_1+3x_2\leq 95;\\ x_1\geq 0;\\ x_2\geq 0.\end{gathered}$$

Последните две неравенства се налагат поради това, че броят на построените убежища не може да бъде отрицателно число.

б) Задачи за разпределение на боеприпасите по обектите на противника

Противникът има n обекта. Разполагаме с m вида средства за поразяването им. Знае се величината P_{ij} — вероятността за поразяване, която нанася i-тото средство на j-тия обект. По всеки обект се нанася удар само с един боеприпас. Боеприпасите трябва да се разпределят по обектите на противника така, че математическото очакване за поразяването им да е максимално.

в) Транспортна задача

В m пункта (склада) има някаква еднородна продукция (бензин, боеприпаси, вещево имущество и т. н.) в количества $a_1, a_2, \ldots, a_m$ и тя трябва да се разпредели между n пункта (магазини, войскови подразделения), които желаят съответно $b_1, b_2, \ldots, b_n$ количества.

Знае се стойността на превоза от всеки пункт на производството (склада) до всеки пункт за потребление. Транспортът за снабдяване трябва да се организира така, че сумираните транспортни разноски да са минимални.

Транспортната и разпределителната задача са разгледани по-подробно в следващото изложение.

От приведените примери се вижда, че линейното програмиране намира широко приложение във военното дело.

3. ГЕОМЕТРИЧНА ИНТЕРПРЕТАЦИЯ И ГЕОМЕТРИЧНО РЕШАВАНЕ НА ПРОСТИТЕ ЗАДАЧИ НА ЛИНЕЙНОТО ПРОГРАМИРАНЕ

Нека разгледаме задачата на линейното програмиране в двумерния случай, когато неизвестните са само две — x_1 и x_2. Тогава общата задача на линейното програмиране има следния вид:

Да се намери минималната (максималната) стойност на линейната функция

$$L(X)=c_1x_1+c_2x_2 \qquad 2.2.7.$$

при следните условия

$$\begin{gathered}a_{11}x_1+a_{12}x_2\leq b_1;\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2\leq b_2;\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2\leq b_m;\end{gathered} \qquad 2.2.8.$$

$$x_1\geq 0;\ x_2\geq 0. \qquad 2.2.9.$$

Неравенствата $x_1\geq 0$ и $x_2\geq 0$ определят първия квадрант в равнината x_1Ox_2. Уравнението $a_{i1}x_1+a_{i2}x_2=b_2$ определя една права в равнината, която я разделя на две полуравнини, като точките от едната удовлетворяват неравенството

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2<b_i,$$

а точките от другата — неравенството

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2>b_i.$$

Ние разглеждаме полуравнините, състоящи се от точките, които удовлетворяват първите неравенства. По този начин се получава една област D в равнината, точките на която удовлетворяват неравенствата (2.2.8.) и (2.2.9).

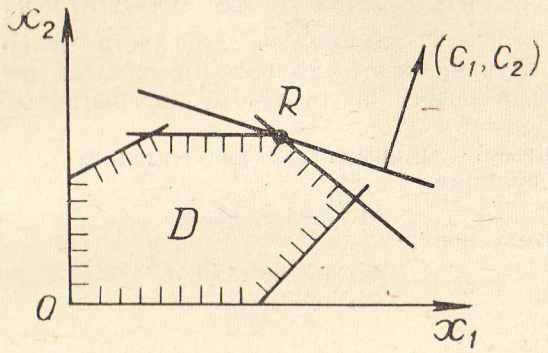
На фиг. 2.2.1 е даден общият вид на областта D. Защрихованата част показва полуравнината, точките на която удовлетворяват неравенствата (2.2.8) и (2.2.9).

Равенството $L(X)=c_1x_1+c_2x_2$ при различни стойности на $L(X)=\text{const}$ определя семейство успоредни прави, перпендикулярни на вектора C с координати (c_1, c_2). Векторът C с координати (c_1 и c_2) се нарича вектор-градиент на семейството прави

$$c_1x_1+c_2x_2=\text{const}.$$

Посоката на вектора $C(c_1, c_2)$ показва направлението, в което стойността на $c_1x_1+c_2x_2$ се увеличава, а обратната посока — направлението, в което стойността се намалява.

Геометричната интерпретация на задачата на линейното програмиране се състои в намиране на координатите на точката от множеството D, за която стойността на линейната функ-



Фиг. 2.2.1

ция е минимална (максимална), т. е. съгласно казаното по-горе, когато се търси максимум, движи се правата $c_1x_1+c_2x_2=$ $=$const по посока на вектора-градиент и се търси най-крайната обща точка на правата и областта D, а при търсене на минимум — движи се правата в обратна посока на вектора-градиент. Ако се окаже, че крайната обща точка на правата и областта D е една (фиг. 2.2.2), координатите на тази точка определят единственото решение на задачата на линейното програмиране.

Ако правата (2.2.7) е успоредна на някоя от граничните прави на областта D, всички точки на тази права са решения на задачата на линейното програмиране.

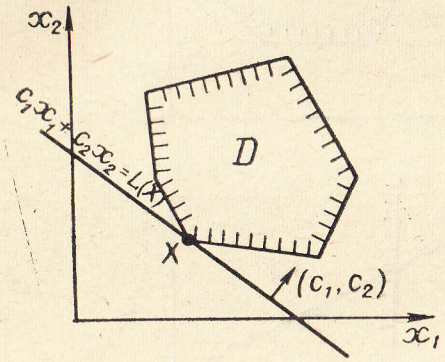
На фиг. 2.2.3 за всички точки от правата BC се получава еднаква стойност на линейната функция.

Може да се случи неравенствата (2.2.8) да не определят област в равнината и тогава (фиг. 2.2.4) задачата няма решение.

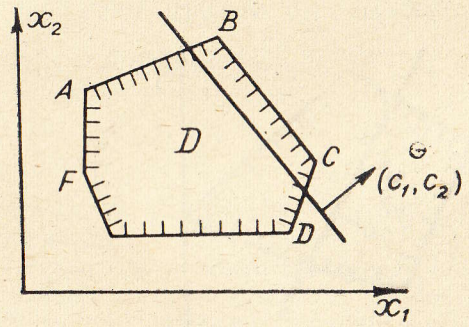
Ако се случи областта D да не е крайна, може да има решение (фиг. 2.2.5), когато при движение на правата $L(X)$ по посока на вектора (c_1, c_2) при търсене на максимум, или в обратна посока, при търсене на минимум, има крайна точка,

обща за правата и областта, или пък линейната функция да е неограничена върху областта D (фиг. 2.2.6).

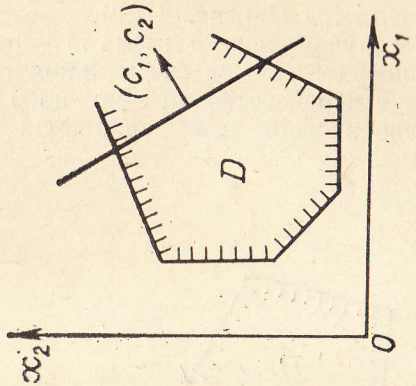
Досега разглеждахме случая, когато имаме m неравенства и 2 неизвестни. Ако приведем тази задача в каноничен вид, като прибавим към всяко неравенство по едно ново неизвестно, получаваме каноничен запис с m уравнения и $m+2$ неизвестни.



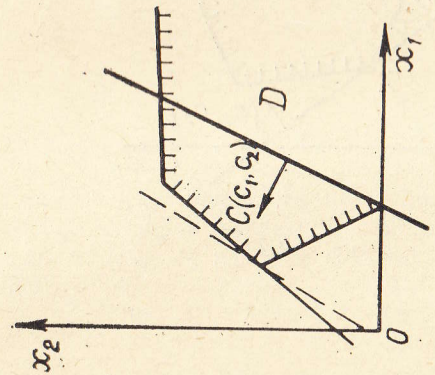
Фиг. 2.2.2



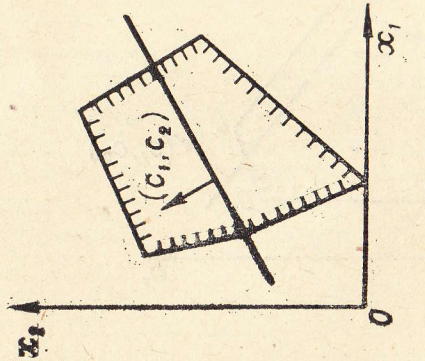
Фиг. 2.2.3



Фиг. 2.2.6



Фиг. 2.2.5



Фиг2. 2.2.4

Ясно е, че ако броят на уравненията е с две по-малък от неизвестните, т. е. $n-m=2$, всички неизвестни $x_1, x_2, \ldots, x_n$ може да се изразят чрез две от тях, например с x_1 и x_2. Тогава за новата задача е възможно да се даде разгледаната геометрична интерпретация, от която се вижда непосредствено как трябва да се извърши графичното решаване.

Да разгледаме това с няколко примера.

. . . . . .

Пример 1. Да се намери максималната стойност на линейната функция

$$L(X)=25x_1+30x_2$$

при следните ограничения:

$$17x_1+29x_2 \leq 580;$$
$$6x_1+5x_2 \leq 124;$$
$$0{,}8x_1+1{,}2x_2 \leq 24;$$
$$5x_1+3x_2 \leq 95;$$
$$x_1 \geq 0;$$
$$x_2 \geq 0.$$

Областта D е сечението на полуравнините, определени от горните неравенства.

За да я изобразим графически, в равнината $x_1 0 x_2$ трябва да начертаем граничните прави на съответните неравенства и да проверим точките от коя полуравнина удовлетворяват зададеното неравенство. Граничните прави можем да начертаем, след като определим отрезите им с координатните оси, т. е.

$p_1: 17x_1+29x_2=580;\ x_1=0,\ x_2=20;\ x_1\approx 34,\ x_2=0.$
$p_2: 6x_1+5x_2=124;\ x_1=0,\ x_2\approx 25;\ x_1\approx 21\ x_2=0.$
$p_3: 0{,}8x_1+1{,}2x_2=24;\ x_1=0,\ x_2=20;\ x_1=30\ x_2=0.$
$p_4: 5x_1+3x_2=95;\ x_1=0,\ x_2\approx 32;\ x_1=19\ x_2=0.$

След като изобразим областта D, начертаваме векторградиента C с координати 25 и 30.

За да намерим точката, в която функцията $L(X)=25x_1+30x_2$ достига максималната си стойност, трябва да движим правата $25x_1+30x_2=\text{const}$ перпендикулярно и по направление на вектора C, докато тя стане опорна за областта D. Така определяме точката R, която е геометричният образ на оптималното решение (фиг. 2.2.7).

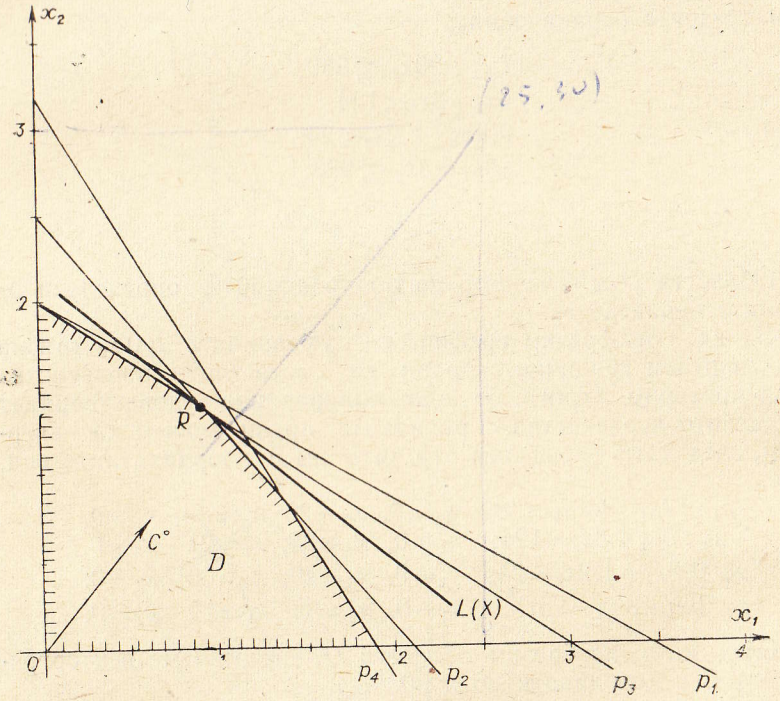
Координатите на точката R може да определим графично

или аналитично чрез съвместно решаване на уравненията на правите p_2 и p_3, тъй като R е тяхната пресечница.

$$\begin{vmatrix} 6x_1+5x_2=124, \\ 0{,}8x_1+1{,}2x_2=24. \end{vmatrix}$$
$$x_1=9,\ x_2=14.$$

Следователно оптималното решение е $x_1=9$, $x_2=14$, т. е. от първия вид убежища трябва да се построят 9, а от втория — 14. Максималният брой хора, които ще се поберат в построените убежища, е

$$25.9+30.14=645.$$



Фиг. 2.2.7

Получените стойности на x_1 и x_2 удовлетворяват ограничаващите условия:

$$17.9+29.14=559<580;$$
$$6.9+5.14=124;$$

$$0{,}8.9+1{,}2.14=24;$$
$$5x_1+3x_2=87<95.$$

Следователно лимитиращи ресурси в нашия пример са дървеният материал и машиночасовете от екскаватори.

Пример 2. Да се намери минималната стойност на функцията

$$L(X)=25x_1+50x_2$$

при следните условия:

$$3x_1+x_2=400;$$
$$x_1+x_2=300;$$
$$x_1+3x_2=900;$$
$$x_1\geq 0;\ x_2\geq 0.$$

Определяме областта D, като намираме отрезите на правите с координатните оси, начертаваме ги и проверяваме точките на коя полуравнина удовлетворяват дадените неравенства. В случая областта D е неограничена отгоре (фиг. 2.2.8).

За да намерим минималната стойност на линейната функция, движим правата $25x_1+50x_2=const$ перпендикулярно на вектора C (25, 50), успоредно **сама на себе** си в обратна посока на вектора до точка R.

Координатите на точка R (250,50) дават решението на задачата: $x_1=250$; $x_2=50$; $\min L(x)=25.250+50.50=6250+2500=8750$.

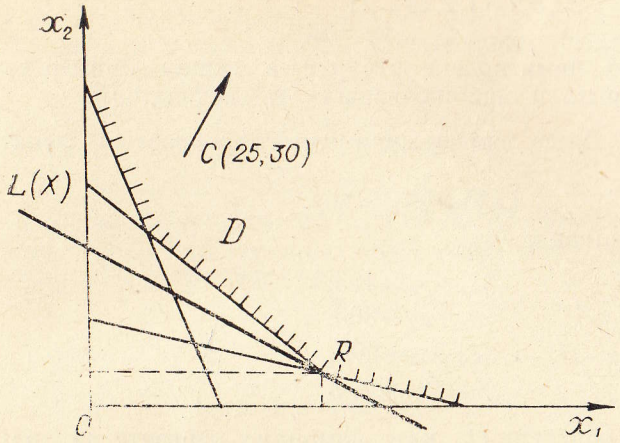
Пример 3. Да се намери максимумът на линейната функция

$$L(X)=2x_1+3x_2$$

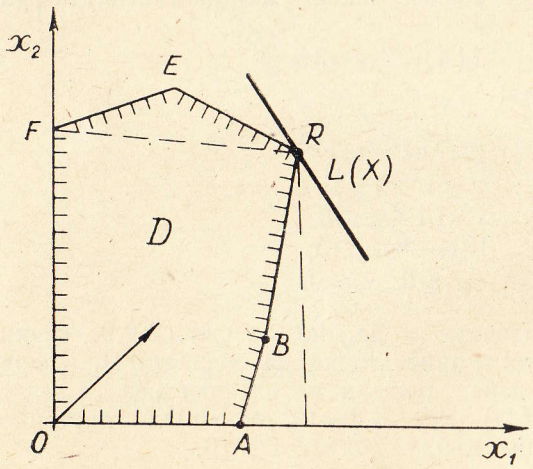
при следните условия:

$$-2x_1+5x_2\leq 10;$$
$$x_1-x_2\leq 1;$$
$$x_1+2x_2\leq 6;$$
$$10x_1-3x_2\leq 15;$$
$$x_1\geq 0;\ x_2\geq 0.$$

Решението на задачата е дадено на фиг. 2.2.9. Точките O,A,B,C,E и F са контурните точки на областта D. Координатите на точка R дават решението на поставената задача: $x_1=2$ и $x_2=2$; $\max L(x)=2.2+3.2=10$. Максималната стойност на линейната функция върху областта е 10.



Фиг. 2.2.8



Фиг. 2.2.9

4. МЕТОД НА ПОСЛЕДОВАТЕЛНОТО ПОДОБРЯВАНЕ НА ПЛАНА (СИМПЛЕКСЕН МЕТОД)

4.1. Основни понятия и свойства на решението на задачата на линейното програмиране

Общата задача на линейното програмиране, както видяхме, се състои в намиране на вектора $X=(x_1,x_2, \ldots, x_n)$, който минимизира (максимизира) стойността на линейната функция

$$L(X)=CX \qquad (2.2.10)$$

при следните ограничаващи условия:

$$AX=B; \qquad (2.2.11)$$

$$X \geqq 0. \qquad (2.2.12)$$

Определение 1. Всеки вектор $X=(x_1,x_2, \ldots, x_n)$, който удовлетворява ограничаващите условия (2.2.11) и (2.2.12), се нарича план (възможно решение, допустимо решение) на задачата на линейното програмиране.

Определение 2. Планът $X=(x_1,x_2, \ldots,x_n)$ се нарича опорен (основно базисно решение), ако векторите P_j, съответстващи на положителните му компоненти $x_j>0$, са линейно независими.

Определение 3. Ако опорният план съдържа точно m положителни компоненти, той се нарича неизроден, а съответната система линейно независими вектори — базис на опорния план.

Тъй като векторите са от m-мерното пространство, може да има най-много m линейно независими вектори, а следователно и броят на положителните компоненти на опорния план не може да е по-голям от m.

Определение 4. Решение на задачата (оптимален план) на линейното програмиране се нарича планът, за който стойността на линейната функция е минимална (максимална).

Теорема 1. Множеството планове на задачата на линейното програмиране е изпъкнало множество, т. е. областта D е изпъкнала.

Нека X_1 и X_2 са плановете, т. е. $X_1 \in D$ и $X_2 \in D$. Ще покажем, че всяка тяхна изпъкнала линейна комбинация е пак план на задачата.

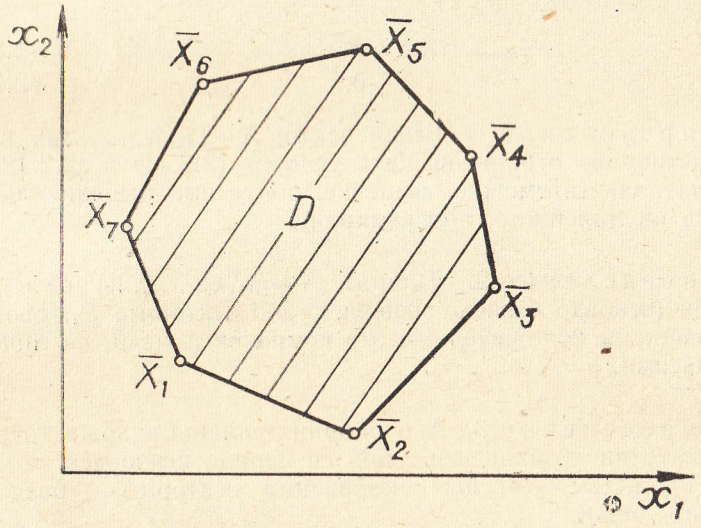
Образуваме вектора X:

$$X = \alpha X_1 + (1-\alpha)X_2;\ 0 < \alpha < 1.$$

Вижда се, че $X \geq 0$,

$$AX = A[\alpha X_1 + (1-\alpha)X_2] = \alpha AX_1 + AX_2 - \alpha AX_2,$$
$$AX = \alpha B + B - \alpha B = B,$$

откъдето следва, че векторът X удовлетворява (2.2.11) и (2.2.12), т. е. той е план на задачата.



Фиг. 2.2.10

Т е о р е м а 2. Линейната функция $L(X)$ достига максималната си стойност в крайна точка на областта D. Ако тя достига минимум в повече от една крайна точка, тя има същата стойност и за всяка точка, която е изпъкнала линейна комбинация на тези точки.

Д о к а з а т е л с т в о. Областта D е изпъкнал многостен и има краен брой крайни точки. В двумерното пространство D ще има вида, даден на фиг. 2.2.10.

Да означим крайните точки на D с X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, а оптималния план — с X°.

Ако X° е крайна точка, първото твърдение в теоремата е доказано. Да допуснем, че X° не е крайна точка. Тогава може да я представим като изпъкнала линейна комбинация от крайните точки на D, т. е.

$$X^\circ = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \overline{X}_i;\quad \alpha_i \geq 0 \text{ и } \sum_{i=1}^{p} \alpha_i = 1.$$

Тогава

$$f(X^\circ) = f\left(\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \overline{X}_i\right) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i f(\overline{X}_i) = m,$$

където m е минимумът на $f(X)$ върху D.

Нека $f(\overline{X}_m) = \min f(\overline{X}_i)$,

тогава

$$f(X^\circ) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_1 f(\overline{X}_1) \geq \sum_{i=1}^{p} \alpha_{im} = m \sum_{i=1}^{p} \alpha_i = m = f(\overline{X}_m).$$

Тъй като по предположение $f(X^\circ) \leq f(X)$ за всяко $X \in D$, то

$$f(X^\circ) = f(\overline{X}_m) = m,$$

т. е. съществува крайна точка $\overline{X}_m \in D$, в която $f(X)$ достига своята минимална стойност. С това е доказана първата част от теоремата.

За доказателство на втората част допускаме, че $f(X)$ достига минимална стойност в точките $\overline{X}_1, \overline{X}_2, \ldots, \overline{X}_q$, т. е.

$$f(\overline{X}_1) = f(\overline{X}_2) = \ldots = f(\overline{X}_q) = m.$$

Нека

$$X = \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \overline{X}_i,\quad \alpha_i \geq 0 \text{ и } \sum_{i=1}^{q} \alpha_i = 1,$$

тогава

$$f(X) = f\left(\sum_{i=1}^{q} \alpha_i \overline{X}_i\right) = \sum_{i=1}^{q} \alpha_i f(\overline{X}_i) = \sum_{i=1}^{q} \alpha_i m = m \sum_{i=1}^{q} \alpha_i = m.$$

С това теоремата е доказана.

Теорема 3. Множеството от опорни планове на задачата на линейното програмиране съвпада с множеството от крайни точки на областта.

Доказателство. Нека $X=(x_1, x_2, \ldots x_n)$ е опорен план, т. е. векторите $P_1, P_2, \ldots, P_k$ са линейно независими и

$$P_0=x_1P_1+x_2P_2+\ldots+x_kP_k,$$

където $x_i>0$ за $i=1, 2, \ldots, k$ и $x_i=0$ за $i=k+1, \ldots, n$. Ще докажем, че тогава $X=(x_1, x_2 \ldots, x_k, 0, 0, \ldots, 0)$ е крайна точка на D.

Да допуснем, че X не е крайна точка на D. Тъй като точката X е план, тя може да се представи като изпъкнала линейна комбинация на точките X_1 и X_2 $\in D$.

Понеже $X_1 \geq 0$ и $X_2 \geq 0$ и последните $n-k$ компоненти на X са нули, тогава

$$X_1=(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_k^{(1)}, 0, 0 \ldots, 0);$$
$$X_2=(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_k^{(2)}, 0, \ldots, 0).$$

Тъй като X_1 и X_2 са планове, тогава

$$x_1^{(1)}P_1+x_2^{(1)}P_2+\ldots+x_k^{(1)}P_k=P_0,$$

т. е.

$$x_1^{(2)}P_1+x_2^{(2)}P_2+\ldots+x_k^{(2)}P_k=P_0.$$

Понеже векторите $P_1, P_2, \ldots P_k$ са линейно независими, векторът P_0 има единствено разложение по тях и следователно

$$x_i=x_i^{(1)}=x_i^{(2)}.$$

Това означава, че не е възможно да представим точка $X \in D$ във вид на изпъкнала линейна комбинация на две различни точки от D. Следователно X е крайна точка на D.

Сега ще докажем, че ако $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ е крайна точка на D, тя е опорен план, т. е. векторите, съответстващи на положителните компоненти x_i на X, образуват линейно независима система.

Нека приемем, че първите k компоненти на X са различни от нула, така че

$$P_0^0=\sum_{i=1}^{k} x_i P_i.$$

Да допуснем, че векторите $P_1, P_2, \ldots, P_k$ са линейно зависими, т. е. съществуват числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, при които

$$\lambda_1P_1+\lambda_2P_2+\ldots+\lambda_kP_k=0 \qquad (2.2.13)$$

и поне един от коефициентите $\lambda_i \neq 0$. По предположение

$$x_1P_1+x_2P_2+\ldots+x_kP_k=P_0. \qquad (2.2.14)$$

Нека умножим (2.2.13) с $d>0$ и да го прибавим и извадим от (2.2.14). Тогава получаваме

$$\sum_{i=1}^{k} x_iP_i+d\sum_{i=1}^{k}\lambda_iP_i=P_0, \text{ т. е. } \sum_{i=1}^{k}(x_i+d.\lambda_i)P_i=P_0;$$

$$\sum_{i=1}^{k} x_iP_i-d\sum_{i=1}^{k}\lambda_iP_i=P_0, \text{ т. е. } \sum_{i=1}^{k}(x_i-d\lambda_i)P_i=0,$$

от което следва, че системата (2.2.14) има две решения:

$$\begin{cases} X_1=(x_1+d\lambda_1, x_2+d\lambda_2, \ldots, x_k+d\lambda_k, 0, 0, \ldots 0) \\ X_2=(x_1-d\lambda_1, x_2-d\lambda_2, \ldots, x_k-d\lambda_k, 0, 0, \ldots 0) \end{cases} \qquad (2.2.15)$$

Тъй като $x_i>0$ за $i=1,2,\ldots,k$, можем да изберем d толкова малко, че първите k компоненти на X_1 и X_2 да станат положителни, т. е. X_1 и X_2 да бъдат планове. Но от (2.2.15) следва, че

$$X=\frac{1}{2}X_1+\frac{1}{2}X_2, \quad X_1 \neq X_2 \text{ и } X_1, X_2 \in D,$$

което противоречи на това, че X е крайна точка. Следователно системата вектори $P_1, P_2, \ldots, P_k$ е линейно независима и X е опорен план. Тъй като векторите $P_1, P_2, \ldots, P_n$ са m-мерни, всяка крайна точка може да има най-много m положителни компоненти.

От разгледаните теореми следва, че на всеки опорен план съответствува крайна точка от изпъкналата област D и че минимумът на линейната функция се достига в крайна точка. Тогава, за да намерим оптималното решение, трябва да пресметнем стойността на $L(X)$ за всички опорни планове (крайни точки на D) и да определим онзи от тях, на който съответствува най-малка стойност. Но при големи стойности на m (броя на уравненията) и n (броя на неизвестните) броят на опорните планове е от порядъка на C_n^m и практически е невъзможно да се намери оптималният план.

Значително се намалява обемът на пресмятанията по метода на последователното подобряване на плана (симплекс-метода), чиято същност е следната.

Като се тръгне от един опорен план, преминава се към друг, за който линейната функция приема по-малка стойност от предидущата. Така чрез краен брой стъпки се получава оптимално решение или се установява, че задачата няма планове или че линейната функция е неограничена върху областта D, определена от условията (4.2.11) и (4.2.12).

Ще се спрем на въпросите за намиране на първоначален опорен план, преминаване от един опорен план към друг, за който линейната функция приема по-малка стойност, и намиране на оптимален план, към които въпроси се свежда решаването на задачата на линейното програмиране чрез симплексния метод.

4.2. Построяване на начални опорни планове

Както вече отбелязахме, един план се нарича опорен, ако векторите, съответстващи на положителните му компоненти в разположението на вектора $P_0=x_1P_1+x_2P_2+\ldots+x_nP_n$, образуват линейно независима система, която се нарича базис на опорния план.

Затова при построяване на начални опорни планове се стремим да намерим m линейно независими вектори, които образуват началния базис, и като разложим по тях вектора P_0, да получим положителните компоненти на началния опорен план. Останалите компоненти са нули.

а) Ако системата ограничаващи условия е от вида $AX=B$ и в матрицата A се съдържа единичната матрица от m-ти ред, векторите, от които е съставена, образуват базис, защото детерминантата на единичната матрица е равна на единица, т. е. различна е от нула. Като разложим вектора P_0 по векторите на единичната матрица, получаваме положителните компоненти на опорния план, а останалите компоненти са равни на нула.

Пример 1. Да се намери минималната стойност на линейната функция

$$L(X)=2x_1+4x_2-9x_3+x_4-2x_5$$

при следните условия:

$$3x_1+x_2+4x_5=15;$$
$$4x_1+x_3+11x_5=34;$$

$$2x_1+x_4+3x_5=12;$$
$$x_1\geq 0;\ x_2\geq 0;\ x_3\geq 0;\ x_4\geq 0;\ x_5\geq 0.$$

Системата уравнения може да се напише:

$$3x_1+x_2\qquad+4x_5=15;$$
$$4x_1+\ x_3\quad+11x_5=34;$$
$$2x_1+\qquad x_4+3x_5=12.$$

Векторите P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 и P_0 са следните:

$$P_1=\begin{pmatrix}3\\4\\2\end{pmatrix};\quad P_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix};\quad P_3=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix};\quad P_4=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix};$$

$$P_5=\begin{pmatrix}4\\11\\3\end{pmatrix};\quad P_0=\begin{pmatrix}15\\34\\12\end{pmatrix}.$$

Векторите P_2, P_3, P_4 образуват началния базис, защото са единични тримерни вектори в тримерното пространство и матрицата, образувана от тях, има винаги детерминанта, различна от нула

$$|A|=|P_2\,P_3\,P_4|=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}=1\neq 0,$$

т. е. те винаги образуват линейно независима система вектори. Тогава векторът P_0 ще има следното разложение по P_2, P_3 и P_4:

$$P_0=15P_2+34P_3+12P_4.$$

Началният опорен план е $x_1=0$, $x_2=15$, $x_3=34$, $x_4=12$ и $x_5=0$, т. е. положителните му компоненти са равни на компонентите на вектора P_0.

б) Когато в матрицата A не се съдържа единичната матрица от ред m и системата ограничаващи условия е система неравенства от вида $AX\leq B$, а векторът B има положителни компоненти, въвеждат се допълнителни положителни неизвестни x_{n+1}, x_{n+2},..., x_{n+m}, които се прибавят към съответните неравенства и системата се превръща в система уравнения. Тогава векторите P_{n+1}, P_{n+2}, ..., P_{n+m}, съответстващи на допълнително въведените променливи, образуват началния базис. Те са елементи на единичната матрица и следователно са линейно независими. Началният опорен план е

$$x_1=x_2=\ldots=x_n=0;\ x_{n+1}=b_1;\ x_{n+2}=b_2;\ldots;\ x_{n+m}=b_m.$$

Пример 2. Да се намери минималната стойност на линейната функция

$$L(X)=2x_1-x_2+3x_3$$

при следните ограничаващи условия:

$$x_1+2x_2+2x_3\leq 16;$$
$$2x_1-x_2+8x_3\leq 24;$$
$$3x_2+x_3\leq 9;$$
$$x_1\geq 0;\ x_2\geq 0;\ x_3\geq 0.$$

Въвеждаме допълнителните неизвестни x_4, x_5, x_6, които прибавяме съответно към първото, второто и третото неравенство. По този начин системата неравенства се превръща в система равенства и се получава единичната матрица.

На началната задача съответствува следната задача.

Да се намери минималната стойност на линейната функция

$$L(X)=2x_1-x_2+3x_3+0x_4+0x_5+0x_6$$

при следните условия:

$$x_1+2x_2+2x_3+x_4 \qquad =16;$$
$$2x_1-x_2+8x_3 \quad +x_5 \quad =24;$$
$$3x_2+x_3 \qquad +x_6=9.$$

Векторите P_4, P_5 и P_6 образуват началния базис

$$P_0=16P_4+24P_5+9P_6.$$

Първоначалният опорен план $X=(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6)$ има компоненти

$$x_1=0,\ x_2=0,\ x_3=0,\ x_4=16,\ x_5=24,\ x_6=9.$$

в) Ако системата на ограничаващите условия е система равенства ($AX=B$) и в матрицата A не се съдържа единичната матрица от ред m, въвеждат се изкуствени променливи $x_{n+1},\ \ldots,\ x_{n+m}$ и така се получават началният базис $P_{n+1},\ldots,$ P_{n+m} и началният опорен план $X=(0,\ 0,\ldots,0,\ b_1,\ b_2,\ \ldots,b_m)$. Този случай е най-често срещаният и затова ще се спрем върху него по-подробно и в следващото изложение под название „метод на изкуствения базис“.

Компонентите на опорния план, съответствуващи на векторите на базиса, се наричат базисни променливи, а останалите — небазисни. Задачата на линейното програмиране се нарича неизродена, ако всеки неин опорен план е неизроден, т. е. съдържа точно m положителни компоненти.

4.3. Преминаване от един опорен план към друг

Да предположим, че е намерен един неизроден опорен план. Без да се нарушава общността на разглежданията, може да се приеме, че той има вида

$$X=(x_1,\ x_2,\ldots,\ x_m,\ 0,\ 0,\ldots 0),$$

а базисът му се състои от векторите $P_1,P_2,P_3,\ldots,P_m$. Тогава векторът P_0 може да се представи и така:

$$P_0=x_1P_1+x_2P_2+\ldots+x_mP_m;\quad P_0=\sum_{i=1}^{m}x_i\,P_i. \qquad (2.2.16)$$

Тъй като векторите $P_1,\ P_2,\ldots,\ P_m$ образуват базис, всеки от тях може да се представи като линейна комбинация на векторите от базиса

$$P_j=\sum_{i=1}^{m}x_{ij}\,P_i;\ j=1,\ 2,\ldots,\ n. \qquad (2.2.17)$$

Да предположим, че за някой вектор P_j, който не влиза в базиса, поне един от коефициентите x_{ij} е положително число. Да проследим как ще се измени стойността на линейната функция $L(X)$, ако преминем към нов план $X^*=(x_1^*,$ $x_2^*,\ldots,\ x_m^*,\ 0,\ 0,\ldots,\ 0,\ \theta,\ 0,\ldots,\ 0)$, в чиито базис ще влезе векторът P_j и който се получава от плана X, като положим j-тата му компонента, равна на положителното число θ, небазисните променливи $x_{m+1}^*=x_{m+2}^*=\ldots=x_{m+n}^*=0$, а базисните променливи $x_1^*,\ x_2^*,\ldots,\ x_m^*$ са такива, че да са изпълнени условията (2.2.11) и (2.2.12).

За плана X^* е в сила равенството

$$P_0=\sum_{i=1}^{m}x_i^*P_i+\theta P_j. \qquad (2.2.18)$$

За да свържем компонентите x_i^* с x_i, използуваме равенствата (2.2.16) и (2.2.17).

Като умножим второто равенство по θ и го извадим от първото, получаваме

$$\sum_{i=1}^{m}(x_i-\theta x_{ij})P_i=P_0-\theta P_j. \qquad (2.2.19)$$

Като сравним (2.2.18) и (2.2.19), получаваме

$$\begin{cases} x_i^* = x_i - \theta x_{ij}; & i = 1, 2, \ldots, m; \\ x_j^* = \theta; & i = j. \end{cases} \qquad (2.2.20)$$

За да бъде векторът X план, θ трябва да е такова, че $x_i - \theta x_{ij} \geq 0$; $i = 1, 2, \ldots, m$ за всички положителни x_{ij}. Оттук следва, че

$$x_i \geq \theta x_{ij}, \text{ т. е. } \theta \leq \frac{x_i}{x_{ij}} \text{ за } x_{ij} > 0.$$

Ако вземем

$$\theta = \theta_0 = \min \frac{x_i}{x_{ij}}, \; x_{ij} > 0,$$

ще получим план с точно m положителни компоненти, защото задачата е неизродена и минимумът се достига само за една стойност на i, например за $i = k$. Тогава

$$x_к^* = x_k - \frac{x_к}{x_{kj}} x_{kj} = 0.$$

Следователно новият план ще има вида

$$X^* = (x_1 - \theta_0 x_{1j}, \; x_2 - \theta_0 x_{2j}, \ldots, \; x_{k-1} - \theta_0 x_{k-1,j}, \; x_{k+1} - \theta_0 x_{k+1,j}, \ldots,$$

$$x_m - \theta_0 x_{mj}).$$

Векторът P_k излиза от базиса, а на негово място влиза векторът P_j. Този план, за да е опорен, векторите P_1, $P_2, \ldots, P_{k-1}$, P_j, $P_{k+1}, \ldots, P_m$ трябва да образуват базис, т. е. да се докаже, че тази система вектори е линейно независима.

Да допуснем, че тя е линейно зависима. Тогава съществуват числа λ_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, поне едно от които е различно от нула, и такива, че

$$\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \ldots + \lambda_{k-1} P_{k-1} + \lambda_k P_j + \lambda_{k+1} P_{k+1} + \ldots + \lambda_m P_m = 0. \qquad (2.2.21)$$

Заместваме P_j в (2.2.21) с равното му от формулата

$$P_j = \sum_{i=1}^{m} x_{ij} P_i \quad \text{и получаваме}$$

$$(\lambda_1 + \lambda_k x_{1j}) P_1 + \ldots + \lambda_k x_{kj} P_k + \ldots + (\lambda_m + \lambda_k x_{mj}) P_m = 0. \qquad (2.2.22)$$

Тъй като векторите P_1, $P_2, \ldots, P_m$ са линейно независими, от горното равенство следва, че коефициентите пред тях трябва да са равни на нула, по-конкретно

$$\lambda_k x_{kj} = 0.$$

Понеже $x_{kj} > 0$, следва, че $\lambda_k = 0$. Системата от вектори P_1, $P_2, \ldots, P_{k-1}$, $P_{k+1}, \ldots, P_m$ е линейно независима като подсистема на система линейно независими вектори. Тогава от (2.2.21) и $\lambda_k = 0$ следва, че всички $\lambda_i = 0$ за $i = 1, 2, \ldots, m$, което противоречи на условието поне едно от тях да е различно от нула. Следователно системата вектори P_1, $P_2, \ldots, P_{k-1}$, P_j, $P_{k+1}, \ldots, P_m$ е линейно независима.

Да разгледаме с един пример преминаването от един опорен план към друг.

В пример 2 векторите P_4, P_5 и P_6 образуват базис. Началният опорен план е $X = (0, 0, 0, 16, 24, 9)$, а векторите P_0, P_1, P_{24}, P_3 имат следното разложение по векторите от базиса:

$P_0 = 16P_4 + 24P_5 + 9P_6$; $\quad x_4 = 16$; $\; x_5 = 24$; $\; x_6 = 9$;
$P_1 = 1P_4 + 2P_5 + 0P_6$; $\quad x_{41} = 1$; $\; x_{51} = 2$; $\; x_{61} = 0$;
$P_2 = 2P_4 - P_5 + 3P_6$; $\quad x_{42} = 2$; $\; x_{52} = -1$; $\; x_{62} = 3$;
$P_3 = 2P_4 + 8P_5 + P_6$; $\quad x_{45} = 2$; $\; x_{53} = 8$; $\; x_{63} = 1$.

Тъй като в разложението на вектора P_2 имаме

$$x_{42} = 2, \; x_{52} = -1, \; x_{62} = 3, \text{ т. е. } x_{42} > 0 \text{ и } x_{62} > 0,$$

може да се образува нов опорен план, в базиса на който влиза векторът P_2. Умножаваме по θ третото равенство и го изваждаме от първото, при което получаваме

$$P_0 = (16 - 2\theta) P_4 + (24 + \theta) P_5 + (9 - 3\theta) P_6 + \theta . P_2.$$

Определяме θ_0.

$$\theta_0 = \min\left(\frac{16}{2}, \; \frac{9}{3}\right) = \min\,(8, 3) = 3.$$

Като поставим полученото значение за θ в горното равенство, получаваме

$$P_0 = 10P_4 + 27P_5 + 0.P_6 + 3P_2.$$

Новият опорен план има компоненти

$$x_1^* = 0, \; x_2^* = 3, \; x_3^* = 0, \; x_4^* = 10, \; x_5^* = 27, \; x_6^* = 0.$$

Новият базис се състои от векторите P_2, P_4, P_5. В него влиза P_2, а излиза P_6. Да отбележим, че

$$\theta_0 = \min\left(\frac{x_4}{x_{42}}, \; \frac{x_6}{x_{62}}\right) = \frac{x_6}{x_{62}}.$$

Индексът на излизащия вектор се намира в числителя, а на влизащия — в знаменателя.

4.4. Намиране на оптималния план

Да пресметнем стойността на линейната функция $L(X)$ за опорния план x^*.

$$L(X^*)=\sum_{i=1}^{m}c_i x_i^* + c_j\,\theta=\sum_{i=1}^{m}c_i(x_i-\theta x_{ij})+c_j\theta=$$

$$=\sum_{i=1}^{m}c_i\,x_i-\theta\left(\sum_{i=1}^{m}c_i\,x_{ij}-c_j\right)=L(X)-\theta\,\Delta_j,$$

където с Δ_j означаваме разликата z_j-c_j.
От това равенство се вижда, че ако $\Delta j>0$, линейната функция се намалява, ако $\Delta j=0$, тя запазва значението си, а ако $\Delta j<0$, тя се увеличава.

Изобщо възможни са следните три случая:

1. $\Delta j\leq 0$ за $j=1, 2, \ldots, n$.
2. $\Delta j>0$ за някои j и всички съответстващи на този индекс числа $x_{ij}\leq 0$ за $i=1, 2,\ldots, m$.
3. $\Delta j>0$ за някои индекси j и за всеки от тях поне едно от числата $x_{ij}>0$.

Критерии за оптималност. Опорният план $X=(x_1, x_2,\ldots, x_m, 0,\ldots, 0)$ е решение на задачата на линейното програмиране (при задачи за намиране на минималната стойност на $L(X)$, ако $\Delta j=z_j-c_j\leq 0$ за $j=1, 2,\ldots, n$.

Доказателство.

Нека $\widetilde{X}=(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_1,\ldots, \widetilde{x}_n)$ е произволен план. Ще покажем, че $L(X)\leq L(\widetilde{X})$, ако $\Delta_j=z_j-c_j\leq 0$ за $j=1, 2,\ldots, n$. Тъй като $\widetilde{X}$ е план, то

$$P_0=\sum_{j=1}^{n}\widetilde{x}_j P_j. \qquad (2.2.23)$$

$$P_j=\sum_{i=0}^{m}x_{ij}P_i. \qquad (2.2.24)$$

Заместваме израза за P_j от (2.2.24) в (2.2.23) и получаваме

$$P_0=\sum_{j=1}^{n}\widetilde{x}_i\left(\sum_{i=1}^{m}x_{ij}P_i\right)=\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}\widetilde{x}_j x_{ij}\right)P_i.$$

Следователно $\sum_{j=1}^{n}\widetilde{x}_j x_{ij}=x_i$ (тъй като $P_0=\sum_{i=1}^{m}x_i P_i$ има единствено представяне).

Понеже $z_j-c_j\leq 0$, т. е. $c_j\geq z_j$, $j=1, 2,\ldots, n$, то

$$L(\widetilde{X})=\sum_{j=1}^{n}c_j\widetilde{x}_j\geq\sum_{j=1}^{n}z_j\widetilde{x}_j=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}c_i x_{ij}\right)\widetilde{x}_j=$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}\widetilde{x}_j x_{ij}\right)c_i=\sum_{i=1}^{m}x_i c_i=L(X).$$

С това критерият за оптималност е доказан.

Във втория случай, когато $\Delta_j>0$ за някои j и всички $x_{ij}\leq 0$, $\theta=\theta_0=\min\frac{x_i}{x_{ij}}$ няма горна граница и следователно $L(X)$ може да стане колкото си искаме малка за $X=X^*$, т. е.

$$L(X)=L(X^*)+\theta\Delta_j.$$

Тъй като $\theta>0$, $\Delta_j>0$, то $\theta\Delta_j>0$ и следователно $L(X^*)<L(X)$.

Компонентите $x_i^*=x_i-\theta x_{ij}$ на X са положителни при всяко $\theta>0$. В този случай $L(X)$ е неограничена отдолу върху областта D.

Когато $\Delta_j>0$ за някой индекс j и за всяко такова j поне едно от числата $x_{ij}>0$, може да се премине от един опорен план X към друг, за който стойността на линейната функция $L(X^*)$ е по-малка от предишната. И наистина, тъй като

$$L(X^*)=L(X)-\theta\Delta_j$$

и $\theta>0$, $\Delta_j>0$, то $L(X^*)<L(X)$.

Ако предположим за определеност, че за $j=s$ и $\Delta_s>0$ и поне едно от числата $x_{is}>0$, то

$$\theta=\theta_0=\min\frac{x_i}{x_{is}}.$$

Тъй като задачата е неизродена, минимумът се достига само за една стойност на индекса i. Нека приемем, че за $i=k$ се достига минимумът. Тогава

$$\theta=\min\frac{x_i}{x_{is}}=\frac{x_k}{x_{ks}}.$$

Тогава в новия базис ще влезе векторът P_s, а ще излезе векторът P_k. Опорният план X^* ще бъде

$$X^*=\left(x_1-\frac{x_k}{x_{ks}}x_{1s},\ x_2-\frac{x_k}{x_{ks}}x_{2s},\ldots,\ x_{k-1}-\frac{x_k}{x_{ks}}x_{k-1s},\ 0,\right.$$

$$\left.\ldots,\ x_m-\frac{x_k}{x_{ks}}x_{ms},\ \frac{x_k}{x_{ks}}\right).$$

Компонентите x_j^* на новия план се пресмятат по формулите

$$\begin{cases} x_i^*=x_i-\dfrac{x_k}{x_{ks}}x_{is} & \text{за } i=1,\ 2,\ldots,\ s-1,\ s+1,\ldots,\ m; \\ x_s^*=\dfrac{x_k}{x_{ks}} & \text{за } i=s. \end{cases} \tag{2.2.25}$$

Да определим и коефициентите x_{ij}^* в разложението на векторите $P_1,\ P_2,\ldots,\ P_n$ по векторите от новия базис.

$$P_j=x_{1j}^*P_1+x_{2j}^*P_2+\ldots+x_{sj}^*P_s+\ldots+x_{mj}^*P_m. \tag{2.2.26}$$

Както видяхме, разложението на векторите P_j по базиса $P_1,\ P_2,\ldots,\ P_m$ е

$$P_j=x_{1j}P_1+x_{2j}P_2+\ldots+x_{kj}P_k+\ldots+x_{mj}P_m. \tag{2.2.27}$$

Векторът P_s ще има представянето

$$P_s=x_{1s}P_1+x_{2s}P_2+\ldots+x_{ks}P_k+\ldots+x_{ms}P_m.$$

Оттук за P_k получаваме

$$P_k=\frac{1}{x_{ks}}(P_s-x_{1s}P_1-x_{2s}P_2-\ldots-x_{ms}P_m).$$

Ако заместим този израз за P_k в (2.2.21), ще получим

$$P_j=\left(x_{ij}-\frac{x_{kj}}{x_{ks}}x_{1s}\right)P_1+\ldots+\frac{x_{kj}}{x_{ks}}P_s+\ldots+\left(x_{mj}-\frac{x_{kj}}{x_{ks}}x_{ms}\right).P_m. \tag{2.2.28}$$

От (2.2.26) и (2.2.28) следва, че

$$\begin{cases} x_{ij}^*=x_{ij}-\dfrac{x_{kj}}{x_{ks}} & \text{за } i=1,\ 2,\ldots,\ s-1,\ s+1,\ldots,\ m; \\ x_{sj}^*=\dfrac{x_{kj}}{x_{ks}} & \text{за } j=1,\ 2,\ldots,\ n. \end{cases} \tag{2.2.29}$$

Ако означим компонентите на опорните планове с x_{i_0} и x_{i0}^*, (2.2.25) и (2.2.28) може да се обединят в следната формула

$$x_{ij}^*=\begin{cases} x_{ij}-\dfrac{x_{kj}}{x_{ks}}x_{is} & \text{за } i=1,\ 2,\ldots,\ s-1,\ s+1,\ldots,\ m. \\ \dfrac{x_{kj}}{x_{ks}} & \text{за } i=s \text{ и } j=0,\ 1,\ 2,\ldots,\ n. \end{cases} \tag{2.2.30}$$

Продължаваме по-нататък пресмятанията, като за новия опорен план намираме величините $\Delta_j^*=\sum x_{ij}^*c_j^*-c_j$. Ако $\Delta_j^*>0$, то X^* е оптималният план, ако $\Delta_j^*>0$ и имаме случай 2, задачата няма решение, а при случай 3 преминаваме към нов опорен план, за който стойността на линейната функция е по-малка от предишната. Така, като се извършват тези пресмятания, чрез краен брой итерации се достига до оптималното решение или се установява неограничеността на линейната функция.

Ако при пресмятането на Δ_j се получат повече от един индекси j, за които $\Delta_j>0$, и във всички случаи имаме поне едно число $x_{ij}>0$, в новия базис може да се включи който и да е от векторите P_j. Но, както доказва Данциг, най-бързо, чрез най-малък брой итерации се достига до оптималното решение, ако в базиса включим вектора, на който съответствува най-голяма стойност на Δ_j (при търсене на максимум на линейната функция $L(X)$ Δ_j е отрицателно и трябва да се вземе най-голямото по абсолютна стойност).

4.5 Алгоритъм на симплексния метод

Алгоритъмът на симплексния метод се основава на направените теоретични разглеждания. За пресмятанията, свързани с преминаване от един опорен план към друг, за който стойността на линейната функция е по-малка, е удобно да се използуват таблици от следния вид (таблица 2.2.1).

Таблица 2. 2. 1

θ	Целеви стълб C	Стълб на базиса Б	X	c_1	c_2	...	c_m	c_{m+1}	...	c_j	...	c_n	Целеви ред
				P_1	P_2	...	P_m	P_{m+1}	...	P_j	...	P_n	Ред на векторите
	c_1	P_1	x_1	1	0	...	0	x_{1m+1}	...	x_{1j}	...	x_{1n}	
	c_2	P_2	x_2	0	1	...	0	x_{2m+1}	...	x_{2j}	...	x_{2n}	
	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	
	c_n	P_m	x_m	0	0	...	1	x_{mm+1}	...	x_{mj}	...	x_{mn}	
			L(x)	$\Delta_1=0$	$\Delta_2=0$	...	$\Delta_m=0$	Δ_{m+1}	...	Δ_j	...	Δ_n	Индексен ред $\Delta_j=z_j-c_j$

В целевия ред се нанасят коефициентите пред неизвестните в линейната (целевата) функция над съответните вектори от реда на векторите. В стълба на базиса се нанасят векторите от началния базис $P_1,P_2,\ldots,P_m$. В стълба X се нанасят компонентите на опорния план X, а в целевия стълб — коефициентите от целевия ред пред неизвестните над съответните вектори от базиса. Както отбелязахме, началният базис $P_1,P_2,\ldots,P_m$ се състои от единичните вектори, а началният опорен план има вида $X=(b_1,b_2,\ldots,b_m,0,\ldots,0)$.

В стълбовете под векторите от базиса се написват компонентите на единичните вектори $P_1,P_2,\ldots,P_m$, а в стълбовете под небазисните вектори P_j — коефициентите $x_{ij}(i=1,2,\ldots,m)$ в разложението на векторите P_j по векторите от базиса. Началните стойности на x_{ij} съвпадат с коефициентите a_{ij} в матрицата A, тъй като разположението се извършва по единичните вектори.

След като се попълнят тези изходни данни, преминава се към:

1. Пресмятане на $\Delta_j=Z_j-c_j=\sum_{i=1}^{m} c_i x_{ij}-c_j$ за $j=0,1,2,\ldots,n$.

Ясно е, че $\Delta_1=\Delta_2=\ldots=\Delta_m=0$.

Ако всички $\Delta_j\leq 0$, планът X е оптимален. Ако за някои j $\Delta_j>0$, индексът на вектора, който ще въведем в базиса, се определя от $\max\Delta_j=\Delta_s$.

2. Пресмятане на $\theta=\min\frac{x_i}{x_{is}}$ за $x_{is}>0$. Ако всички $x_{is}\leq 0$, задачата е неограничена отдолу. Нека минимумът на отношението $\frac{x_i}{x_{is}}$ се достига за $i=k$. Тогава векторът P_k подлежи на изключване от базиса.

3. Определяне на компонентите на новия опорен план x^*_{i0} и коефициентите в разложението на векторите P_j по векторите от новия базис x^*_{ij} по формули (2.2.30).

За новия опорен план повтаряме същите пресмятания, докато се получи оптималният план или се установи неограничеността на задачата.

Стълбът, отговарящ на вектора, който ще въведем в базиса, се нарича ключов (разрешаващ), а редът на вектора, подлежащ на изключване от базиса — ключов (разрешаващ) ред.

Да разгледаме следния пример. Да се намери минималната стойност на линейната функция

$$L(X)=-4x_4+3x_5-2x_6-3x_7+x_8$$

при следните условия:

$$\begin{aligned} x_5-2x_6+2x_7-x_8 &\le 14;\\ x_6-x_7+2x_8 &\le 6;\\ x_5+2x_6\ldots\ldots\ldots &\le 10;\\ x_4+2x_5-x_6\qquad +x_8 &= 9;\\ x_4\ge 0;\ x_5\ge 0;\ x_6\ge 0;\ x_7\ge 0;\ x_8\ge 0; & \end{aligned}$$

Тъй като в системата има един-единствен вектор P_4, необходимо е да се въведат допълнителните неизвестни x_1, x_2 и x_3, които, прибавени към първото, второто и третото неравенство, ги обръщат в равенства. Тогава на началната задача съпоставяме следната.

Да се намери минималната стойност на линейната функция

$$L(X)=0.x_1+0.x_2+0x_3-4x_4+3x_5-2x_6-3x_7+x_8$$

при следните условия:

$$\begin{aligned} x_1+\ldots\ldots\ldots+x_5-2x_6+2x_7+x_8 &= 14;\\ x_2+\ldots\ldots\ldots+0x_5+x_6-x_7+2x_8 &= 8;\\ x_3+\ldots\ldots+x_5+2x_6+0x_7+0x_8 &= 10;\\ x_4+2x_5-x_6+0x_7+x_8 &= 9;\\ x_1\ge 0;\ x_2\ge 0;\ x_3\ge 0;\ x_4\ge 0;\ x_5\ge 0;\ x_6\ge 0;\ x_7\ge 0;\ x_8\ge 0. & \end{aligned}$$

Единичните вектори P_1, P_2, P_3 и P_4 образуват началния базис, а началният план има компоненти $x_1=14$; $x_2=6$; $x_3=10$; $x_4=9$; $x_5=0$; $x_6=0$; $x_7=0$; $x_8=0$.

Векторите, които не влизат в базиса, се разлагат по неговите вектори, като коефициентите x_{ij} съвпадат с коефициентите a_{ij} на матрицата A, тъй като векторите от базиса са единични

$P_5=1.P_1+0.P_2+1.P_3+2P_4$; $x_{15}=1$; $x_{25}=0$; $x_{35}=1$; $x_{15}=2$;

$P_6=2.P_1+1.P_2+2.P_3+1.P_6$; $x_{16}=-2$; $x_{26}=1$; $x_{36}=2$; $x_{46}==-1$;

$P_7=2.P_1+1.P_2+0.P_3+0.P_4$; $x_{17}=2$; $x_{27}=-1$; $x_{37}=0$; $x_{47}=0$;

$P_8=-1.P_1+2.P_2+0.P_3+1.P_4$; $x_{18}=-1$; $x_{28}=2$; $x_{38}=0$; $x_{48}=1$.

1. По така определените начални данни се попълва началната таблица 2.2.2.

Таблица 2.2.2

0	Целеви стълб C	Стълб на базиса	X	0	0	0	−4	3	−2	−3	1	Целеви ред c_j
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	Ред на векторите
	0	P_1	14	1	0	0	0	1	−2	2	−1	
6	0	P_2	6	0	1	0	0	0	1	−1	2	
5	0	P_6	10	0	0	1	0	1	2	0	0	Ключов ред
	−4	P_4	9	0	0	0	1	2	−1	0	1	
			−36	0	0	0	0	−11	6	3	−5	Индексен ред $\Delta_j=z_j-c_j$

ключов стълб

2. Пресмятат се величините $\Delta_j = z_j - c_j$ за $j=1, 2,..., 8$.

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^{m} c_i x_{ij} - c_j;\ j=1, 2,.., 8.$$

Например

$$\Delta_6 = c_1 x_{16} + c_2 x_{26} + c_3 x_{36} + c_4 x_{46} - c_6;$$

$$\Delta_6 = 0(-2) + 0,1 + 0.2 + (-4)(-1) - (-2) = 4 + 2 = 6.$$

От израза $\Delta_j = \sum_{i=1}^{m} c_i x_{ij} - c_j$ се вижда, че индексът Δ_j на j-тия стълб се получава, като умножим скаларно целевия стълб по j-тия и от полученото произведение извадим съответния коефициент c_j от целевия ред. Така получаваме

$\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = \Delta_4 = 0;\ \Delta_5 = -11;\ \Delta_6 = 6;\ \Delta_7 = 3;\ \Delta_8 = -5.$

3. Намираме най-голямото положително число Δ_j от индексния ред. Индексът j определя индекса на влизащия в базиса вектор P_j. Стълбът на вектора P_j се нарича ключов.

В разгледания пример $\max\Delta_j = \Delta_6 = 6$. В новия базис ще влезе векторът P_6.

4. Пресмятаме величините θ.

$$\theta_0 = \min \frac{x_i}{x_{i_6}} \text{ за } x_{i_6} > 0;$$

$$\theta_0 = \min\left(\frac{x_2}{x_{2,6}}, \frac{x_3}{x_{3,6}}\right) = \frac{x_3}{x_{3,6}} = 5.$$

Индексът на X_i, за който се достига минимумът $i=3$, определя индекса на вектора, подлежащ на изключване от базиса P_3.

От горните формули се вижда, че стойностите за θ се получават, като резделим стълба на вектора X с положителните компоненти на ключовия стълб. Най-малкото число θ_0 определя вектора, който излиза от базиса, а с това и ключовия ред.

Новият базис се състои от векторите P_1, P_2, P_6 и P_4.

5. Компонентите на новия опорен план и на разложението на векторите, невлизащи в базиса, се получават по формула (4.2.2). От нея се вижда, че ако $x_{is}=0$, то $xi^*_{ij} = x_{ij}$,

т. е. ако ключовият стълб има нули, редовете на таблицата, в които те се намират, остават непроменени. Ако $x_{kj}=0$, то $x^*_{ij} = x_{ij}$, т. е. ако в ключовия ред има нули, стълбовете на таблицата, в които се намират те, остават непроменени.

Числото, което се намира едновременно в ключовия ред и стълб, се нарича **ключово число.**

Формули (2.2.30) може да се изразят още така.

Разделяме елементите на ключовия ред с ключовото число. Така се получават компонентите $\frac{x_{kj}}{x_{ks}}$ на вектора, който влиза в базиса (главния ред) (таблица 2. 2. 3).

Елементите на останалите редове се получават, като от елементите на съответния ред x_{ij} извадим елементите на главния ред $\frac{x_{kj}}{x_{ks}}$, умножени по числото, стоящо в ключовия стълб x_{is} от съответния ред (таблица2.2.3).

6. Повтаряме пресмятанията по правила 2,3,4 и 5, докато всички величини Δ_j се получават отрицателни или се установи, че линейната функция е ограничена отдолу върху областта, т. е. ключовият стълб се състои само от отрицателни числа.

За новия план Δ_7 е равно на $3>0$. Следователно в новия базис ще влезе векторът P_7. $\theta = \frac{x_1}{x_{17}}$, т. е. ще излезе векторът P_1. Преминаваме към съставяне на следващата таблица по точки 2,3,4 и 5 (таблица 2. 2. 4).

Тъй като всички Δ_j в новата таблица са отрицателни, полученият план е оптимален. Компонентите му са:

$x_1=0;\ x_2=13;\ x_3=0;\ x_4=14;\ x_5=0;\ x_6=5;\ x_7=12;\ x_8=0,$

а стойността на линейната функция е —102, т. е.

$$L(X) = -4.14 - 2.5 - 3.12 = -102.$$

Ако в решението на задачата на линейното програмиране при въвеждане на допълнителни неизвестни се получи, че някои от тях са различни от нула числа, това показва, че съответното неравенство, към което се прибавят тези неизвестни, се изпълнява като строго неравенство.

При производствена задача това показва, че съответният ресурс не се използува напълно и може да се намали със стойността на съответната допълнителна променлива. Затова при решаване на такива задачи чрез ЕСМ на печат се изваждат и стойностите на допълнителните неизвестни, за да

Таблица 2. 2. 2.

θ	Целеви стълб C	Стълб на базиса	X	0	0	0	−4	3	−2	−3	1	Целеви ред C
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	Ред на векторите
12	0	P_1	24	1	0	+1	0	2	0	[2]	−1	
	0	P_2	1	0	1	−1/2	0	−1/2	0	−1	2	
	−2	P_6	5	0	0	1/2	0	1/2	1	0	0	Главен ред
	−4	P_4	+14	0	0	1/2	1	5/2	0	0	1	
		L (X) =	−66	−0	−0	−3	0	−14	0	3	−5	Индексен ред $\Delta_j = z_j - c_j$

Таблица 2. 2. 4

Целеви стълб C	Стълб на базиса Б	X	0	0	0	−4	3	−2	−3	1	Целеви ред C
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	Ред на векторите
−3	P_7	12	1/2	0	1/2	0	1	0	1	−1/2	Главен ред
0	P_2	13	1/2	1	−1	0	1/2	0	0	3/2	
−2	P_6	5	0	0	1/2	0	1/2	1	0	0	
−4	P_4	14	0	0	1/2	1	5/2	0	0	1	
	L (X) =	−102	−3/2	0	−9/2	0	−17	0	0	−7/2	Индексен ред $\Delta_j = z_j - c_j$

може да се вземат мерки за намаляване на съответните ресурси.

При задачи за намиране на максималната стойност на линейната функция $L(X)$ може да се постъпи по следните два начина:

1. Тъй като $\max L(X) = -\min[-L(X)]$, задачите за намиране на максимум се свеждат към задача за намиране на минимум, като коефициентите в линейната функция заменим с противоположните им по знак.

Например задачата за намиране на максималната стойност на линейната функция

$$L(X) = 2x_1 - 4x_2 + 3x_2 - x_5$$

върху някаква област е еквивалентна на задачата за намиране на минималната стойност на функцията

$$-L(X) = -2x_1 + 4x_2 - 3x_2 + x_5$$

върху същата област и $\max(2x_1 - 4x_2 + 3x_2 - x_5) = -\min(-2x_1 + 4x_2)$.

2. Ако използуваме равенството

$$L(X^*) = L(X) - \theta.\Delta_j,$$

за да се получи увеличаване на линейната функция, трябва $\Delta_j < 0$ за някои стойности на j и поне едно от числата x_{ji} да е положително.

Тогава при решаване на задачи за намиране на максималната стойност векторът, който подлежи на включване в базиса, отговаря на максималното по модул отрицателно число Δ_j.

Пример. Да се намери максималната стойност на линейната функция

$$L(X) = 5x_1 - x_2 - 4x_3$$

при следните условия:

$$x_2 + 2x_3 + x_4 = 9;$$
$$-x_1 + x_2 \leq 1;$$
$$x_1 + x_2 - 3x_3 \leq 8;$$
$$x_1 - x_3 \leq 4;$$
$$x_1 \geq 0;\ x_2 0 \geq;\ x_3 \geq 0;\ x_4 \geq 0.$$

Въвеждаме допълнителни неизвестни x_5, x_6 и x_7, които прибавяме към второто, третото и четвъртото неравенство. Единичните вектори P_4, P_5, P_6 и P_7 образуват първоначалния базис, а началният план има компоненти $x_1 = 0$; $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 9$, $x_5 = 1$, $x_6 = 8$, $x_7 = 4$.

Таблица 2.2.5

Първа итерация

θ	Целеви стълб C	Стълб на базиса Б	X	5	−1	−4	0	0	0	0	Целеви ред
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	
	0	P_4	9	0	1	2	1	0	0	0	
	0	P_5	1	−1	1	0	0	1	0	0	
8	0	P_6	8	1	1	−3	0	0	1	0	
4	0	P_7	4	|1+1|	0	−1	0	0	0	1	Ключов ред
		$L(X)=0$		−5	1	4	0	0	0	0	$\Delta_j = z_j - c_j$
				Ключов стълб							

Таблица 2.2.6

Втора итерация

9/2	0	P_4	9	0	1	$\boxed{2}$	1	0	0	0	Ключов ред
	0	P_5	5	0	1	−1	0	1	0	+1	
	0	P_6	4	0	1	−2	0	0	1	−1	
	+5	P_1	4	1	0	−1	0	0	0	1	Главен ред
		$L(X)=+20$		0	+1	−1	0	0	0	5	$\Delta_j = z_j - c_j$
						Ключов стълб					

Таблица 2.2.7

Трета итерация

	−4	P_3	9/2	0	1/2	1	1/2	0	0	0	Главен ред
	0	P_5	19/2	0	3/2	0	1/2	1	0	+1	
	0	P_6	13	0	2	0	1	0	1	−1	
	5	P_1	17/2	1	1/2	0	1/2	0	0	1	
		$L(X)=$	49/2	0	3/2	0	1/2	0	0	5	$\Delta_j = z_j - c_j$

Коефициентите x_{ij} съвпадат с коефициентите a_{ij}.

На таблици 2.2.5—2.2.7 е дадено решението на задачата. Оптималният план има компоненти

$$x_1={}^{17}/_2,\ x_2=0,\ x_3={}^{9}/_2,\ x_4=0,\ x_5={}^{19}/_2,\ x_6=13,\ x_7=0.$$

Стойността на линейната функция е 49/2.

5. МЕТОД НА ИЗКУСТВЕНИЯ БАЗИС

Чрез този метод се решават задачи, при които системата ограничаващи условия е система равенства ($AX=B$) и матрицата A не съдържа единичната матрица. Тогава на общата задача на линейното програмиране за намиране на минималната стойност на линейната функция

$$L(X)=c_1x_1+c_2x_2+\ .\ .\ .+c_nx_n$$

при условията

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ .\ .\ .+a_{1n}x_n=b_1;\\
&a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ .\ .\ .+a_{2n}x_n=b_2;\\
&\ \ \vdots\\
&a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ .\ .\ .+a_{mn}x_n=b_m;\\
&x_1\geq 0;\ x_2\geq 0;\ .\ .\ .;\ x_n\geq 0,
\end{aligned}$$

се съпоставя следната задача:

Да се намери минималната стойност на линейната функция

$$\widetilde{L}(X)=c_1x_1+c_2x_2+\ .\ .\ .+c_nx_n+M(x_{n+1}+x_{n+2}+\ .\ .\ .+x_{n+m})$$

при следните условия:

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ .\ .\ .+a_{1n}x_n+x_{n+1}=b_1;\\
&a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ .\ .\ .+a_{2n}x_n+x_n+x_{n+1}=b_2;\\
&\ \ \vdots\\
&a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ .\ .\ .+a_{mn}x_n+x_{n+m}=b_n;\\
&x_1\geq 0;x_2\geq 0;\ .\ .\ .,x_n\geq 0,x_{n+1}\geq 0,\ .\ .\ .,x_{n+m}\geq 0.
\end{aligned}$$

Неизвестните $x_{n+i}(i=1,2,\ .\ .\ .,m)$ се наричат изкуствени променливи. Коефициентът M е достатъчно голямо положително число. Векторите $P_{n+1},P_{n+2},\ .\ .\ .,P_{n+m}$ образуват началния базис, който се нарича изкуствен базис, а началният опорен план е $X=(0,0,\ .\ .\ .,b_1,b_2,\ .\ .\ .,bm)$.

За новата задача, която се нарича M-задача, са в сила следните твърдения:

1. Ако началната задача има поне един опорен план, той е план и на M-задачата, в който всички $x_{n+i}(i=1,2, \ldots,m)$ са равни на нула.

2. Ако в оптималния план $\widetilde{X}$ на M-задачата всички $x_{n+i}(i=1,2, \ldots,m)$ са равни на нула, т. е. $\widetilde{X}=(x_1,x_2, \ldots, x_m,0,0, \ldots,0)$, този план е оптимален и за изходната задача.

Като използуваме тези две твърдения, които са дадени без доказателство, можем към M-задачата да приложим симплексния метод и ако получим в оптималното решение, че всички изкуствени променливи са равни на нула, това е решение и на началната ни задача. В противния случай тя няма решение.

Да разгледаме следния пример:

Да се намери минималната стойност на линейната функция

$$L(X)=2x_1+x_2-x_3-x_4$$

при условията:

$$\begin{aligned} x_1-x_2+2x_3-x_4&=2;\\ 2x_1+x_2-3x_3+x_4&=6;\\ x_1+x_2+x_3+x_4&=7;\\ x_j\geq 0;\ j&=1,2,3,4. \end{aligned}$$

Въвеждаме изкуствените променливи x_5,x_6 и x_7 и на тази задача съпоставяме следната задача:

Да се намери минималната стойност на линейната функция

$$\widetilde{L}(X)=2x_1+x_2-x_3-x_4+M(x_5+x_6+x_7)$$

при условията:

$$\begin{aligned} x_1-x_2+2x_3-x_4+x_5 &=2;\\ 2x_1+x_2-3x_3+x_4+x_6 &=6;\\ x_1+x_2+x_3+x_4+x_7 &=7;\\ x_j\geq 0;\ j&=1,2, \ldots,7. \end{aligned}$$

Решаваме задачата по алгоритъма на симплексния метод, като за начален план вземеме плана $X=(0,0,0,0,2,6,7)$, а за начален базис — базиса, образуван от векторите P_5,P_6 и P_7 (таблици 2.2.8—2.2.11).

Таблица 2.2.8

Първа итерация

θ	Целеви стълб C	Стълб на базиса Б	X	2 / P_1	1 / P_2	−1 / P_3	−1 / P_4	M / P_5	M / P_6	M / P_7	Целеви ред / Ред на векторните
2	M	P_5	2	[1]	−1	2	−1	1	0	0	Ключов ред
3	M	P_6	6	2	1	−3	1	0	1	0	
7	M	P_7	7	1	1	1	1	0	0	1	
		L (X) = 15M		4M − 2	M − 1	1	M+1	0	0	0	Индексен ред $\Delta_j=z_j-c_j$
				Ключов стълб							

Таблица 2.2.9

Втора итерация

	2	P_1	2	1	−1	2	−1	1	0	0	
2/3	M	P_6	2	0	3	−7	[3]	−2	1	0	Ключов ред
5/2	M	P_7	5	0	2	−1	2	−1	0	1	
		L(X) = 7M+4		0	5M−3	−8M+5	5M−1	−4M+2	0	0	Индексен ред
						Ключов стълб					

Таблица 2.2.10

Трета итерация

2	P_2	8/3	1	0	−1/3	0	1/3	−1/3	0
−1	P_4	2/3	0	1	−7/3	1	− 2/3	1/3	0
1	P_7	1 1/3	0	0	1/3	0	1/3	−2/3	1
$L(X)=$		$\frac{11}{3}M+\frac{14}{3}$	0	−2	$\frac{11}{3}M+\frac{8}{3}$	0	$\frac{2}{3}M+\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}M+\frac{1}{3}$	0
					Ключов стълб			Ключов ред Δ_j	Индексен ред

Таблица 2.2.11

Четвърта итерация

2	P_1	3	1	0	0	0	12/33	3/11	1/11
−1	P_4	3	0	1	0	1	−15/33	−1/11	7/11
−1	P_3	1	0	0	1	0	1/11	−2/11	3/11
$L(X)=2$			0	−2	0	0	$-M+\frac{12}{11}$	$-M+\frac{9}{11}$	$-M-\frac{8}{11}$
									Индексен ред

Оптималният план на M-задачата има компоненти

$$x_1=3,\ x_2=0,\ x_3=1,\ x_4=3,\ x_5=0,\ x_6=0,\ x_7=0.$$

Тъй като изкуствените променливи са равни на нула, оптималният план на изходната задача е

$$x_1=3;\ x_2=0,\ x_3=1,\ x_4=3;$$

$$L(X)=2.3+1.0-1-3=2.$$

6. МОДИФИЦИРАН СИМПЛЕКСЕН МЕТОД

Когато разглеждахме симплексния метод, установихме, че основен момент при прехода от един опорен план към друг е разлагането на всеки от векторите, които не влизат в базиса, по векторите на базиса. Ако има такова разлагане, по алгоритъма на симплексния метод извършваме следното:

1. Пресмятаме величините $z_j-c_j=\Delta_j$ и определяме вектора, който ще влезе в базиса, или установяваме оптималността на опорния план.

2. Определяме вектора, който подлежи на изключване от базиса.

3. Получаваме новия базис, новия опорен план и разложението на векторите, които не влизат в базиса, по векторите на базиса.

При алгоритъма на симплексния метод най-трудоемко е пресмятането на компонентите x_{ij} в разложението на векторите P_j по векторите на базиса. При тези пресмятания се преобразува цялата симплексна таблица.

6.1. Основи на модифицирания симплексен метод

Връзката между параметрите на задачите на линейното програмиране позволява да се получи друга числена схема, основана върху друг начин на записване на критерия за оптималност на опорния план, по който в редица случаи значително се намалява обемът на пресмятанията.

Да разгледаме общата задача на линейното програмиране, състояща се в минимизиране на линейната функция

$$L(X)=CX$$

при следните условия:

$$AX=B;$$
$$X\geq 0.$$

Нека векторите P_1, P_2,..., P_m са линейно независми и образуват базиса $Б$. Тогава

$$x_1P_1+x_2P_2+\ldots+x_mP_m=P_0; \quad (2.2.31)$$

$$x_{1j}P_1+x_{2j}P_2+\ldots x_{mj}P_m=P_j. \quad (2.2.32)$$

Тези две равенства може да се запишат още по следния начин:

$$БX=P_0; \quad (2.2.33)$$

$$БX_j=P_j. \quad (2.2.34)$$

Ако умножим двете равенства по $Б^{-1}$ отляво, ще получим

$$X=Б^{-1}P_0; \quad (2.2.35)$$

$$X_j=Б^{-1}P_j. \quad (2.2.36)$$

Следователно компонентите на опорния план X и компонентите x_{ij} на вектора X_j, които са коефициенти в разложението на вектора P_j по вектора на базиса $Б$, можем да намерим по формули (2.2.35) и (2.2.36), в които участвуват само матрицата $Б^{-1}$ и векторите P_0 и P.

От алгоритъма на симплексния метод знаем, че величините Δ_j се пресмят по формулата

$$\Delta_j=\sum_{i=1}^{m}x_{ij}c_i-c_j=C_0X_j-c_j, \quad (2.2.37)$$

където $C_0=(c_1, c_2, \ldots, c_m)$ е вектор-ред. Ако заместим в (2.2.37) X_j с $Б^{-1}P_j$, ще получим

$$\Delta_j=C_0Б^{-1}P_j-c_j=\mu P_j-c_j, \quad (2.2.38)$$

където с вектора μ сме означили $C_0Б^{-1}$.

Следователно величините Δ_j също може да се пресметнат, ако е дадена матрицата $Б^{-1}$. От формули (2.2.35), (2.2.36) и (2.2.38) следва, че данните за преминаване от един опорен план към друг може да се пресметнат, ако са известни за всеки базис $Б$ обратната матрица $Б^{-1}$ и условията на задачата, т. е. матрицата A и векторите P_0 и C. Тези съображения са послужили за основа на така наречения модифициран симплексен метод.

Основната разлика между обикновения симплексен метод и модифицирания е в това, че по първия при преминаване от един опорен план към друг преобразуваме всички елементи на симплексната таблица, докато по втория е необходимо да

се преобразуват само елементите на обратната матрица. Това обстоятелство намалява значително обема на пресмятанията и прави алгоритъма особено удобен при решаване на задачи чрез ЕСМ главно поради следните две причини:

1. Обемът на запомнената от машината текуща информация е значително по-малък, тъй като при модифицирания симплексен метод е необходимо да се помнят само обратната матрица и векторът, отговарящ на опорния план, докато при обикновения симплексен метод трябва да се помни цялата симплексна таблица.

2. За задачи, чиито матрици съдържат голям брой нулеви елементи, обемът на пресмятанията се съкращава значително и ненулевите елементи може компактно да се запишат в паметта на машината, което позволява да се решават задачи с големи размери на матриците.

Тъй като

$$Z_j=\mu P_j=\sum_{i=1}^{m}\mu_ia_{ij},$$

където μ_i са компонентите на вектора μ, а a_{ij} — на вектора P_j, критерият за оптималност при модифицирания симплексен метод може да се формулира по следния начин.

Опорният план е оптимален (обръща линейната функция в минимум), ако

$$\Delta_j=\mu P_j-c_j=\sum_{i=1}^{m}\mu_ia_{ij}-c_j\leq 0 \text{ за } j=1,2,\ldots,n. \quad (2.2.39)$$

От (2.2.38) следва, че компонентите μ_k, $k=1,2,\ldots,m$ на вектора μ може да се пресметнат по формулата

$$\mu_k=\sum_{k=1}^{m}c_ib_{ik}, \quad \kappa=1,2,\ldots,m, \quad (2.2.40)$$

където с $b_{ik}, i,k=1,2,\ldots,m$ сме означили елементите на матрицата $Б^{-1}$, а елементите на матрицата $Б$ — с $a_{ik}, i=1,2,\ldots,m$, $\kappa=1,2,\ldots,m$, тъй като $Б=(P_1,P_2,\ldots,P_m)$, т. е.

$$Б=(P_1,P_2,\ldots,P_e,\ldots,P_m)=\begin{pmatrix} a_{11}a_{12} & \ldots & a_1l & \ldots & a_{1m} \\ a_{21}a_{22} & \ldots & a_2l & \ldots & a_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1}a_{m2} & \ldots & a_ml & \ldots & a_{mm} \end{pmatrix}.$$

От установените съотношения (2.2.39) и (2.2.40) следва, че за да решим задачата по модифицирания симплексен метод, трябва да пресметнем:

1. $Б^{-1}$, т. е. да намерим b_{ik}, $i=1,2,\ldots,m$, $k=1,2,\ldots,m$.
2. Компонентите $\mu_к$.

$$\mu_к=\sum_{i=1}^{m} c_i b_{ik};\ к=1,2,\ldots,m.$$

3. $$Z_j=\sum_{i=1}^{m} \mu_i a_{ij};\ j=1,2,\ldots,n.$$

4. $\Delta_j=Z_j-C_j$ и по критерия за оптималност да установим дали избраният опорен план е оптимален.

Ако разгледаният опорен план не е оптимален, то, както при алгоритъма на симплексния метод, определяме кой вектор да излезе от базиса и кой да влезе в новия базис. След това трябва да преминем към следващата таблица, като преобразуваме само елементите на матрицата $Б^{-1}$.

Да разгледаме новия базис $\bar{Б}=(P_1,P_2,\ldots,P_{l-1},P_l,P_{l+1},\ldots,P_m)$, който се получава от базиса $Б$ чрез замяна на вектора P_l с P_r, т. е.

$$\bar{Б}=\begin{pmatrix} a_{11}a_{12}\ .\ .\ .a_{1r}\ .\ .\ .a_{1m} \\ a_{21}a_{22}\ .\ .\ .a_{2r}\ .\ .\ .a_{2m} \\ .\ .\ .\ .\ .\ . \\ .\ .\ .\ .\ .\ . \\ .\ .\ .\ .\ .\ . \\ a_{m1}a_{m2}\ .\ .\ .a_{mr}\ .\ .\ .a_{mm} \end{pmatrix}.$$

Тогава

$$Б^{-1}.\bar{Б}=Б^{-1}(P_1,P_2,\ldots,P_l,\ldots,P_m)=\begin{pmatrix} 1\ 00\ .\ .\ .\ 0\ .\ .\ 0 \\ 0\ 10\ .\ .\ .\ 0\ .\ .\ 0 \\ .\ .\ .\ .\ .\ . \\ .\ .\ .\ .\ .\ . \\ 0\ 00\ .\ .\ .\ 1\ .\ .\ 0 \\ .\ .\ .\ .\ .\ . \\ .\ .\ .\ .\ .\ . \\ 0\ 00\ .\ .\ .\ 0\ .\ .\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.2.41),$$

а от (2.2.41) следва, че

$$Б^{-1}.\bar{Б}=\bar{Б}^{-1}(P_1,P_2,\ldots,P_r,\ldots,P_m)=\begin{pmatrix} 10\ .\ .\ .x_{1r}\ .\ .\ .\ 0 \\ 01\ .\ .\ .x_{2r}\ .\ .\ .\ 0 \\ .\ .\ .\ .\ .\ . \\ .\ .\ .\ .\ .\ . \\ .\ .\ .\ .\ .\ . \\ 00\ .\ .\ .x_{lr}\ .\ .\ .\ 0 \\ .\ .\ .\ .\ .\ . \\ .\ .\ .\ .\ .\ . \\ .\ .\ .\ .\ .\ . \\ 00\ .\ .\ .x_{mr}\ .\ .\ .\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.2.42)$$

където $(x_{1k},x_{2k},\ .\ .\ .,x_{lr},\ .\ .\ .,x_{mk})$ са компонентите на вектора P_r в разложението му по векторите на базиса $Б$.

Ако с b^*_{ik} означим елементите от матрицата $\bar{Б}^{-1}$, те може да се получат по следните рекурентни формули:

$$\begin{cases} b^*_{ik}=b_{ik}-\dfrac{b_{lk}}{x_{lr}}x_{ik};\ i=1,2,\ldots,m,\ i\neq r; \\ \qquad\qquad k=1,2,\ldots,m; \\ b^*_{rk}=\dfrac{b_{lk}}{x_{lr}};\ i=r;\ k=1,2,\ldots,m. \end{cases} \quad (2.2.43)$$

Верността на тези формули може да се установи чрез непосредствено умножение на $\bar{Б}^{-1}$ по $Б$, в резултат на което трябва да се получи единичната матрица. Например скаларното произведение на първия ред на $\bar{Б}^{-1}$ по първия стълб на $Б$ е

$$\left(b_{11}-\frac{b_{l1}}{x_{lr}}x_{1r}\right)a_{11}+\left(b_{12}-\frac{b_{l2}}{x_{lr}}x_{1r}\right)a_{21}+\ .\ .\ .+\left(b_{1m}-\frac{b_{lm}}{x_{lr}}.x_{1r}\right)$$

$$a_{m1}=(b_{11}a_{11}+b_{12}a_{21}+\ .\ .\ .+b_{1m}a_{m1})-(b_{l1}a_{11}+b_{l2}a_{21}+\ .\ .\ .$$

$$+b_{lm}a_{m1})\frac{x_{1r}}{x_{lr}}=1,$$

защото в първите скоби е произведението на първия ред на $\bar{Б}^{-1}$ по първия стълб на $Б$, което, съгласно (2.2.41), е равно на 1, а във вторите скоби се намира произведението на l-тия ред на $\bar{Б}^{-1}$ по първия стълб на $Б$, което, съгласно (2.2.41), е равно на 0. По аналогичен начин може да се установи, че $\bar{Б}^{-1}.Б=E$, от което следва, че формулите (2.2.43) са верни.

Аналогични рекурентни формули може да се получат и за компонентите $\mu^*_к$.

$$\mu_к^* = \sum_{i=1}^{m} c_i b_{iк}^* + c_r b_{rк}^* =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} c_i \left(b_{ik} - \frac{b_{lk}}{x_{lr}} x_{ir} \right) + c_r \frac{b_{lk}}{x_{lr}} =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} c_i b_{ik} - \frac{b_{lk}}{x_{lr}} \sum_{i=1}^{m} c_i x_{ir} + c_r \frac{b_{lk}}{x_{lr}} =$$

$$= \mu_k - \frac{b_{lk}}{x_{lr}} \left(\sum_{i=1}^{m} c_i x_{ir} - c_r \right) = \mu_k - \frac{b_{lk}}{x_{lk}} \left(Z_r - c_r \right),$$

т. е. $$\mu_к^* = \mu_k - \frac{b_{lk}}{x_{lk}} \Delta_r, \quad k = 1,2, \ . \ . \ ., m. \qquad (2.2.44)$$

От последната рекурентна формула може да се пресметнат

и величините $\Delta_j^* = Z_j^* - C_j^* = \sum_{i=1}^{m} \mu_i^* a_{ij} - c_j$.

Получените резултати (2.2.39), (2.2.40), (2.2.43) и (2.2.44) дават възможност да се състави нова числена схема за преминаване от един опорен план към друг.

6.2. Числена схема на алгоритъма на модифицирания симплексен метод

Числената схема на алгоритъма на модифицирания симплексен метод се основава на теоретичните разглеждания и получените резултати. От тях се вижда, че при преминаване от един опорен план към друг не е необходимо да се преобразуват компонентите на всички вектори P_j, а само на влизащите в последователните базиси, които се състоят от m вектора. Оттук следва и преимуществото на този алгоритъм при m по-малко в сравнение с n.

За удобство на пресмятанията се използуват две таблици: една основна и една спомагателна.

Спомагателната прилича много на началната симплексна таблица. В най-горния ред се написват коефициентите на целевата функция, след това се нанасят векторите P_1, P_2, $\ldots P_n$, а под тях компонентите им a_{ij}. Най-отдолу се оставят няколко реда (в зависимост от задачата) за стойностите на $\Delta_j = z_j - c_j$, $\Delta_j' = z_j' - c_j'$ и т. н. Отстрани отдясно в няколко колони се нанасят компонентите на векторите μ спрямо последователните базиси.

Като се знаят компонентите на μ, може да се пресметнат z_j, z_j', z_j'' . . .и т. н., а оттам $z_j - c_j, z_j' - c_j$ и т. н.

Основната таблица със своите подтаблици служи за нанасяне на компонентите на матриците $Б^{-1}$, $Б'^{-1}$ и т. н., компонентите на векторите, влизащи в базиса, по векторите на базиса, компонентите на вектора C_o и вектора μ.

При алгоритъма на модифицирания симплексен метод е удобно началният базис $Б$ да се състои от единични вектори. Тогава $Б = E$ и $Б^{-1} = E$, което ни улеснява много при съставяне на първата подтаблица на основната таблица.

Началният базис и началният опорен план се намират по същия начин, както при обикновения симплексен метод.

Да разгледаме алгоритъма на следния пример:

Да се намери максималната стойност на линейната функция

$$L(X) = 5x_1 - x_2 - 4x_3$$

при следните условия:

$$\begin{aligned} x_2 + 2x_3 + x_4 \ . \ . \ . \ . \ . &= 9; \\ -x_1 + x_2 + \ . \ . \ . + x_5 \ . \ . \ . \ . &= 1; \\ x_1 + x_2 - x_3 + \ . \ . + x_6 \ . \ . \ . &= 8; \\ x_1 \ . \ . \ . - x_3 + \ . \ . \ . \ . \ . + x_7 &= 4. \end{aligned}$$

$$x_j \geq 0; \quad j = 1,2,\ldots,7.$$

Началният базис за тази задача се състои от векторите P_4, P_5, P_6 и P_7.

$$Б = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ следователно } Б^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Пресмятаме компонентите на вектора μ:

$$\mu_k = \sum_{i=1}^{m} c_i b_{ik} \text{ за } k = 1,2,\ldots,m.$$

Спомагателната таблица има вида, показан на таблица 2.2.12.

Таблица 2.2.12

N	5	−1	−4	0	0	0	0	μ	μ′	μ″
	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7			
1	0	1	2	1	0	0	0	0	0	1/2
2	−1	1	0	0	1	0	0	0	0	0
3	1	−1	−3	0	0	1	0	0	0	0
4	1	0	−1	0	0	0	1	0	5	5
$z_j - c_j$	−5	1	4	0	0	0	0			
$z'_j - c_j$	0	1	−1	0	0	0	5			
$z''_j - c_j$	0	3/2	0	1/2	0	0	5			

Първата таблица от основната таблица има вида, показан на таблица 2.2.13.

Таблица 2.2.13

C_0	Б	X	Обратен базис				Вектор, влизащ в базиса	θ
0	P_4	9	1	0	0	0	0	
0	P_5	1	0	1	0	0	−1	
0	P_6	8	0	0	1	0	1	8
0	P_7	4	0	0	0	1	[1]	4-ключов ред
μ			0	0	0	0	$-5=\Delta_1$ Ключовред	

От тази формула и от таблица 2.2.13 следва, че те се получават чрез скаларно умножение на елементите на вектора-стълб C_0 по елементите на съответните стълбове на обратния базис $Б^{-1}$.

Нанасяме така получените стойности μ_k в стълба μ на спомагателната таблица.

2. Пресмятаме компонентите $Z_j, j=1,2,\ldots,n$ по формулата

$$Z_j=\sum_{i=1}^{m}\mu_i a_{ij},\ j=1,2,\ldots,n,$$

т. е. компонентите Z_j се получават чрез скаларно умножение на вектора-стълб μ с векторите-стълбове P_1. В нашия случай всички $Z_j=0$ за $j=1,2,\ldots,7$, тъй като $\mu_i=0$ за $i=1,2,3,4$.

3. Пресмятаме $\Delta_j=Z_j-C_j$, $j=1,2,\ldots,n$ и ги нанасяме в реда $Z_j-C_j=\Delta_j$. В случая $\Delta_1=-5$,

$$\Delta_2=1,\ \Delta_3=4,\ \Delta_5=\Delta_6=\Delta_7=0.$$

4. Ако всички $\Delta_j\geq 0$, планът е оптимален. В противен случай избираме най-голямото по абсолютна стойност число Δ_j. В случая това е $\Delta_1=-5$. То определя вектора P_1, който ще влезе в новия базис.

5. Нанасяме в стълба „вектор, влизащ в базиса“ на основната таблица компонентите на вектора P_1 в разложе-

нието му по векторите на базиса $Б$. Тъй като началният базис се състои от единични вектори, компонентите на вектора P_1 остават същите. В реда μ и стълба на вектора P_1 нанасяме $\Delta_1=-5$.

6. Разделяме стълба на вектора X на положителните компоненти на вектора, влизащ в базиса (ключовия стълб), и получаваме величините

$$\theta_0=\min_i \frac{x_i}{a_{i1}} \text{ за } a_{i1}>0.$$

В случая $\theta_0=4$. С това е определен и векторът P, подлежащ на изключване от базиса (ключовия ред).

7. Елементите на новата подтаблица (таблица 2.2.14) на основната таблица се получават от формулите:

$$b^*_{iк}=b_{ik}-\frac{b_{lk}}{x_{lr}}x_{ir} \text{ за } i=1,2,\ldots,m;\ i\neq e \text{ и } k=1,2,\ldots,m;$$

$$b^*_{lк}=\frac{b_{lk}}{x_{lr}} \text{ за } i=e \text{ и } k=1,2,\ldots,m;$$

$$\mu^*_к=\mu_к-\frac{b_{lk}}{x_{lr}}\Delta_r \text{ за } k=1,2,\ldots,m,$$

откъдето следва, че преобразуванията са както при обикновените симплексни таблици. Числото, което стои в стълба на влизащия и в реда на излизащия от базиса вектор, и тук се нарича разрешаващ елемент (ключово число).

Разделяме реда на влизащия в базиса вектор на това число и намираме главния ред в новата подтаблица. Останалите редове се получават, като от елементите на съответния ред на старата подтаблица извадим елементите на главния ред, умножени по числото, което стои в съответния ред и стълба на вектора, влизащ в базиса. По този начин се получава редът за вектора μ.

8. Нанасяме получените стойности за μ в стълба μ^1 и пресмятанията продължават по точка 2 от алгоритъма, докато всички Δ_j станат положителни или се установи неограничеността на линейната функция върху областта, определена от ограничаващите условия.

В нашия случай се получава $\Delta_3=-1$, т.е. в новия базис ще влезе векторът P_3.

Трябва да намерим компонентите на вектора P_3 спрямо базиса $Б_2=(P_4,P_5,P_6,P_1)$. Те са коефициентите в разложението на вектора P_3 по векторите P_4,P_5,P_6 и P_1.

$$P_3=x_{43}P_4+x_{53}P_5+x_{63}P_6+x_{13}P_1 \text{ или}$$

Таблица 2.2.14

C_e	Б	X	Обратен базис $Б^{-1}$				Вектор, влизащ в базиса	θ
0	P_4	9	9	1	0	0	[2]	9/2
0	P_5	5	0	1	0	1	−1	
0	P_6	4	0	0	1	−1	−2	
5	P_1	4	0	0	0	1	−1	
μ		L(X)=20	0	0	0	5	−1	

$P_3=Б_2X_3$, откъдето следва (след умножаване на това равенство по $Б_2^{-1}$), че

$$X_3=Б_2^{-1}P_3.$$

Но ние имаме тъкмо във втората подтаблица елементите на матрицата $Б_2^{-1}$. Следователно, за да получим x_{43},x_{53},x_{63} и x_{13}, трябва да умножим матрицата $Б_2^{-1}$ по компонентите на P_3 от спомагателната таблица, т.е.

$$X_3=\begin{pmatrix} x_3 \\ x_{53} \\ x_{63} \\ x_{13} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&1&0&1 \\ 0&0&1&-1 \\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Нанасяме тези компоненти във втората подтаблица в стълба на вектора, влизащ в базиса, и продължаваме пресмятанията по точка 6 от алгоритъма.

Векторът P_4 излиза от базиса. Ключовото число е 2. По точка 7 получаваме елементите на новата подтаблица (таблица 2.2.15).

Нанасяме така получените стойности за μ в стълба μ'' и пресмятаме величините z''_j-c_j. Всички те са положителни. Следователно задачата има оптимално решение и то е:

$$x_1=17/2,\ x_2=0,\ x_3=9/2,\ x_4=0,\ x_5=19/2,\ x_6=13 \text{ и } x_7=0;$$

$$\max L(X)=5x_1-x_2-4x_3=5\frac{17}{2}-0\,.\,4\frac{9}{2}=\frac{85-36}{2}=\frac{49}{2}.$$

Таблица 2.2.15

C_0	Б	X	Обратен базис				Вектор, влизащ в базиса	θ
—4	P_3	9/2	1/2	0	0	0		
0	P_5	19/2	1/2	1	0	1		
0	P_6	13	2	0	1	—1		
5	P_1	17/2	1/2	0	0	1		
μ		49/2	1/2	0	0	5		

Максималната стойност се получава в реда μ на стълба на вектора X от основната таблица.

Този пример беше разгледан и при обикновения симплексен метод. И там, както и тук, решението се получава след три итерации, само че таблиците тук са много по-прости.

Ако задачата е с въвеждане на изкуствен базис, извършват се пак същите пресмятания, като началните компоненти на вектора C_0 са равни на M за изкуствено въведените вектори.

Да разгледаме следния пример:

Да се намери минималната стойност на линейната функция

$$L(X)=2x_1+x_2-x_3-x_4$$

при условията:

$$\begin{aligned} &x_1-x_2+2x_3-x_4=2;\\ &2x_1+x_2-3x_3+x_4=6;\\ &x_1+x_2+x_3+x_4=7;\\ &x_j\geq 0;\ j=1,\ 2,\ 3,\ 4. \end{aligned}$$

На тази задача се съпоставя следната:

Да се намери минималната стойност на линейната функция

$$L(X)=2x_1+x_2-x_3-x_4+M(x_5+x_6+x_7)$$

при условията:

$$\begin{aligned} &x_1-x_2+2x_3-x_4+x_5 \ldots =2;\\ &2x_1+x_2-3x_3+x_4 \ldots +x_6 \ldots =6;\\ &x_1+x_2+x_3+x_4 \ldots \ldots +x_7=7;\\ &x_j\geq 0;\ j=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7. \end{aligned}$$

Таблица 2.2.16

N	2	1	—1	—1	M	M	M	μ'	μ''	μ'''
	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7			
1	1	—1	2	—1	1	0	0	M	—3M+2	1/3M+4/3	12/11
2	2	1	—3	1	0	1	0	M	M	—2/3M+1/3	9/11
3	1	1	1	1	0	0	1	M	M	M	—8/11
z_j-c_j	4M—2	M-1	1	M+1	0	0	0				
$z_j'-c_j$	0	5M-3	8M+5	5M-1	4 M+ 2	0	0				
$z_j''-c_j$	0	—2	$\frac{11}{3}M+\frac{8}{3}$	0	$\frac{3}{2}M+\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}M+\frac{1}{3}$	0				
z'''_j-c_j	0	—2	0	0	$-M+\frac{11}{12}$	$-M+\frac{9}{12}$	$-M-\frac{8}{11}$				

Спомагателната таблица има вида, показан на таблица 2.2.16. Този пример е разгледан при метода на изкуствения базис, но го привеждаме и тук, за да се види разликата между двата алгоритъма (таблица 2.2.17—2.2.20).

Таблица 2.2.17

Начална таблица

C_0	Б	X	Обратен базис			Вектор, влизащ в базиса		0
M	P_5	2	1	0	0	[1]		2
M	P_6	6	0	1	0	2		3
M	P_7	7	0	0	1	1		7
μ		L(X)=15M	M	M	M	4M—2		

Таблица 2.2.18

Първа итерация

2	P_1	2	1	0	0	—1	
M	P_6	2	—2	1	0	[3]	2/3
M	P_7	7	—1	0	1	2	5/2
μ		7/4+4	—3M+2	M	M	5M—1	

Таблица 2. 2. 19

Втора итерация

2	P_1	8/3	1/3	1/3	0	—1/3	
—2	P_4	2/3	—2/3	1/3	0	—7/3	
M	P_7	11/3	1/3	—2/3	1	[11/3]	1
μ		$\frac{11}{3}M+\frac{14}{3}$	$\frac{1}{3}M+\frac{4}{3}$	$\frac{-2}{3}M+\frac{1}{3}$	M	$\frac{11}{3}M+\frac{8}{3}$	

Таблица 2. 2. 20

Трета итерация

2	P_1	3	12/33	3/11	1/11		
1	P_4	3	—15/33	—1/11	7/11		
1	P_3	1	1/11	—2/11	3/11		
μ		2	12/11	9/11	—8/11		

Всички разлики $z_j'''-c_j$ са отрицателни или равни на нула, следователно намереният план е оптимален. Компонентите на оптималния план са $x_1=3$, $x_3=1$, $x_4=3$, а всички останали са равни на нула. Тъй като в оптималния план не участвуват изкуствено въведените променливи x_5, x_6 и x_7, той е и оптималният план на изходната задача. Минималната стойност на линейната функция е

$$\min L(X)=2.x_1-x_3-x_4=2.3-1-3=6-4=2.$$

Ако сравним обикновената симплексна таблица на тази задача с разгледаните по-горе, ще установим, че таблиците при модифицирания симплексен метод са по-прости и са свързани с по-малко пресмятания.

От направените разглеждания се вижда, че модифицираният симплексен метод е свързан с по-малко пресмятания, отколко-

то обикновеният симплексен метод, т. е. таблиците имат размери $m \times m$, а не $m \times (n+m)$, и за задачи, при които броят на уравненията е значително по-малък от броя на неизвестните, е много удобен. Особено подходящ е при решаване на задачите чрез ЕСМ поради по-малкия обем на паметта, заеман от текущата информация, и по-малкия брой пресмятания, което намалява значително времето за решаване на тези задачи от ЕСМ.

7. ДВОЙНСТВЕНА ПРОБЛЕМНА В ЛИНЕЙНОТО ПРОГРАМИРАНЕ

С всяка задача на линейното програмиране може да се свърже друга линейна задача, наричана двойнствена (дуална) или спрегната по отношение на първата. Първоначално дадената задача се нарича изходна. Оптималният план на една от спрегнатите задачи (изходната или двойнствената) е тясно свързан с оптималния план на другата. Ако началната симплексна таблица на изходната задача съдържа единичната матрица от m-ти ред, при решаване на една от задачите по симплексния алгоритъм автоматично получаваме решението и на другата. От това следва, че при търсене на оптималния план на дадена задача можем да решим по симплексния метод или самата задача, или нейната дуална. Изборът на една от двете се определя от това, коя от тях ще ни доведе по-бързо до оптималното решение. Тъй като много често дуалната задача се решава по-бързо (с по-малък брой итерации и по-малко пресмятания) от изходната, за намиране на оптималния план на дадена задача се използува решението на нейната дуална. За тази цел ще разгледаме проблема за дуалността в линейното програмиране.

7.1. Несиметрични дуални задачи

Изходна здача. Да се намери векторът-стълб

$$X=(x_1,\ x_2,\ \ldots,x_n),$$

минимизиращ линейната функция

$$f=c_1x_1+c_2x_2+\ \ldots\ +c_nx_n, \tag{2.2.45}$$

при следните условия:

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ \ldots\ +a_{1n}x_n=b_1;\\
&a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ \ldots\ +a_{2n}x_n=b_2;\\
&\quad\ldots\qquad\qquad\ldots\\
&\quad\ldots\qquad\qquad\ldots\\
&\quad\ldots\qquad\qquad\ldots
\end{aligned} \tag{2.2.46}$$

$$\begin{aligned}
&a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ \ldots\ +a_{mn}x_n=b_m;\\
&x_j\geq 0;\ j=1,\ 2,\ \ldots\ n.
\end{aligned} \tag{2.2.47}$$

Дуална задача. Да се намери векторът-ред

$$Y(y_1,\ y_2,\ \ldots,y_m),$$

максимизиращ линейната функция

$$g=y_1b_1+y_2b_2+\ \ldots\ +y_mb_m, \tag{2.2.48}$$

при следните условия:

$$\begin{aligned}
&a_{11}y_1+a_{12}y_2+\ \ldots\ +a_{m_1}y_m\leq c_1;\\
&a_{12}y_1+a_{22}y_2+\ \ldots\ a_{m_2}y_m\leq c_2;\\
&\quad\ldots\qquad\qquad\ldots\\
&\quad\ldots\qquad\qquad\ldots\\
&\quad\ldots\qquad\qquad\ldots\\
&a_{1n}y_1+a_{2n}y_2+\ \ldots\ +a_{mn}y_m\leq c_n.
\end{aligned} \tag{2.2.49}$$

Изходната и дуалната задача може да се запишат още и така.

Изходна задача. Да се намери векторът-стълб

$$X=(x_1,\ x_2,\ \ldots,x_n),$$

минимизиращ линейната функция

$$f=CX, \tag{2.2.50}$$

при следните условия:

$$AX=B; \tag{2.2.51}$$

$$X\geq 0. \tag{2.2.52}$$

Дуална задача. Да се намери векторът-ред

$$Y(y_1,\ y_2,\ \ldots,y_m),$$

максимизиращ линейната функция

$$g=JB, \tag{2.2.53}$$

при следните условия:

$$YA\leq C. \tag{2.2.54}$$

И за двете задачи векторът C е вектор-ред, векторът B — вектор-стълб и $A=(a_{ij})$ е матрицата от коефициентите.

В двойнствената задача променливите y_i може да са и отрицателни.

С тези две задачи е свързана следната теорема.

Теорема за двойственост. Ако една от двете дуални задачи има решение, другата също има решение, при това екстремалните стойности на линейните функции са равни, т. е.

$$\min f = \max g.$$

Ако линейната функция на едната дуална задача е неограничена в разглежданата област, определена от ограничаващите условия (за изходната задача отдолу, а за дуалната — отгоре), другата дуална задача няма нито един план.

Доказателство. Да предположим, че изходната задача притежава оптимален план, който може да се получи по симплексния метод. Без да се нарушава общността на разглежданията, може да се счита, че крайният базис се състои от първите m вектора.

Нека $Б$ е матрицата, съставена от компонентите на векторите $P_1, P_2, \ldots, P_m$. В последната симплексна таблица се съдържат всички вектори $P_1, P_2, \ldots, P_m, P_{m+1}, \ldots, P_n$, разложени точно по векторите на окончателния базис. Следователно в стълбовете на векторите P_j, $j=1+n$ се намират компонентите x_{ij}, които са коефициентите в разложението на векторите P_j по векторите на базиса $Б$. Ако с X_j означим вектора $(x_{1j}, x_{2j}, \ldots, x_{mj})$, то

$$P_j = БX_j. \tag{2.2.55}$$

Да означим с $\overline{A}$ матрицата на последната симплексна таблица. Тъй като окончателният базис се състои от първите вектори, тя ще има вида

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1\ 0\ \ldots\ 0 & x_{1m+1} & \ldots & x_{1n} \\ 0\ 1\ \ldots\ 0 & x_{2m+1} & \ldots & x_{2n} \\ 0\ 0\ \ldots\ 1 & x_{mm+1} & \ldots & x_{mn} \end{pmatrix}.$$

Оптималният план X^0 се определя от равенството

$$X^0 = Б^{-1}P_0 = Б^{-1}B. \tag{2.2.56}$$

От (2.2.55) следва, че

$$X_j = Б^{-1}P_j, \tag{2.2.57}$$

или, записано в матрична форма, $\overline{A} = Б^{-1}.A.$ (2.2.58)

Тогава

$$\min f = C^0X^0, \tag{2.2.59}$$

където $C^0 = (c_1, c_2, \ldots, c_m)$.

Разликите $\Delta_j = z_j - c_j$ се определят по следната формула:

$$\Delta_j = z_j - c_j = \sum_{i=1}^{m} c_i x_{ij} - c_j = C^0X_j - c_j,$$

или, записано във векторна форма,

$$\Delta = C^0\overline{A} - C, \tag{2.2.60}$$

където

$$\Delta = (\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n) \text{ и } C^0\overline{A} - C \leqslant 0,$$

тъй като X^0 е оптималният план.

Да образуваме вектора

$$Y^0 = C^0Б^{-1},$$

Ще установим, че той е решение на дуалната задача. Наистина от (2.2.54), (2.2.58) и (2.2.60) следва, че

$$Y^0A - C = C^0Б^{-1}A - C = C^0\overline{A} - C \leq 0,$$

т. е.

$$Y^0A \leq C.$$

Следователно векторът $Y^0 = C^0Б^{-1}$ е план на двойнствената задача. Да докажем, че той максимизира целевата функция на дуалната задача.

Да заместим $Y^0 = C^0Б^{-1}$ в (2.2.53). Получаваме

$$g = J^0B = C^0Б^{-1}B = C^0X^0 = \min f.$$

Установихме, че стойността на линейната функция на двойнствената задача, съответстваща на плана J^0, съвпада с минималната стойност на линейната функция на изходната задача.

Да установим, че това е максималната стойност на функцията g.

За всеки план X, удовлетворяващ (2.2.51) и (2.2.52), и всеки план Y, удовлетворяващ (2.2.53), имаме:

$$YAX = JB = g(J);$$

$$YAX \leq CX = f(X).$$

От тези две съотношения получаваме равенството

$$g(Y) \leq f(X),$$

изпълнено за всяка X и J, които са планове на двойката спрегнати задачи. Оттук следва и неравенството

$$\max g(J) \leqslant \min f(X). \qquad (2.2.61)$$

За плана J^0 беше изпълнено

$$g(J^0) = \min f(X).$$

Но тъй като максимумът на $g(J)$ не надминава минимума на $f(X)$, съгласно с (2.2.61) и $g(J^0) = \min f(X)$ следва, че на плана Y^0 линейната функция на дуалната задача достига максималната си стойност. Следователно

$$\max g = \min f. \qquad (2.2.62)$$

По същия начин може да се покаже, че ако дуалната задача има решение, изходната също има решение и е изпълнено пак съотношението (2.2.62). С това първата част на теоремата е доказана.

За доказателство на втората част се вижда, че при неограниченост на линейната функция на изходната задача от съотношението

$$g(J) \leq f(X)$$

следва, че

$$g(J) \leq -\infty.$$

Понеже това съотношение е лишено от смисъл, заключаваме, че дуалната задача не притежава планове. По същия начин се установява, че ако линейната функция на дуалната задача е неограничена, изходната задача няма планове.

Пример. Да се намери минималната стойност нал инейната функция

$$f(X) = x_2 - 3x_3 + 2x_5$$

при следните условия:

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - x_3 + \ldots + 2x_5 &= 7; \\ -2x_2 + 4x_3 + x_4 + \ldots &= 12; \\ -4x_2 + 3x_3 + \ldots 8x_5 + x_6 &= 10; \end{aligned}$$

$$x_j \geq 0;\ j = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

Тук $C = (0, 1, -3, 0, 2, 0)$; $P_0 = B = (7, 12, 10)$;

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & 0 & 8 & 1 \end{pmatrix}.$$

Двойнствена задача. Да се намери максималната стойност на линейната функция

$$g(J) = 7y_1 + 12y_2 + 10y_3$$

при следните условия:

$$\begin{aligned} y_1 &\leq 0; \\ 3y_1 - 2y_2 - 4y_3 &\leq 1; \\ -y_1 + 4y_2 + 3y_3 &\leq -3; \\ y_2 &\leq 0; \\ 2y_1 + 8y_3 &\leq 2; \\ y_3 &\leq 0. \end{aligned}$$

Като решим изходната задача по симплексния метод, получаваме, че окончателният базис се състои от векторите P_2, P_3 и P_6, т. е.

$$B = (P_2, P_3, P_6) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ -4 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Оптималният план X^0 е

$$X^0 = B^{-1}P^0 = (x_2^0, x_3^0, x_6^0) = (4, 5, 11),$$

$$C^0 = (c_2, c_3, c_6) = 1, -3, 0)$$

и минималната стойност на линейната функция е

$$C^0X^0 = (+1, -3, 0)\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 11 \end{pmatrix} = -11.$$

В окончателната симплексна таблица се получава матрицата $\overline{A}$.

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & X_3 & X_4 & X_5 & X_6 \\ 2/5 & 1 & 0 & 1/10 & 4/5 & 0 \\ 1/5 & 0 & 1 & 3/10 & 2/5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1/2 & 10 & 1 \end{pmatrix}.$$

Индексният ред Δ се получава, като умножим вектора C^0 по матрицата $\overline{A}$.

$$\Delta = \left(\frac{1}{5}, 0, 0, -4/5, -\frac{12}{5}, 0\right).$$

Ако началната матрица A съдържа единичната матрица, в окончателната матрица $\overline{A}$ на мястото на единичната матрица се образува обратната матрица на матрицата $Б$.

В нашия случай в матрицата A векторите P_1, P_4 и P_6 образуват единичната матрица. Следователно в окончателната таблица векторите X_2, X_4 и X_6 образуват матрица, обратна на матрицата

$$Б^{-1}=\begin{pmatrix}2/5 & 1/10 & 0\\ 1/5 & 3/10 & 0\\ 1 & -1/2 & 1\end{pmatrix}.$$

Тъй като оптималният план на двойнствената задача се определя от

$$Y^0=C^0Б^{-1},$$

следва, че

$$Y^0=(1,\ -3,\ 0)\begin{pmatrix}2/5 & 1/10 & 0\\ 1/5 & 3/10 & 0\\ 1 & -1/2 & 1\end{pmatrix}=(-1/5,4/5,0).$$

Това е оптималният план на двойнствената задача. Той удовлетворява ограничаващите условия

$$(-1/5,\ -4/5,\ 0)\begin{pmatrix}1 & 3 & -1 & 0 & 2 & 0\\ 0 & -2 & 4 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 3 & 0 & 8 & 1\end{pmatrix}\leq\begin{pmatrix}0\\ 1\\ -3\\ 2\\ 0\end{pmatrix}.$$

Стойността на двойнствената линейна функция е

$$J^0B=(-1/5,\ -4/5,0)\begin{pmatrix}7\\ 12\\ 10\end{pmatrix}=-11,$$

т. е. $$\max g(J)=\min f(X)=-11.$$

Ако матрицата A съдържа единичната матрица, за определяне на компонентите на оптималния план на двойнствената задача не е необходимо да умножаваме C^0 по $Б^{-1}$.

Тъй като

$$J^0=C^0Б^{-1}=C^0(X_1,\ X_4,\ X_6)=(J_1,\ J_2,\ J_3),$$

и по определение $z_j=C^0X_j$, т. е.

$$C^0X_1=z_1,\ C^0X_4=z_4,\ C^0X_6=z_6,$$

следва, че $y_1=z_1$, $y_2=z_4$, $y_3=z_6$. В последния индексен ред на симплексната таблица имаме разликите $\Delta_j=z_j-c_j$. Ясно е, че за да получим компонентите на плана J^0, необходимо е към съответните Δ_j в индексния ред да прибавим величините c_j от целевия ред. Така под първоначалните единични вектори получаваме решението на задачата.

В нашия случай

$$y_1=\Delta_1+c_1=\Delta_1=\frac{-1}{5},\ y_2=\Delta_4+c_4=\Delta_4=\frac{-4}{5}$$

и $y_3=\Delta_6+c_6=\Delta_6=0$, тъй като $c_1=c_4=c_6=0$.

Следователно, като решим по симплексния метод изходната задача, едновременно с това намираме и решението на дуалната. То е в индексния ред под началните единични вектори, ако съответните c_j над векторите на началния базис са равни на нула. Ако величините c_j са различни от нула, за да получим решението на дуалната задача, прибавяме ги към величините Δ_j.

7.2. Симетрични двойнствени задачи

Изходна задача. Да се намери вектор-стълб X, минимизиращ линейната функция

$$f(X)=CX, \tag{2.2.63}$$

при следните условия:

$$AX\geq B; \tag{2.2.64}$$

$$X\geqslant 0. \tag{2.2.65}$$

Двойнствена задача. Да се намери вектор-ред J, минимизиращ линейната функция

$$g(J)=JB, \tag{2.2.66}$$

при следните условия:

$$JA\leq C; \tag{2.2.67}$$

$$J\geq 0. \tag{2.2.68}$$

Ще покажем, че теоремата за двойнствеността е в сила и за симетричните двойнствени задачи.

Системата неравенства (2.2.64) може да се преобразува в система равенства чрез изваждане на неотрицателните променливи $(x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m})$ последователно от всяко неравенство. Да означим с U вектора $U=(x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m})$. Тогава (2.2.63), (2.2.64) и (2.2.65) може да се напишат по следния начин:

$$f=(C|0).(X|U)$$

при

$$(A|-E)\begin{pmatrix}X\\U\end{pmatrix}=B;$$

$$X\geq 0;\ U\geq 0,$$

където $O=(0, 0, \ldots, 0)$ е m-мерен нулев вектор; E — единична матрица с размери $m\times m$. Матрицата $(A|-E)$ е следната:

$$(A|-E)=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & -1 & 0 & \ldots & 0\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & 0 & -1 & \ldots & 0\\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot\\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot\\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot\\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & 0 & 0 & \ldots & -1\end{pmatrix}.$$

Векторът $(X|U)=(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+m})$, а $\begin{pmatrix}X\\U\end{pmatrix}$ е вектор-стълб със същите компоненти.

Тогава двойнствената задача по отношение на новата задача ще бъде да се намери максималната стойност на линейната функция

$$g(J)=JB \text{ при } J(A|-E)\leq(C|\overline{O}).$$

Последното неравенство е еквивалентно на неравенствата

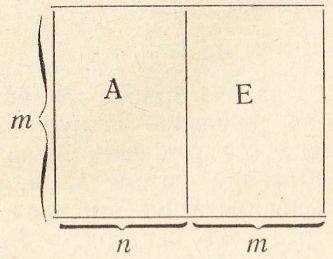
$$JA\leq C;$$

$$-J\leq 0, \text{ т. е. } J\geq 0,$$

а това са именно условия (2.2.67) и (2.2.68). По този начин симетричните двойнствени задачи се свеждат към несиметричните, за които теоремата за двойнственост е доказана.

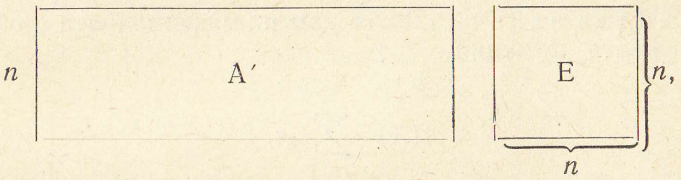
В много случаи решаването на дуалната задача е по-просто от решаването на изходната и понеже с решаването на едната дуална задача се решава и другата, в някои случаи е много по-удобно да се решава дуалната задача вместо изходната.

Например, ако $m>n$, в изходната задача ще трябва да прибавим още m неизвестни и по такъв начин ще получим матрица с размери $m\times(n+m)$, т. е.



$=A_1\ (m\times(n+m).$

В този случай дуалната задача съдържа n уравнения с $n+m$ неизвестни



т. е. единичната матрица има много по-малки размери.

Пример. Да се намери минималната стойност на линейната функция

$$f(X)=10x_1+20x_2+20x_3$$

при следните условия:

$$\begin{aligned}2x_1+x_2 &\geq 1;\\ 4x_1+2x_3 &\geq 2;\\ x_1+5x_2+4x_3 &\geq 1;\\ x_2+2x_3 &\geq 1;\\ 4x_1+6x_2 &\geq 2;\end{aligned}\qquad A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 4 & 0 & 2\\ 1 & 5 & 4\\ 0 & 1 & 2\\ 4 & 6 & 0\end{pmatrix};$$

$$x_j\geq 0,\ j=1, 2, -3.$$

Дуална задача. Да се намери максималната стойност на линейната функция

$$g(J)=y_1+2y_2+y_3+y_4+2y_5$$

при следните условия:

$$2y_1+4y_2+y_3+4y_5\leq 10;$$
$$y_1+0.y_2+5y_3+y_4+6y_5\leq 20;$$
$$2y_2+4y_3+2y_4\leq 20;$$
$$y_1\geq 0;\quad j=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5.$$

За решаване на изходната задача трябва да използуваме матрица с размери 5×9, а за решаване на дуалната — матрица с размери 3×8. Ясно е, че решаването на дуалната задача е свързано с много по-малко пресмятания, отколкото на изходната, а теоремата за двойнственост ни дава в последната таблица в индексния ред под векторите P_6, P_7 и P_8 решението на изходната задача.

7.3. Икономическа интерпретация на изходната и двойнствената задача

Изходна задача. Да се намери максималната стойност на линейната функция

$$f(X)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

при следните условия:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_j\leq b_i;\quad i=1,\ 2,\ \ldots,m;$$

$$x_j\geq 0.$$

Следователно икономическият смисъл на задачата е

$$f(X)=\sum\begin{pmatrix}\text{дохода от единица}\\ \text{продукция от } j\text{-тия вид}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\text{броя на продукция-}\\ \text{та от } j\text{-тия вид}\end{pmatrix}=$$
$$=\text{дохода}$$

при следните условия:

$$\sum_{j=1}^{n}\begin{pmatrix}\text{загубите от } i\text{-тия ресурс за}\\ \text{производство на единица}\\ \text{продукция от } j\text{-тия вид}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\text{броя на планира-}\\ \text{ната продукция}\\ \text{от } i\text{-тия вид}\end{pmatrix}\leq$$
$$\leq\begin{pmatrix}\text{запаса от } i\text{-тия}\\ \text{ресурс}\end{pmatrix}.$$

Двойнствена задача. Да се намери минималната стойност на линейната функция

$$g(J)=\sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

при следните условия:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}y_i\leq c_j;\quad j=1,\ 2,\ \ldots,n;$$

$$y_i\geq 0;\quad i=1,\ 2,\ \ldots,n.$$

Икономическият смисъл на задачата е следният. Да се намери минималната стойност на линейната функция $g(J)$

$$g(J)=\sum\begin{pmatrix}\text{запаса от}\\ i\text{-тия ресурс}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\text{цената на единица про-}\\ \text{дукция от } i\text{-тия ресурс}\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}\text{общата стойност на}\\ \text{всички ресурси}\end{pmatrix}$$

при следните условия:

$$\sum_{i=1}^{m}\begin{pmatrix}\text{загубите от } i\text{-тия ресурс за про-}\\ \text{изводство на единица продукция}\\ \text{от } j\text{-тия вид}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\text{цената на едини-}\\ \text{ца продукция от}\\ i\text{-тия ресурс}\end{pmatrix}\geq$$
$$\geq\begin{pmatrix}\text{дохода от продукцията}\\ \text{от } j\text{-тия вид}\end{pmatrix};$$
$$\begin{pmatrix}\text{цената на единица про-}\\ \text{дукция от } i\text{-тия ресурс}\end{pmatrix}\geq 0.$$

По този начин двойката задачи може да се формулира по следния начин.

Изходна задача. По колко броя x_j, $j=1,\ 2,\ \ldots,n$ от всеки вид продукция е нужно да се произведе при доход c_j от единица продукция от j-тия вид и при дадени количества ресурси b_i, $i=1,\ 2,\ \ldots,n$, за да се получи максимална печалба от цялата продукция.

Двойнствена задача. Каква цена y_i трябва да има всеки ресурс, за да може при дадени количества ресурси b_i и стойности на дохода c_j от производството на всеки вид продукция общата стойност на загубите да бъде минимална.

УПРАЖНЕНИЯ

Задача 1. За построяване на четири типа убежища видовете ресурси, техните количества и разходните норми са дадени в таблица 2.2.21.

Таблица 2. 2. 21

Видове ресурси	Количества	Необходими ресурси за построяване на убежището			
		I тип	II тип	III тип	IV тип
1. Дървен материал	320 м³	8,5	6,5	1,6	7
2. Метални оковки	460 kg	12	12	10	8
3. Гвоздеи	360 kg	4,6	16,1	2,3	1,8
4. Машиночаса (екскаватори)	65 часа	1,6	1,7	1,6	1
5. Машиночаса (булдозери)	55 часа	1	1	1	1,2
6. Човекочаса за изработване на конструкцията	25000	35	85	40	48
7. Човекочаса за монтаж и маскировка	5500	125	120	115	110
8. Пръти	260m³	1	1	18	2
Капацитет в бройки хора		20	20	20	20

По колко убежища да се построят от всеки тип, за да може в тях да се поберат максимален брой хора?

Отговор. $L(X)=976$.

$$X^0=(x_1^0=0,6;\ x_2^0=6,7;\ x_3^0=10,6;\ x_4^0=30,8).$$

След закръгляване до цели числа получаваме

$$X^0=(0;\ 7;\ 10;\ 31),\ \text{или}\ X^0=(0;\ 6;\ 11;\ 31).$$

Стойността на $L(X)=960$.

При това машиночасовете за булдозерите, човекочасовете за изработване на конструкциите, човекочасовете за монтаж и маскировка и прътите се изчерпват напълно. От дървения материал остават 38 м³, от металните оковки — 18 kg, от гвоздеите — 168 kg, от машиночасовете за екскаваторите — 4,7 машиночаса.

Задача 2. За изработването на колейни настилки се използуват комплекти, които се състоят от 9 елемента по 17 cm и 7 елемента по 23 cm.

Разполагаме с 45 пръта с дължина 130 cm и 38 пръта с дължина 89 cm. Да се състави план за нарязването им на максимален брой компоненти.

Отговор. Максималният брой на компонентите е 28.

Задача 3. Железни пръти с дължина 123 cm трябва да се нарежат на парчета, както следва: по 21 cm — 210 броя, по 29 cm — 161 броя и по 32 cm — 175 броя. За удовлетворяване на тези нужди да се състави план, който остгурява нарязването на минимален брой пръти.

Отговор. 128 броя, от които 67 да се нарежат така: 2×29 cm, 2×32 cm, остава 1 cm; 42 да се нарежат така: 4×21 cm, 1×32 cm, остават 7 cm; 19 да се нарежат така: 3×21 cm, 2×29 cm, остават 2 cm.

Глава трета

ТРАНСПОРТНИ И РАЗПРЕДЕЛИТЕЛНИ ЗАДАЧИ

1. ОБЩА ПОСТАНОВКА И МАТЕМАТИЧЕСКИ МОДЕЛ

В много отрасли на народното стопанство и във военното дело е необходимо да се решават задачи, свързани с най-рационалното превозване или разпределение на еднородна продукция или продукти. Най-често те се произвеждат в няколко пункта или са в няколко склада и трябва да се подвозят до потребителите, които може да получават продукция за задоволяване на своите нужди от всеки склад. Естествено, възниква въпросът, от кои пунктове за производство трябва да получава продукция всеки пункт за потребление и в какви количества с оглед нуждите им да се задоволяват при минимални сумарни транспортни разноски. Задачите от този тип се наричат транспортни. Към тях се отнасят задачите, свързани със снабдяването на войските, с разпределението на средствата за нападение по обектите на противника, с разпределението на средствата на ПВО и флота за максимално поразяване на противниковите цели (обекти) и др.

Най-общата постановка на тези задачи е следната: В m пункта за производство (склада) $A_1, A_2, \ldots, A_m$ има определен вид еднородна продукция в количества $a_1, a_2, \ldots, a_m$, която трябва да се разпредели между n пункта за потребление $B_1, B_2, \ldots, B_n$, които искат съответно $b_1, b_2, \ldots, b_n$ количества от тази продукция. Известни са транспортните разноски (величините c_{ij}) за превоз на единица продукция от i-тия пункт за производство до j-тия пункт за потребление.

Трябва да се състави план за превоза, т. е. да се определят величините x_{ij} (количеството продукция, което ще се превози от i-тия склад до j-тия пункт) с оглед сумарните транспортни разноски за превоза да са минимални.

Като се имат пред вид въведените обозначения, удобно е условията на транспортната задача да се запишат компактно в таблица, 2.3.1; като в квадратчето в i-тия ред и j-тия стълб се записват числата x_{ij} и c_{ij}.

Таблица 2.3.1

Потребител / Склад	B_1	B_2	. . . . .	B_n	a_i
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	. . . . .	c_{1n} x_{1n}	a_1
A_2	c_{12} x_{21}	c_{22} x_{22}	. . . . .	c_{2n} x_{2n}	a_2
. . . .	. . . .	. . . .	. . . . .	. . . .	. . . .
A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	. . . . .	c_{mn} x_{mn}	a_m
b_j	b_1	b_2	. . . . .	b_n	$\sum_{i=1}^{m} a_i$ / $\sum_{j=1}^{n} b_j$

Когато наличното количество продукция в складовете е равно на исканото от потребителите, т. е.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j,$$

задачата се нарича балансирана. В противен случай тя е с нарушен баланс.

Най-напред нека разгледаме случая, когато задачата е балансирана. Тогава за задоволяване на исканията на потребителите е необходимо да се извози цялата продукция от складовете.

Общото количество на получената от всички потребители продукция от даден склад е равно на съдържащата се в склада, т. е.

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i;\ i=1,\ 2,\ldots,m.$$

Продукцията, доставена от всички складове на който и да е потребител, трябва да е равна на исканото от него количество, т. е.

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j;\ j=1,\ 2,\ldots,n.$$

Стойността на превоза на x_{ij} количество продукция от A_i до B_j е равна на $c_{ij}x_{ij}$.

Математическата формулировка на транспортната задача е:

Да се определят стойностите на променливите x_{ij}, за които линейната функция

$$L(X)=c_{11}x_{11}+c_{12}x_{12}+\ldots+c_{1n}x_{1n}+c_{21}x_{21}+\ldots+c_{mn}x_{mn} \quad (2.3.1)$$

приема минимална стойност при спазване на следните условия:

$$\begin{aligned}
&x_{11}+x_{12}+\ .\ .\ .+x_{1n}=a_1;\\
&x_{21}+x_{22}+\ .\ .\ .+x_{2n}=a_2; \qquad (2.3.2)\\
&\ .\quad .\qquad\quad .\quad .\\
&\ .\quad .\qquad\quad .\quad .\\
&\ .\quad .\qquad\quad .\quad .\\
&x_{m1}+x_{m2}+\ .\ .+x_{mn}=a_m;\\
&x_{11}+x_{21}+\ .\ .\ .+x_{m1}=b_1;\\
&x_{21}+x_{22}+\ .\ .\ .+x_{m2}=b_2; \qquad (2.3.3)\\
&\ .\quad .\qquad\quad .\quad .\\
&\ .\quad .\qquad\quad .\quad .\\
&\ .\quad .\qquad\quad .\quad .\\
&x_{1n}+x_{2n}+\ .\ .\ .+x_{mn}=b_n.
\end{aligned}$$

$$x_{ij}\geq 0;\ i=1,\ 2,\ .\ .\ .,m;\ j=1,\ 2,\ .\ .\ .,n. \qquad (2.3.4)$$

Математическият модел на задачата може да се запише и по следния начин:

Да се определят стойностите на променливите x_{ij}, които минимизират линейната функция $L=\sum_{i=1}^{m}\cdot\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$ (2.3.1)′

при следните условия:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}=a_i;\ i=1,\ 2,\ 3,\ .\ .\ .,m; \qquad (2.3.2)'$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij}=b_j;\ j=1,\ 2,\ 3,\ .\ .\ .,n; \qquad (2.3.3)'$$

$$x_{ij}\geq 0. \qquad (2.3.4)'$$

Уравненията (2.3.2) се получават от редовете на таблицата на транспортната задача, а уравненията (2.3.3) — от стълбовете ѝ.

Тъй като $D=\sum_{i=1}^{m} a_i=\sum_{j=1}^{n} b_j$, от (2.3.2) и (2.3.3)

$$D=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} x_{ij}.$$

От (2.3.1), (2.3.2), (2.3.3) и (2.3.4) следва, че транспортната задача е задача на линейното програмиране с $m.n$ неизвестни и $m+n$ уравнения.

2. СВОЙСТВА НА ТРАНСПОРТНАТА ЗАДАЧА

Свойствата на транспортната задача се установяват посредством следните теореми:

Теорема 1. Всяка транспортна задача има план.

Доказателство. Тъй като

$$\sum_{i=1}^{m} a_i=\sum_{j=1}^{n} b_j=D,$$

величините $x_{ij}=\frac{a_i b_j}{D}$, $i=1, 2, \ldots, m$ и $j=1, 2, \ldots, n$

удовлетворяват ограничаващите условия (2.3.2), (2.3.3) и (2.3.4).

Наистина

$$x_{ij}\geq 0 \text{ за } i=1, 2, \ldots, m, \; j=1, 2, \ldots, n,$$

тъй като $a_i\geq 0$ и $b_j\geq 0$,

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}=\sum_{j=1}^{n}\frac{a_i b_j}{D}=\frac{a_i}{D}\sum_{j=1}^{n} b_j=\frac{a_i}{D}D=a_i, \; i=1, 2, \ldots, m,$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij}=\sum_{i=1}^{m}\frac{a_i b_j}{D}=\frac{b_j}{D}\sum_{i=1}^{m} a_i=\frac{b_j}{D}D=b_j, \; j=1, 2, \ldots, n.$$

Следователно така определените стойности на променливите x_{ij} удовлетворяват ограничаващите условия (2.3.2), (2.3.3) и (2.3.4).

Системата ограничаващи условия (2.3.2) и (2.3.3) за $m=3$ и $n=4$ ще има вида:

$$\begin{array}{llllll}
1. & x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14} & & & & =a_1;\\
2. & & x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24} & & & =a_2;\\
3. & & & x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34} & & =a_3;\\
4. & x_{11} & +x_{21} & +x_{31} & & =b_1;\\
5. & x_{12} & +x_{22} & +x_{32} & & =b_2;\\
6. & x_{13} & +x_{23} & & +x_{33} & =b_3;\\
7. & x_{14} & +x_{24} & & +x_{34} & =b_4.
\end{array}$$

Ако съберем последните четири уравнения (от 4 до 7) и от сбора им извадим второто и третото, ще получим първото. Следователно първото уравнение зависи линейно от останалите и може да се изключи от системата условия. Така за транспортната задача се получават $m+n-1$ независими уравнения с $m.n$ променливи. Ако с A означим матрицата от коефициентите пред неизвестните в независимите ограничаващи условия, с B — вектора с компоненти свободните членове, с C — вектора-ред с компоненти величините c_{ij} и с X — вектора с компоненти x_{ij}, те ще имат вида:

$$A=\begin{array}{c}
\begin{matrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & P_{14} & P_{21} & P_{22} & P_{23} & P_{24} & P_{31} & P_{32} & P_{33} & P_{34} \end{matrix}\\
\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1\\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\end{array};\quad B=\begin{pmatrix} a_2\\ a_3\\ b_1\\ b_2\\ b_3\\ b_4 \end{pmatrix};$$

$$X^{\mathrm{T}}=(x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24}, x_{31}, x_{32}, x_{33}, x_{34});$$

$$C=(c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{14}, c_{21}, c_{22}, c_{23}, c_{24}, c_{31}, c_{32}, c_{33}, c_{34}).$$

Транспортната задача може да се запише по следния начин:

Да се намери векторът X, минимизиращ стойността на линейната функция

$$L(X)=CX, \tag{2.3.5}$$

при следните условия:

$$AX=B; \tag{2.3.6}$$

$$X\geq 0. \tag{2.3.7}$$

От теорема 1 следва, че всеки план на транспортната задача може да има най-много $m+n-1$ положителни компоненти. За да е опорен този план, системата вектори P_{ij}, съответстващи на положителните му компоненти, трябва да е линейно независима, което се установява чрез следната теорема:

Теорема 2. Всяка транспортна задача има план, съдържащ не повече от $m+n-1$ положителни компоненти x_{ij}. Системата вектори P_{ij}, която съответствува на тези компоненти, е линейно независима.

Първото твърдение в теоремата се доказва, като се построи план, който съдържа точно $m+n-1$ положителни компоненти. Той може да се построи по няколко начина. Най-често се прилагат така наречения метод на северозападния ъгъл и методите на предпочитание: на най-малкия елемент в реда (респективно най-големия елемент при търсене на максимум) и на най-малкия (най-големия) елемент в стълба.

Да разгледаме отначало метода на северозападния ъгъл за таблица 2.3.2.

Началните стойности на неизвестните x_{ij} определяме, като започнем от най-горното ляво квадратче. Определяме

Таблица 2. 3. 2

x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	a_1
x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	a_2
x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}	a_3
b_1	b_2	b_3	b_4	$\sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{j=1}^{4} b_j$

$x_{11}=\min(a_1, b_1)$. Ако $a_1<b_1$, $x_{11}=a_1$ и $x_{12}=x_{13}=x_{14}=0$,

тъй като $\sum_{j=1}^{4} x_{ij}=x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=a_1+x_{12}+x_{13}+x_{14}=a_1$.

Ако $b_1<a_1$, $x_{11}=b_1$ и $x_{21}=x_{31}=0$, понеже $x_{11}+x_{21}+x_{31}=b_1+x_{21}+x_{31}=b_1$. По този начин размерите на таблицата се намаляват с един ред или с един стълб. При това в първия случай $b_1'=b_1+a_1$, а във втория $a'_1=a_1-b_1$. За новата таблица постъпваме по същия начин, т. е. определяме $x_{21}=\min(a_2, b_1')$ или $x_{12}=\min(a_1', b_2)$. На всяка такава итерация намаляваме размерите на таблицата или с един ред, или с един стълб и определяме по една положителна компонента на плана. В последната итерация при определяне на x_{34} размерите на таблицата се намаляват едновременно с един ред и с един стълб. Следователно броят на итерациите е най-много $m+n-1$, а оттук следва, че броят на положителните компоненти на плана е $m+n-1$.

Ако при определяне на стойностите на x_{ij} размерите на таблицата всеки път (с изключение на последния) се намаляват или само с ред, или само със стълб, планът ще има точно $m+n-1$ положителни компоненти. Ще го наричаме неизроден. Да разгледаме един числен пример (таблица 2.3.3).

Определяме $x_{11}=\min(12,8)=8$. Тогава $x_{21}=x_{31}=0$. За новата таблица определяме $x_{12}=\min(4,10)=4$. Компонентите x_{13} и x_{14} са нули. Като продължаваме така, получаваме следния начален план (таблица 2.3.4).

Таблица 2. 3. 3

$x_{11}=8$	$x_{12}=4$	$x_{13}=0$	$x_{14}=0$	$a_1=12$	$a'_1=4$
$x_{21}=0$	x_{22}	x_{23}	x_{24}	$a_2=9$	
$x_{31}=0$	x_{32}	x_{33}	x_{34}	$a_3=14$	
$b_1=8$	$b_2=10$	$b_3=6$	$b_4=11$	35	
	$b_2'=6$				

Таблица 2. 3. 4

$x_{11}=8$	$x_{12}=4$	$x_{13}=0$	$x_{14}=0$	$a_1=12$	$a'_1=4$;
$x_{21}=0$	$x_{22}=6$	$x_{23}=3$	$x_{24}=0$	$a_2=9$	$a'_2=3$;
$x_{31}=0$	$x_{32}=0$	$x_{33}=3$	$x_{34}=11$	$a_3=14$	$a'_3=11$.
$b_1=8$	$b_2=10$	$b_3=6$	$b_4=11$	35 / 35	
$b_1'=6$	$b_2''=3$				

Той има точно $m+n-1=3+4-1=6$ положителни компоненти:

$$x_{11}=8,\ x_{12}=4,\ x_{22}=6,\ x_{23}=3,\ x_{33}=3 \text{ и } x_{34}=11.$$

Ако при определяне на някое x_{ij} при търсене на началния план съответните стойности на получените a_i и b_j са равни, с това размерите на таблицата се намаляват едновременно с един ред и с един стълб. В този случай броят на положителните компоненти на плана е по-малък от $m+n-1$, т. е. той е изроден. За да се получи неизроден план, трябва една от нулевите компоненти, стоящи в съседното квадратче в реда или в стълба, да считаме за ненулева, равна на положителното число ε.

Например за таблица 2.3.5.

Таблица 2.3.5

$x_{11}=4$	$x_{12}=2$	$x_{13}=\varepsilon$	$x_{14}=0$	$a_1=6$	$a_1'=2$
$x_{21}=0$	$x_{22}=0$	$x_{23}=7$	$x_{24}=0$	$a_2=7$	
$x_{31}=0$	$x_{32}=0$	$x_{33}=2$	$x_{34}=10$	$a_3=12$	
$b_1=4$	$b_2=2$	$b_3=9$	$b_4=10$	25 / 25	

при определяне на $x_{12}=\min(a_2', b_2)=\min(2,2)$ размерите ѝ се намаляват и с ред, и със стълб, т. е. $x_{13}=x_{14}=0$ и $x_{22}=x_{32}=0$. Една от нулевите компоненти x_{13} или x_{22} трябва да приемем за равна на ε, т. е. да я считаме за различна от нула (съответното квадратче за пълно), за да бъде планът неизроден.

С всеки план, получен по метода на северозападния ъгъл, е свързана системата от $m+n-1$ линейно независими вектори, които образуват началния базис $Б$. За първия пример $Б=(P_{11}, P_{12}, P_{22}, P_{23}, P_{33}, P_{34})$, а за втория $Б=(P_{11}, P_{12}, P_{13}, P_{23}, P_{33}, P_{34})$. Решението на системата $Б\tilde{X}=P_0$ трябва да съвпада с плана, получен по метода на северозападния ъгъл. Тук $\tilde{X}$ е векторът, съставен само от положителните компоненти на плана X.

Началният опорен план може да се построи и по методите на предпочитание. Да разгледаме метода на най-малкия елемент в реда. При него стойностите на плана X се определят, като се започне от онова квадратче в първия ред на таблицата, за което съответното c_{ij} е най-малко. Избираме $x_{ij}=\min(a_i, b_j)$. Ако $a_i<b_j$, $x_{ij}=a_i$ и останалите квадратчета в първия ред се попълват с нули, с което размерите на таблицата се намаляват с един ред. Ако $b_j<a_i$, $x_{1j}=b_j$ и останалите квадратчета в j-тия стълб се попълват с нули, като размерите на таблицата се намаляват с един стълб. За новата таблица се постъпва по същия начин. Така например за таблица 3.3.6 най-напред определяме $x_{13}=\min(a_1, b_3)=5$, тъй като $c_{13}=3$ е най-малкото c_{ij} в първия ред. Попълваме $x_{11}=x_{12}=x_{14}=0$,

Таблица 2.3.6

$x_{11}=0$ [5]	$x_{12}=0$ [4]	$x_{13}=5$ [3]	$x_{14}=0$ [8]	$a_1=5$
$x_{21}=0$ [3]	$x_{22}=12$ [2]	$x_{23}=0$ [5]	$x_{24}=0$ [7]	$a_2=12$
$x_{31}=7$ [6]	$x_{32}=16$ [8]	$x_{33}=4$ [1]	$x_{34}=9$ [4]	$a_3=36$
$b_1=7$	$b_2=28$	$b_3=9$	$b_4=9$	53 / 53

след това определяме $x_{22}=\min(a_2, b_2)=12$, $x_{33}=4$, $x_{34}=9$, $x_{31}=7$ и накрая $x_{32}=16$. Полученият план има 6 положителни компонента. Тъй като $m+n-1=6$, той е неизроден.

Методът на най-малкия елемент в стълба се отличава от метода на най-малкия елемент в реда по това, че попълването на квадратчетата в таблицата (т. е. определянето на стойностите на x_{ij}) започва от квадратчето в първия стълб на таблицата, за което съответното c_{i1} е най-малко. За разгледания по-горе пример началният план, определен по този начин, е даден на таблица 2.3.7.

Таблица 2.3.7

$x_{11}=0$ [5]	$x_{12}=5$ [4]	$x_{13}=0$ [3]	$x_{14}=0$ [8]	$a_1=5$
$x_{21}=7$ [3]	$x_{22}=5$ [2]	$x_{23}=0$ [5]	$x_{24}=0$ [7]	$a_2=12$
$x_{31}=0$ [6]	$x_{32}=18$ [8]	$x_{33}=9$ [1]	$x_{34}=9$ [4]	$a_3=36$
$b_1=7$	$b_2=28$	$b_3=9$	$b_4=9$	53 / 53

Този план също е неизроден. Системата вектори, съответстващи на намерените планове, е линейно независима.

Теорема 3. Ако всички a_i и b_j са положителни и целочислени, всеки опорен план е целочислен.

Доказателство. Нека покажем, че всяка система от $m+n-1$ линейно независими вектори при транспортната задача може да се представи като триъгълна матрица. Да вземем векторите, образуващи базиса $Б=(P_{11}, P_{12}, P_{22}, P_{23}, P_{33}, P_{34})$, който съответствува на началния план в първия пример.

$$\begin{array}{c} \\ 1. \\ 2. \\ 3. \\ 4. \\ 5. \\ 6. \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} P_{11} & P_{12} & P_{22} & P_{23} & P_{33} & P_{34} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \cdot \begin{array}{c} X \\ \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{22} \\ x_{23} \\ x_{33} \\ x_{34} \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} P_0 \\ \begin{pmatrix} 9 \\ 14 \\ 8 \\ 10 \\ 6 \\ 11 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Ако разменим местата на редовете на матрицата $Б$ и на елементите на вектора P_0, получаваме следната система:

$$\begin{array}{c} \\ 3. \\ 4. \\ 1. \\ 5. \\ 2. \\ 6. \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} P_{11} & P_{12} & P_{22} & P_{23} & P_{33} & P_{34} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \cdot \begin{array}{c} X \\ \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{22} \\ x_{23} \\ x_{33} \\ x_{34} \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} P_0 \\ \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ 9 \\ 6 \\ 14 \\ 11 \end{pmatrix} \end{array}.$$

От този запис на системата следва, че $x_{34}=11$. $x_{33}=3$, $x_{23}=3$, $x_{22}=6$, $x_{12}=4$ и $x_{11}=8$.

Решаването ѝ е свързано само с изваждане и събиране и понеже P_0 е целочислен, стойностите на компонентите на плана X също са целочислени.

Теорема 4. Всяка транспортна задача има оптимален план.

Доказателство. Съгласно теорема 1 всяка транспортна задача има поне един план, следователно множеството планове на задачата не е празно. То е и ограничено отгоре, тъй като компонентите x_{ij} са по-малки или равни на съответните им a_i и b_j. От това следва, че задачата е разрешима, т. е. има оптимален план.

Да разгледаме един пример на транспортна задача за снабдяване на войските с ГСМ.

Таблица 2. 3. 8

Поделения / Складове	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	$c_{11}=8$ x_{11}	$c_{12}=8$ x_{12}	$c_{13}=7$ x_{13}	$a_1=60$ t
A_2	$c_{21}=11$ x_{12}	$c_{22}=6$ x_{22}	$c_{23}=5$ x_{23}	$a_2=105$ t
A_3	$c_{31}=4$ x_{31}	$c_{32}=8$ x_{32}	$c_{33}=5$ x_{33}	$a_3=75$ t
b_j	$b_1=55$ t	$b_2=135$ t	$b_3=50$ t	240 t / 24 0 t

Пример 1. Да се снабдят с ГСМ три войскови поделения B_1, B_2, B_3 от три склада A_1, A_2, A_3. Наличните количества ГСМ в складовете, исканията на поделенията и стойностите на транспортните разноски са дадени в таблица 2.3.8.

Да се състави план за подвоза с минимални сумарни транспортни разноски.

Критерият за оптималност в тази задача е цената на превоза. Тя се изразява чрез следната линейна функция:

$$L(X)=8x_{11}+8x_{12}+7x_{13}+11x_{21}+6x_{22}+5x_{23}+4x_{31}+8x_{32}+5x_{33}.$$

Нашата задача е да се намери такъв план, т. е. стойностите на неизвестните компоненти x_{ij} да се определят така, че за него тази функция да получи най-малка стойност.

При това за неизвестните x_{ij} трябва да се изпълнят следните ограничаващи условия:

$$x_{11}+x_{12}+x_{13}=60;$$
$$x_{21}+x_{22}+x_{23}=105;$$
$$x_{31}+x_{32}+x_{33}=75,$$

които означават изчерпване на съдържанието на трите склада, и

$$x_{11}+x_{21}+x_{31}=55;$$
$$x_{12}+x_{22}+x_{32}=135;$$
$$x_{13}+x_{23}+x_{33}=50,$$

които означават задоволяване на исканията на трите поделения при реализиране на този план. Трябва още всички $x_{ij} \geq 0$, тъй като товарите не може да са отрицателни.

Досега разгледахме само балансирани задачи, при които

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

Задачите с нарушен баланс се свеждат към балансираните. Ако в складовете има повече продукция от исканията на потребителите, въвежда се фиктивен потребител (поделението), който иска точно толкова, колкото е излишъкът, а транспортните разноски от този потребител до всички складове, т. е. съответните величини c_{ij}, се приемат за равни на нула. Ако в складовете има по-малко продукция, отколкото са исканията, въвежда се фиктивен склад, който има точно толкова продукция, колкото не достига, а транспортните разноски от него до всички потребители се приемат равни на нула.

С решаването на новата балансирана задача в първия случай ще се задоволяват исканията на всички потребители, а във втория няма да бъдат задоволени исканията им точно с толкова, колкото съответните потребители са получили от фиктивния склад.

Разгледахме постановката, математическия модел и свойствата на транспортната задача. Същия математически модел и свойства имат и задачите от разпределителен тип, чиято най-обща постановка е: m вида средства за поразяване (боеприпаси) трябва да се разпределят по n типа обекти. Известни са броят на средствата по видове, броят на обектите по типове и вероятностите за поразяване на всеки обект от всяко средство. Средствата трябва да се разпределят по обектите така, че математическото очакване за броя на поразените цели да е максимално.

Към задачи от същия тип се отнасят и тези, при които по всяка цел се планира удар само с един боеприпас.

Пример. За поразяване на четири типа цели — ядрени средства, складове с боеприпаси, КП и танкове — разполагаме с два вида с едства: ракети и изтребително-бомбардировъчна авиация. Броят на противниковите цели по типове, броят на средствата за поразяване по видове и вероятностите за поразяване на всеки тип цели от всеки вид средства са дадени в таблица 2.3.9.

Таблица 2. 3. 9

Средства \ Цели	Ядрени средства	Складове с боеприпаси	КП	Танкове	a_i
Ракети	$c_{11}=0,5$ x_{11}	$c_{12}=0,3$ x_{12}	$c_{13}=0,4$ x_{13}	$c_{14}=0,6$ x_{14}	$a_1=6$
ИБА	$c_{21}=0,3$ x_{21}	$c_{22}=0,2$ x_{22}	$c_{23}=0,8$ x_{23}	$c_{24}=0,2$ x_{24}	$a_2=7$
b_j	$b_1=4$	$b_2=6$	$b_3=2$	$b_4=1$	13 / 13

Критерият за оптималност в тази задача е математическото очакване за броя на поразените цели. То е равно на сумата от произведенията на вероятностите c_{ij} по броя на средствата x_{ij} от даден вид по даден тип цели, като се търси максималната му стойност.

Следователно задачата е: Да се намери максималната стойност на линейната функция (математическото очакване)

$$M(X)=0,5x_{11}+0,3x_{12}+0,4x_{13}+0,6x_{14}+0,3x_{21}+0,2x_{22}+ \\ +0,8x_{23}+0,2x_{24}$$

при следните ограничаващи условия:

$$\begin{aligned} x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}&=6;\\ x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}&=7;\\ x_{11}+x_{22}&=4;\\ x_{12}+x_{22}&=6;\\ x_{13}+x_{23}&=2;\\ x_{14}+x_{24}&=1;\\ x_{ij}\geq 0 \text{ за } i&=1,2 \text{ и } j=1,2,3,4. \end{aligned}$$

Началните опорни планове се построяват така, както при транспортната задача. Тъй като математическият модел на разпределителните задачи е както на транспортните, методите за решаване са едни и същи.

3. МЕТОДИ ЗА РЕШАВАНЕ НА ЗАДАЧИ ОТ ТРАНСПОРТЕН И РАЗПРЕДЕЛИТЕЛЕН ТИП

Както видяхме в 8.2., транспортните задачи може да се запишат като задачи на линейното програмиране.

Да се намери минималната стойност на линейната функция

$$L(X)=CX$$

при следните условия:

$$AX=B;$$
$$X\geq 0.$$

Двойнствената задача на тази задача е да се намери максималната стойност на линейната функция

$$L(X)=CX$$

при следните условия:

$$AX=B;\ X\geq 0.$$

Матрицата A съдържа векторите P_{ij}, чиито елементи са: на i-тото и на j-тото място единици, а на останалите — нули. Тогава ограничаващите условия $ZA\leq C$ може да се запишат още и така:

$$z_i+z_j\leq c_{ij},$$

като за онези x_{ij}, които са различни от нула,

$$z_i+z_j=c_{ij},$$

а за равните на нула

$$z_i+z_j\leq c_{ij}.$$

Ако с u_i означим z_i, а с v_j-z_j, ще получим:

$$u_i+v_j=c_{ij} \text{ за } x_{ij}>0; \qquad (2.3.8)$$
$$u_i+v_j\leq c_{ij} \text{ за } x_{ij}=0; \qquad (2.3.9)$$
$$i=1,2,\ldots,\ m;\ j=1,2,\ldots\ n.$$

Следователно решаването на двойнствената задача се свежда до намиране на такива u_i и v_j, $_i=1,2,\ldots,\ m$, $_j=1,2,,\ldots,\ n.$, които удовлетворяват условията (2.3.8) и (1.3.9).

От теорията за двойнствеността знаем, че като решим една от двойнствените задачи, получаваме решението и на другата. Канторович и Гавурин, а по-късно и Данциг доказват, че за всеки опорен план може да се намерят такива u_i и v_j, които удовлетворяват условието (2.3.8). Ако се изпълнява и условието (2.3.9), този план е оптимален, а в противен случай се преминава към построяване на нов опорен план.

Различните методи за решаване на задачите от транспортен и разпределителен тип се отличават по начините за намиране на решение на системата (2.3.8). Нека разгледаме така наречения метод на потенциалите, чрез който се проверява дали опорният план е оптимален или не.

Алгоритъмът за решаване на задачи от транспортен и разпределителен тип е следният:

1. Построяване на начален план.
2. Проверка на плана за оптималност.

Ако планът е оптимален, задачата е решена, ако не е, преминава се към следващия етап.

3. Подобряване на плана, т.е. построяване на нов план, за който стойността на линейната функция е по-голяма или по-малка. За новия план повтаряме пресмятанията, като започваме от точка 2.

Методите за построяване на начален опорен план разгледахме в предния параграф. Проверката на плана за оптималност и подобряването му ще покажем с пример за разпределение на средствата за поразяване на обектите.

1. Началният опорен план, построен по метода на северозападния ъгъл, за примера е даден на таблица 2.3.10.

Таблица 2. 3. 10

Цели / Средства	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	0,5 $x_{11}=4$	0,3 $x_{12}=2$	0,4	0,6	6
A_2	0,3	0,2 $x_{22}=4$	0,8 $x_{23}=2$	0,2 $x_{24}=1$	7
b_j	4	6	2	1	13 / 13

Този начален план е неизроден (съдържа точно $m+n-1=$ $=2+4-1=5$ положителни компоненти). Решаването на зада-

чата може да продължи, ако планът е неизроден. Ако той е изроден, трябва да се запази една от нулевите му компоненти и да се разглежда като положителна, а съответното квадратче — като пълно. За този начален план стойността на линейната функция $M(X)=4.0{,}5+2.0{,}3+4.0{,}2+2.0{,}2=5{,}2$, което е средният брой на поразените цели при това разпределение.

2. Планът се проверява за оптималност чрез въвеждане на допълнителните неизвестни (потенциали) u_i и v_j, определяни от системата $u_i+v_j=c_{ij}$ за онези c_{ij}, за които съответните $x_{ij}>0$, т. е. на които отговарят пълни квадратчета в таблицата. В нашия случай пълни са квадратчетата x_{11}, x_{12}, x_{22}, x_{23}, x_{24} и системата е следната:

$$u_1+v_1=c_{11}=0{,}5;$$
$$u_1+v_2=c_{12}=0{,}3;$$
$$u_2+v_2=c_{22}=0{,}2;$$
$$u_2+v_3=c_{23}=0{,}8;$$
$$u_2+v_4=c_{24}=0{,}2.$$

Тя се състои от пет уравнения и шест неизвестни и се решава тривиално, като едно от неизвестните се определя произволно. Например, ако приемем $u_1=0$, $v_1=0{,}5$, $v_2=0{,}3$, от третото уравнение следва, че $u_2=0{,}1$, и от четвъртото и петото определяме

$$v_3=0{,}9 \text{ и } v_4=0{,}3.$$

След това пресмятаме числата $\overline{c}_{ij}=u_i+v_j$ за онези c_{ij}, за които съответните $x_{ij}=0$, т.е. на които отговарят празни квадратчета от таблицата.

$$u_1+v_3=0+0{,}9=0{,}9=\overline{c}_{13};$$
$$u_1+v_4=0+0{,}3=0{,}3=\overline{c}_{14};$$
$$u_2+v_1=-0{,}1+0{,}5=0{,}4=\overline{c}_{21}.$$

Намираме разликите $\overline{c}_{ij}-c_{ij}$ за празните квадратчета

$$\overline{c}_{13}-c_{13}=0{,}9-0{,}4=0{,}5;$$
$$\overline{c}_{14}-c_{14}=0{,}3-0{,}6=-0{,}3;$$
$$\overline{c}_{21}-c_{21}=0{,}4-0{,}3=0{,}1.$$

Ако те са положителни при търсене на максимума на линейната функция, планът е оптимален. При търсене на минимума всички разлики трябва да са отрицателни, за да бъде планът оптимален.

Търсим максималната стойност на линейната функция $M(X)$ и понеже разликата $\overline{c}_{14}-c_{14}=-0{,}3$ е отрицателна, това означава, че планът не е оптимален.

3. Планът се подобрява за онази клетка, за която разликата $\overline{c}_{ij}-c_{ij}$ е най-малката от отрицателните при търсене на максимума и най-голяма от положителните при търсене на минимума.

В нашия случай планът се подобрява за клетка x_{14}, т.е. приемаме $x_{14}=\theta$, $\theta>0$ (таблица 2.3.11).

Таблица 2. 3. 11

$x_{11}=4$	$x_{12}=2-\theta$ —		+	6
	$x_{22}=4+\theta+$ ↓	$x_{23}=2$	$x_{24}=1-\theta$ → —	7
4	6	2	1	ai / bj

За новия план трябва да се изпълнят ограничаващите условия, т. е.

$x_{14}+x_{24}=1$. Тъй като $x_{14}=0$, тогава $x_{24}=1-\theta$,

$x_{11}+x_{12}+x_{14}=6$. Тъй като $x_{11}=4$ и $x_{14}=\theta$, тогава $x_{12}=2-\theta$.

$x_{12}+x_{22}=6$. Тъй като $x_{12}=2-\theta$, тогава $x_{22}=4+\theta$.

Определяме θ така, че новият план пак да има положителни компоненти и понеже техният брой не може да е по-голям от $m+n-1=6-1=5$, избираме θ да е равно на най-малкото от стойностите на x_{ij}, стоящи в квадратчетата, от които изваждаме θ (таблица 2.3.12). В случая $\theta=1$, тъй като $1=\min(2,1)$. Новият план има следните положителни компоненти: $x_{11}=4$,

$x_{12}=1$, $x_{14}=1$, $x_{22}=5$, $x_{23}=2$. Той е неизроден, понеже броят на положителните му компоненти е равен на пет.

Таблица 2. 3. 12

Цели / Средства	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	$x_{11}=4$	$x_{12}=1$		$x_{14}=1$	6
A_2		$x_{22}=5$	$x_{23}=2$		7
b_j	4	6	2	1	13 / 13

Ако при подобряване на плана броят на положителните компоненти стане по-малък от $m+n-1$, т. е. ако се получи изроден план, запазват се толкова нулеви компоненти, колкото са необходими, за да се получи неизроден план, като при търсене на максимума се запазват тези, за които съответните a_{ij} са по-големи, а при търсене на минимума — тези, за които те са по-малки.

При подобряване на плана за определяне на квадратчетата, в които се прибавя или изважда 0, може да се използува и начертаването на един затворен контур, както е показано в таблицата, и поставянето на знаци „+“ и „—“ по ъглите на контура, които се сменят последователно, като се започва със знака „+“.

Математическото очакване за броя на поразените цели за това разпределение е $M(X)=4.0{,}5+1.0{,}3+1.0{,}6+5.0{,}2+2.0{,}8=5{,}5$, т. е. стойността на $M(X)$ за новия план е по-голяма от стойността ѝ за началния план, което означава, че това разпределение е по-добро.

За новия план се повтарят пресмятанията, като се започва от втория етап на алгоритъма, т. е. проверката на плана за оптималност.

Съставяме системата $u_i+v_j=c_{ij}$ за пълните квадратчета и от нея определяме стойностите на u_i и v_j:

$$u_1+v_1=c_{11}=0{,}5;\quad u_1=0;\quad v_1=0{,}5;$$
$$u_2+v_2=c_{12}=0{,}3;\qquad\qquad v_2=0{,}3;$$
$$u_1+v_4=c_{14}=0{,}6;\qquad\qquad v_4=0{,}6;$$
$$u_2+v_2=c_{22}=0{,}2;\quad u_2=-0{,}1;$$
$$u_2+v_3=c_{23}=0{,}8;\qquad\qquad v_3=0{,}9.$$

Пресмятаме числата $\overline{c_{ij}}=u_i+v_j$ за празните квадратчета.

$\overline{c_{13}}=u_1+v_3=0{,}9$; $\overline{c_{21}}=u_2+v_1=0{,}4$; $\overline{c_{24}}=u_2+v_4=0{,}5$.

Намираме разликите $\overline{c_{ij}}-c_{ij}$ за празните квадратчета

$\overline{c_{13}}-c_{13}=0{,}9-0{,}4=0{,}5$; $\overline{c_{21}}-c_{21}=0{,}4-0{,}3=0{,}1$; $\overline{c_{24}}-c_{24}=$
$=0{,}5-0{,}2=0{,}3$.

Всички разлики са положителни, следователно намереният план е оптималният. Ракетите трябва да се разпределят така: 4 по ядрените средства, 1 по складовете и 1 по района с танкове, а ИБА — така: 5 звена по складовете, 2 звена по КП. При това разпределение ще се нанесе максимално поражение на противника при средно 5,5 поразени цели. По същия начин се решава и примерът от задачите по снабдяване на войските, като се отчете, че там се търси минималната стойност на линейната функция, която изразява стойността на превоза.

Нека разгледаме един пример за прилагане на алгоритъма в случая, когато се получават изродени планове.

Пример. Една флотска бойна единица разполага с три вида средства за борба с корабите на противника: подводни лодки с торпеда, ракетоносна авиация с крилати ракети и стражеви кораби. Противникът може да действува също с три типа кораби: ескадрени миноносци, торпедни катери и подводници. Броят на целите на противника, броят на средствата на флотската бойна единица и вероятностите за поразяване на всеки вид цели от всеки вид средства са дадени в таблица 2.3.13.

Средствата да се разпределят по корабите на противника така, че математическото очакване за броя на поразените цели да е максимално.

Математическият модел на задачата е: да се намери максималната стойност на линейната функция

$$M(X)=0{,}7x_{11}+0.x_{12}+0{,}5x_{13}+0{,}6x_{21}+0{,}3x_{22}+0{,}1x_{23}+0{,}4x_{31}+$$
$$+0{,}3x_{32}+0{,}6x_{33}$$

Таблица 2. 3. 13

Средства \ Цели	Ескадрени миноносци	Торпедни катери	Подводници	a_i
Подводни лодки	x_{11} |0,7|	x_{12} |0|	x_{13} |0,5|	11
Ракетоносна авиация	x_{21} |0,6|	x_{23} |0,3|	x_{23} |0,1|	6
Стражеви кораби	x_{31} |0,4|	x_{32} |0,3|	x_{33} |0,6|	7
bj	7	10	7	24

при следните ограничаващи условия:

$$x_{11}+x_{12}+x_{13}=11; \quad x_{11}+x_{21}+x_{31}=7;$$
$$x_{21}+x_{22}+x_{23}=6; \quad x_{12}+x_{22}+x_{32}=10;$$
$$x_{31}+x_{32}+x_{33}=7; \quad x_{13}+x_{23}+x_{33}=7;$$
$$x_{ij}\geqslant 0;\ i=1,\ 2,\ 3;\ j=1,\ 2,\ 3.$$

1. Построяване на начален план (таблица 2.3.14).

Таблица 2. 3. 14

$x_{11}=7$	$x_{12}=4$		11
	$x_{22}=6$		6
	$x_{32}=0$	$x_{33}=7$	7
7	10	7	

При определяне на x_{22} в началния план се получава $x_{22}=6$ и трябва да съкратим таблицата с един ред и един стълб, което води до изроден план. В случая, за да получим неизроден план, трябва да запазим или x_{32}, или x_{23}. Запазваме $x_{32}=0$, тъй като $c_{32}=0,3>c_{23}=0,1$, и търсим максимума на функцията $M(X)$. Стойността на $M(X)$ за началното разпределение е $M(X)=10,9\approx 11$.

2. Проверка на плана за оптималност. Съставяме системата $c_{ij}=u_i+v_j$ за пълните квадратчета, като приемаме за пълно и квадратчето x_{23}.

$$u_1+v_1=c_{11}=0,7; \quad u_1=0; \quad v_1=0,7$$
$$u_1+v_2=c_{12}=0; \quad v_2=0;$$
$$u_2+v_2=c_{22}=0,3; \quad u_2=0,3;$$
$$u_3+v_2=c_{32}=0,3; \quad u_3=0,3;$$
$$u_3+v_3=c_{33}=0,6; \quad v_3=0,3.$$

Определяме величините $\overline{c_{ij}}=u_i+v_j$ за празните квадратчета

$\overline{c_{13}}=u_1+v_3=0+0,3=0,3$; $\overline{c_{21}}=u_2+v_1=0,3+0,7=1$;

$\overline{c_{23}}=u_2+v_3=0,3+0,3=0,6$; $\overline{c_{31}}=u_3+v_1=0,3+0,7=1$.

Намираме разликите $\overline{c_{ij}}-c_{ij}$ за празните квадратчета

$\overline{c_{13}}-c_{13}=0,3-0,5=-0,2$; $\overline{c_{21}}-c_{21}=1-0,6=0,4$;

$\overline{c_{23}}-c_{23}=0,6-0,1=0,5$; $\overline{c_{31}}-c_{31}=1-0,4=0,6$.

Планът не е оптимален и трябва да се подо бриза квадратчето x_{13}. Приемаме $x_{13}=\theta$ и попълваме данните (таблица 2.3.15,а,б). $\theta=\min(4,7)=4$, следователно $x_{13}=4$, $x_{11}=7$, $x_{22}=6$, $x_{32}=4$, $x_{33}=3$.

Новият план е неизроден и броят на положителните му компоненти е равен на $m+n-1=3+3-1=5$.

Проверяваме този план за оптималност:

$u_1+v_1=c_{11}=0,7$; $u_1=0$; $v_2=0,7$; $\overline{c_{12}}=0,2$; $\overline{c_{12}}-c_{12}=0,2$;

$u_1+v_3=c_{13}=0,5$; $v_3=0,5$; $\overline{c_{21}}=0,8$; $\overline{c_{21}}-c_{21}=0,2$;

$u_2+v_2=c_{22}=0,3$; $u_2=0,1$; $\overline{c_{23}}=0,6$; $\overline{c_{23}}-c_{23}=0,5$;

$u_3+v_2=c_{32}=0,3$; $v_2=0,2$; $\overline{c_{31}}=0,8$; $\overline{c_{31}}-c_{31}=0,4$.

$u_3+v_3=c_{33}=0,6$; $u_3=0,1$;

Таблица 2. 3. 15,а

$x_{11}=7$	$x_{12}=4$	$x_{13}=0$	11
	$x_{22}=6$		6
	$x_{32}=0$	$x_{33}=7$	7
7	10	7	a_i / b_j

Таблица 2. 3. 15,б

7		4	11
	6		6
	4	3	7
7	10	7	a_i / b_j

Оказва се, че новият план е оптимален, което означава, че началните средства трябва да се разпределят по целите на противника по следния начин: 7 от подводните лодки по седемте ескадрени миноносеца и 4 по подводниците; 6 самолета от ракетоносната авиация по 6 от десетте торпедоносни катера; 4 от стражевите кораба по 4 торпедоносни катера и 3 по подводниците. При това разпределение математическото очакване за броя на поразените цели $M(X)=7.0{,}7+4.0{,}5+6.0{,}3+4.0{,}3+3.0{,}6=11{,}7\approx 12$.

Ясно е, че то се увеличава в сравнение с началното разпределение.

При разгледаните задачи от разпределението на средствата по обектите на противника се искаше по всеки обект да се нанесе удар само с един боеприпас. Много често обаче се налага по един обект да се нанесат удари с няколко боеприпаса. Тогава, за да се сведе задачата към разгледаните вече задачи, постъпва се по следния начин. Обектът се разделя изкуствено на толкова подобекти, колкото удара искаме да планираме по него, и се решава по разгледания метод получената задача, за която по всеки обект се планира удар само с един боеприпас.

Ако задачата не е балансиране, т. е. ако общият брой на средствата е по-голям или по-малък от общия брой на целите, в първия случай се въвежда фиктивен обект с толкова цели, колкото е излишъкът на средствата за поразяване, а във втория случай се въвеждат толкова фиктивни средства за поразяване, колкото не достигат, като вероятностите за поразяване на фиктивните цели в първия случай и на целите от фиктивните средства във втория се приемат равни на нула. Нека например са дадени таблици 2.3.16, а, б с броя на средствата, броя на целите и вероятностите за поразяването им.

За първата задача въвеждаме един фиктивен обект за поразяване с 4 цели ($4=19-15$), а за втората — фиктивен вид средства за поразяване с 5 боеприпаса ($5=32-27$). Така получаваме следните задачи, които може да се решат по разгледания метод (таблици 2.3.17,а,б).

Ще се спрем на още два примера, които няма да решаваме.

Пример. От три склада A_1, A_2, A_3 трябва да се превозят боеприпаси до четири поделения B_1, B_2, B_3, B_4. Боеприпасите са натоварени на машини, които са комплектувани еднакво. Поради различното състояние на пътищата между складовете и поделенията, радиационната и химическата обстановка и ударите на противотанковата авиация вероятностите за достигане от складовете до поделенията са различни. Броят на машините с боеприпаси в складовете, броят на машините, необходими за поделенията и вероятностите за достигане са дадени в таблица 2.3.18.

Подвозът трябва да се извърши така, че математическото очакване за броя на успешно достигналите до поделенията машини да е максимално.

Таблица 2, 3, 16,а

Средства \ Цели	I	II	a_i
I	0,6	0,3	3
II	0,2	0,8	5
III	0,5	0,6	11
b_j	8	7	19 / 15

Таблица 2, 3, 16,б

Средства \ Цели	I	II	III	a_i
I	0,7	0,3	0,5	12
II	0,6	0,1	0,8	15
b_j	7	11	14	27 / 32

Пример. За отбраната на крупен военен обект ПВО разполага със ЗУР, разположени в три района. Противникът може да атакува обекта чрез влитане от четири направления. Броят на ЗУР в отделните райони, броят на самолетите, които се очаква да влетят от отделните направления, и вероятностите за поразяването им от средствата на ПВО са дадени в таблица 2.3.19.

Таблица 2. 3. 17,а

Средства \ Цели	I	II	Фикт.	a_i
I	0,6	0,3	0	3
II	0,2	0,8	0	5
III	0,5	0,5	0	11
b_j	8	7	4	19

Таблица 2. 3. 17, б

Средства \ Цели	I	II	III	a_i
I	0,7	0,3	0,5	12
II	0,6	0,1	0,8	15
Фикт.	0	0	0	5
b_j	7	11	14	37 / 37

Таблица 2. 3. 18

Склад \ Поделение	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	0,6	0,4	0,8	0,7	24
A_2	0,8	0,7	0,5	0,9	20
A_3	0,9	0,7	0,4	0,6	36
b_j	30	16	14	20	80 / 80

Таблица 2. 3. 19

ЗУР \ Самолети	I направление	II направление	III направление	IV направление	a_i
1 район	0,8	0,6	0,4	0,5	10
2 район	0,5	0,3	0,0	0,7	15
3 район	0,2	0,7	0,8	0,2	9
b_j	5	14	7	8	34 / 34

ЗУР трябва да се разпределят по направленията така, че математическото очакване за броя на свалените самолети да е максимално.

4. МРЕЖОВА ПОСТАНОВКА НА ТРАНСПОРТНАТА ЗАДАЧА

При транспортните задачи, които разглеждахме досега, се предполагаше, че от всеки пункт за производство до всеки потребител може да се достигне само по един път (маршрут). Стойностите на транспортните разноски се задаваха таблично или чрез матрицата

$$C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdot & \cdot & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdot & \cdot & c_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{m_1} & c_{m_2} & \cdot & \cdot & c_{mn} \end{pmatrix},$$

поради което тази постановка на транспортната задача се нарича матрична. При нея не са възможни превози между пунктовете за производство или от потребителите до тях. Ако обаче погледнем реално на съществуващата пътна или железопътна мрежа, по която се извършват транспортните превози, става ясно, че за повечето от пунктовете е възможно през тях да преминават транспортни товари за други пунктове, възможно е пътят от един пункт за производство до някой

пункт за потребление да преминава през други пунктове как; то за производство, така и за потребление.

Такава постановка на транспортната задача се нарича мрежова, или транспортна задача на транспортна мрежа.

Преди да формулираме общата постановка на таза задача, нека дадем определение на понятието транспортна мрежа.

Под транспортна мрежа се разбира съвкупност от пунктове P_1, P_2,..., P_k, някои от които са съединени с отсечки k_{ij}. Пунктовете се наричат върхове на мржата, а съединяващите. отсечки — звена на мрежата.

Съществуването на звено k_{ij} означава, че между пунктовете P_i и P_j може да се извършват превози. Ако са възможни превози само от P_i до P_j, но не и обратно, звеното k_{ij} се означава с насочена отсеча. Във всеки връх P_i на транспортната мрежа се записва числото P_i, което означава обема на производството или потреблението в съответния пункт. За пунктовете на производството числата P_i са положителни, за пунктовете на потребление — отрицателни, а за междинните пунктове — нули. За всяко звено k_{ij} са известни стойностите на транспортните разноски c_{ij}, които в зависимост от избрания критерий може да бъдат стойностите на транспортните разходи, вероятностите или времената за доставяне. Ако $c_{ij}=c_{ji}$, транспортната мрежа се нарича симетрична. Съществуват ли ограничения в пропускателните способности на звената, за всяко звено k_{ij} се задава и числото d_{ij}, което означава максималното количество товари, което може да се превози по съответното звено.

Ако сумата от количествата продукция в пунктовете за производство (положителните p_i) е равна на сумата от количествата продукция в пунктовете на потребление (отрицателните p_i), задачата е балансирана.

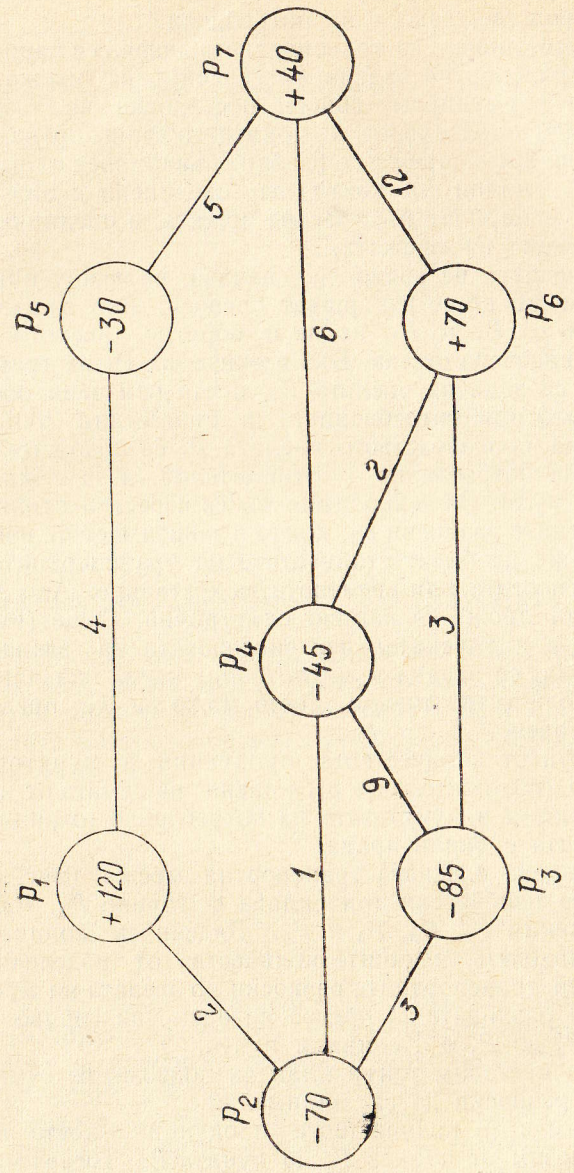
Нека е дадена следната транспортна мрежа (фиг. 2.3.1):

На нея са изобразени три склада с гориво P_1, P_6, P_7 и четири поделения P_2, P_3, P_4 и P_5. Дадени са количествата гориво в складовете, исканите количества от поделенията и стойностите на транспортните разноски по звената на мрежата.

Например разходите за превоз на един тон гориво от P_1 до P_5 и от P_5 до P_1 е 4 единици и т.н.

Трябва да съставим такъв план за подвоза, че сумарните транспортни разноски да са минимални.

Да означим с x_{ij} количеството продукция, което планираме да превозим от пункта P_i до пункта P_j. Тогава математическият модел на задачата е следният:



Фиг. 2.3.1

Да се намери минималната стойност на линейната функция

$$L(X)=\sum_{i}\sum_{j} c_{ij}\, x_{ij}$$

при следните ограничаващи условия:

$$\sum_{j\in A_i} x_{ij}-\sum_{j\in B_i} x_{ij}=P_i,\quad i=1,\ 2,\ldots,k,$$

$$x_{ij}\geq 0.$$

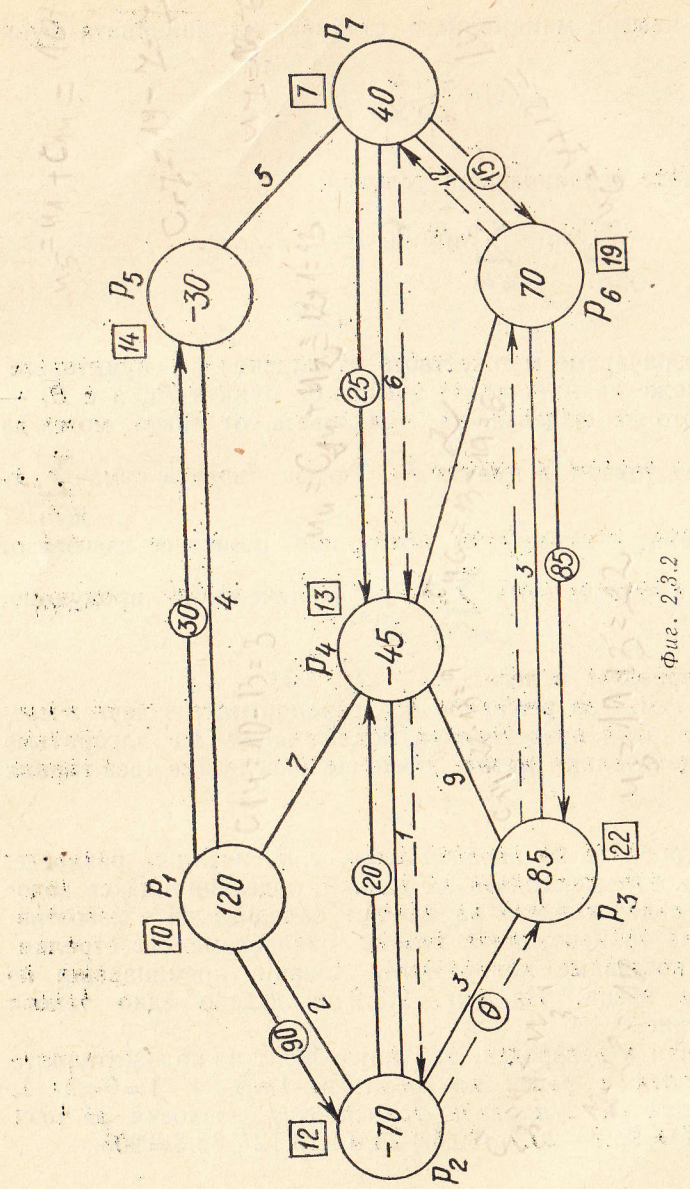
С A_i означаваме множеството от индекси на пунктовете, в които може да пристигнат товари от пункта P_i, а с B_i — множеството от индекси на пунктовете, от които може да се доставят товари в пункта P_i. Тогава първата сума $\sum_{j\in A_i} x_{ij}$ представлява количеството продукция, която се извозва от пункт P_i, а втората сума $\sum_{i\in B_i} x_{ij}$ — количеството продукция, която се превозва в него.

Алгоритъмът за решаване на транспортните задачи в мрежова постановка прадставлява модификация на алгоритъма на разпределителния метод, която ще разгледаме чрез горния пример.

1. Построяване на начален план, т. е. начално разпределение, за което исканията на всички поделения да са задоволени и съдържанието на всички складове да е извозено. Посоките на транспортните потоци означаваме със стрелки на които поставяме количествата товари, преминаващи по съответните звена. На фиг. 2.3.2 е дадено едно такова разпределение.

Този план е неизроден, тъй като броят на положителните му компоненти е равен на $6=m+n-1=3+4-1=6=k-1$.

Стойността на сумарните транспортни разноски за този план е $L(X)=90.2+20.1+30.4+25.6+15.12+85.3=905$.



Фиг. 2.3.2

2. Проверка на плана за оптималност. При алгоритъма на разпределителния метод проверката на плана за оптималност се извършва по следния начин. Съставяме системата $u_i+v_j=c_{ij}$ за $x_{ij}>0$ и от нея определяме потенциалите u_i и v_j, като един от тях избираме произволно. След това пресмятаме числата $\bar{c}_{ij}=u_i+v_j$ за $x_{ij}=0$ и разликите $\bar{c}_{ij}-c_{ij}$ за $x_{ij}=0$. Ако всички разлики са отрицателни, при търсене на минимума планът е оптимален, а ако не са — преминаваме към подобряването му.

Тук правим следните изменения. Означаваме v_j с $-u_j$ и от системата

$$u_i=c_{ij}+u_j$$

при условие, че някое u_j е избрано произволно, определяме потенциалите на всички останали върхове. Стойностите на c_{ij} вземаме със знак плюс, ако посоката на товара е от P_j към P_i, и със знак минус, ако е обратна. Потенциалите записваме в квадратчета до върховете на транспортната мрежа.

Нека за нашия пример изберем $u_1=10$. Тогава $u_5=u_1+c_{15}=10+4=14$, $u_2=10+2=12$, $u_4=12+1=13$, $u_7=13-6=7$, $u_6=7+12=19$, $u_3=u_6+c_{63}=19+3=22$.

Пресмятаме числата

$$\bar{c}_{ij}=|u_i-u_j| \text{ за } x_{ij}=0.$$

Вземаме абсолютната стойност на разликата u_i-u_j, тъй като транспортната мрежа е симетрична

$$\bar{c}_{23}=|12-22|=10;$$
$$\bar{c}_{34}=|22-13|=9;$$
$$\bar{c}_{46}=|13-19|=6;$$
$$\bar{c}_{14}=|10-13|=3;$$
$$\bar{c}_{57}=|14-7|=7.$$

Определяме разликите $\bar{c}_{ij}-c_{ij}$ за $x_{ij}=0$:

$$\bar{c}_{23}-c_{23}=10-3=7;$$
$$\bar{c}_{34}-c_{34}=9-9=0;$$
$$\bar{c}_{16}-c_{46}=6-2=4;$$
$$\bar{c}_{14}-c_{14}=3-7=-4;$$
$$\bar{c}_{57}-c_{57}=7-5=2.$$

Планът не е оптимален, тъй като разликите $\bar{c}_{23}-c_{23}$, $\bar{c}_{46}-c_{46}$ и $\bar{c}_{57}-c_{57}$ са положителни.

3. Подобряване на плана. Планът се подобрява за звеното, на което съответната разлика е положителна. Когато условието за оптималност се нарушава за повече звена, взема се онова, за което разликата $\bar{c}_{ij}-c_{ij}$ има най-голяма стойност. В разглежданията пример такова звено е P_2P_3. Нека товар по него x_{23} приемем равен на θ. След това намираме затворен контур, състоящ се от това звено и звена с транспортни потоци. В случая той е съставен от звената k_{23}, k_{33}, k_{67}, k_{74} и k_{42}.

Като се движим по затворения контур в посока от P_2 към P_3, определяме звеното с най-малък насрещен поток. Приемаме θ равно на това число. В случая това е звеното k_{76} с поток $x_{76}=15$ единици, следователно $x_{23}=\theta=15$.

Изваждаме величината θ от всички насрещни потоци и я прибавяме към потоците, чиито посоки съвпадат с посоката на контура. Така получаваме новия план (фиг. 2.3.3).

Стойността на сумарните транспортни разноски е

$$L(X)=90.2+5+3.15+70.3+40.6+30.4=800.$$

За новия план повтаряме пресмятанията, като започваме от точка 2 на алгоритъма.

Нека изберем потенциала на върха P_7, равен на 15, т. е. $u_7=15$. Тогава $u_1=15+6=21$, $u_2=21-1=20$, $u_3=20+3=23$, $u_6=23-3=20$, $u_1=20-2=18$, $u_5=18+4=22$.

Пресмятаме $\bar{c}_{ij}=(u_i-u_j)$ за $x_{ij}=0$ и след това разликите $\bar{c}_{ij}-c_{ij}$ за $x_{ij}=0$:

$$\bar{c}_{14}=|u_1-u_4|=|18-21|=3;\ \bar{c}_{14}-c_{14}=3-7=-4<0;$$

$$\bar{c}_{34}=|u_3-u_4|=|23-21|=2;\ \bar{c}_{34}-c_{34}=2-9=-7<0;$$

$$\bar{c}_{46}=|u_4-u_6|=|21-20|=1;\ \bar{c}_{46}-c_{46}=1-2=-1<0;$$

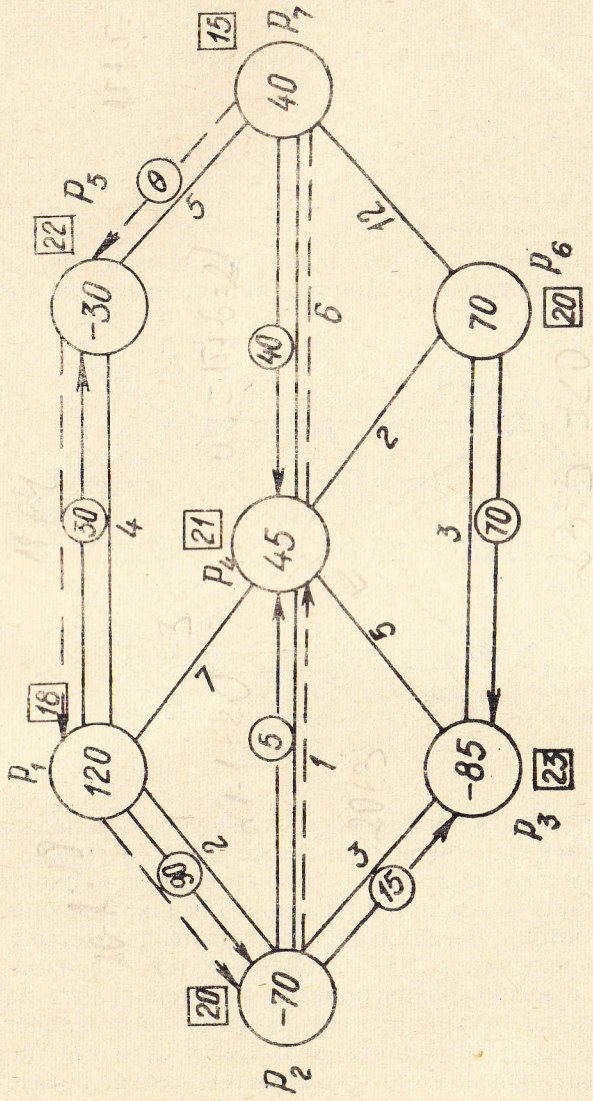
$$\bar{c}_{67}=|u_6-u_7|=|20-15|=5;\ \bar{c}_{67}-c_{67}=5-12=-7<0;$$

$$c_{57}=|u_5-u_7|=|22-15|=7;\ \bar{c}_{57}-c_{57}=7-5=2>0.$$

Подобряваме плана за звеното k_{75}. Построяваме затворен контур и определяме $x_{75}=\theta=30$.

Новият план е даден на фиг. 2.3.4.

$$L(X)=120.2+35.1+15.3+3.70+6.10+30.5=740.$$



Фиг. 2.3.3

Определяме потенциалите на върховете на транспортната мрежа, като избираме $u_2=15$. Тогава $u_1=13$, $u_3=18$, $u_1=16$, $u_5=15$, $u_7=10$, $u_6=15$.

Пресмятаме $\bar{c}_{ij}=|u_i-u_j|$ и $\bar{c}_{ij}-c_{ij}$ за $x_{ij}=0$:

$\bar{c}_{11}=3$; $\bar{c}_{14}-c_{14}=3-7=-4$;

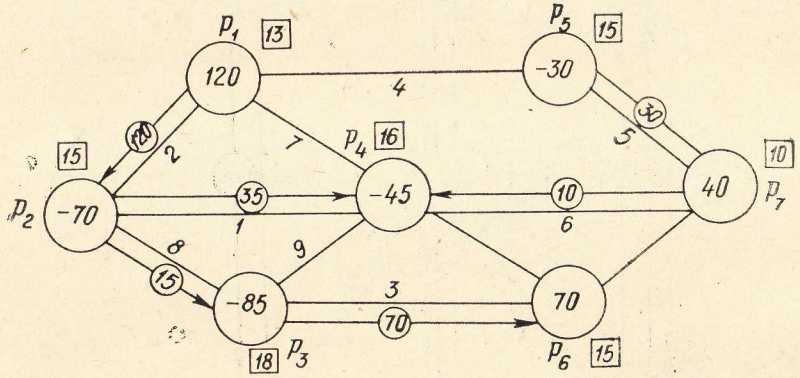
$\bar{c}_{43}=2$; $\bar{c}_{43}-c_{43}=2-9=-7$;

$\bar{c}_{45}=1$; $\bar{c}_{45}-c_{45}=1-2=-1$;

$\bar{c}_{75}=5$; $\bar{c}_{75}-c_{75}=5-12=-7$;

$\bar{c}_{16}=2$; $\bar{c}_{16}-c_{16}=2-4=-2$.

Всички разлики са отрицателни, което означава, че намереният план е оптимален. Минималните транспортни разноски са равни на 740.



Фиг. 2.3.4

И при мрежовата постановка на транспортната задача, както при матричната, някой план може да е изроден, т.е. да съдържа по-малко от $m+n-1$ положителни компоненти. Тогава, за да определим потенциалите на всички върхове, един от нулевите потоци, съединяващ пункт на производство с пункт за потребление, считаме за безкрайно малък, т.е. за ненулев. С това вече е възможно да определим потенциалите на всички върхове и да извършим проверката за оптималност.

Ако задачата не е балансирана, т.е. в случаите, когато в пунктовете за производство (складовете) имаме повече продукция, отколкото са исканията на потребителите, въвеждаме фиктивен потребител, който свързваме с всички складове, като транспортните разноски по тези звена приемаме равни на

нула. Ако в складовете има по-малко продукция, отколкото са исканията на поделенията, въвеждаме фиктивен склад, в който поставяме толкова продукция, колкото не достига, свързваме го с всички потребители и по звената поставяме нулеви транспортни разноски. След това и в двата случая решаваме балансираната задача.

Трябва да отбележим, че от мрежовата постановка на транспортната задача може да се премине към матрична, но трябва предварително да се определи най-краткият маршрут от всеки склад до всеки потребител. Освен това значително се увеличават размерите на таблицата и обемът на пресмятанията.

При мрежовата постановка подготовката на изходните данни и решаването на задачата изискват по-малко време.

Друго предимство на мрежовата постановка на транспортната задача е, че тя е много по-реален модел на операциите по превозите и снабдяването от матричната.

За решаването на транспортни задачи чрез мрежи може да се използуват всички методи за решаване на транспортни задачи в матрична форма. Тези алгоритми се решават лесно на ЕИМ, което прави възможно решаването на транспортни задачи с доста големи размери на транспортните мрежи.

5. ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА ПО КРИТЕРИЯ ВРЕМЕ

При разгледаните досега задачи от транспортен и разпределителен тип обикновено търсехме такъв план за превоза или за разпределение на средствата за поразяване по противниковите обекти, който минимизира стойността на транспортните разноски или максимизира математическото очакване за броя на поразените цели.

Много често във военното дело е необходимо да се намери план за превоза, който да се реализира за най-малко време. Такива са преди всичко задачите по превоза на боеприпаси или гориво, когато времето за снабдяването на подразделенията с боеприпаси е от решаващо значение, а стойността на превоза играе второстепенна роля.

Най-общата постановка на тези задачи е следната: В m склада A_1, A_2, ...,A_m има определен вид еднородна продукция в количества съответно a_1, a_2, ..., a_m единици и тя трябва да се превози до n поделения (пунктове на потребление) B_1, B_2,..., B_n, които желаят съответно по b_1, b_2, ..., b_n единици от нея.

Известни са величините t_{ij} — времето за превоз на продукцията от склад A_i до поделение B_j.

Трябва да се състави такъв план за превоза $X=(x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n}, x_{2n}, \ldots, x_{nn})$, който да се реализира за минимално време.

Следва да се отбележи, че тук търсим план, който да се реализира за най-кратко време, т.е. времето от началото на операцията снабдяване до завършването ѝ да е най-малко, а не такъв, за който сумарните транспортни разноски да са минимални.

Да предположим, че задачата е балансирана, т. е.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{i=1}^{n} b_j.$$

Да означим с t_x времето, необходимо за реализиране на плана X. Тогава

$$t_x = \max_{x_{ij}>0}\{t_{ij}\}_x,$$

където $\{t_{ij}\}_x$ са времената, съответстващи на положителните компоненти на плана X.

Минималното време за подвоза T е равно на

$$\min_X \max_{x_{ij}>0}\{t_{ij}\}_x.$$

Математическият модел на задачата е:

Да се определи $T=\min_X \max_{x_{ij}>0}\{t_{ij}\}_x$

при следните условия:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i;\ i=1, 2, \ldots, m.$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j,\ j=1, 2, \ldots, n;$$

$$x_{ij} \geq 0,\ i=1, 2, \ldots, m;\ j=1, 2, \ldots, n.$$

В този случай целевата функция не е линейна и не може да се реши чрез разглежданите досега методи.

И при транспортните задачи по критерия време е удобно условията да се записват в таблици от разглеждания вече вид, като на мястото на c_{ij} се поставят величините t_{ij} (таблица 2.3.20).

Таблица 2.3.20

Склад \ Подел.	B_1	B_2	. . . . .	B_n	a_i
A_2	$t_{.}$	t_{12}	. . .	t_{1n}	a_1
A_2	$t_{.1}$	t_{22}	. . .	t_{2n}	a_2
. . .			. . . . .	. . .	. . .
A_m	t_{m1}	t_{m2}	. . .	t_{mn}	a_m
b_i	b_1	b_2	. . .	b_u	Σa_i / Σb_j

Алгоритъмът за решаване на транспортните задачи по критерия време, както и алгоритъмът на разпределителния метод включва в себе си построяването на начален опорен план, проверката за оптималност и подобряването му, ако е възможно.

Началният опорен план се построява или по метода на северозападния ъгъл, или по някой от методите за предпочитание.

Проверката на плана за оптималност и подобряването му се извършват по следния начин:

Определяме максималното t'_{ij} за клетките с положителни стойности на плана $t'_{ij}=\max_{x_{ij}>0}\{t_{ij}\}$. Нека x_{ij} е компонентата на плана, съответстваща на t_{ij}.

Зачертаваме всички квадратчета в таблицата, за които $t_{ij} \geq t'_{ij}$.

Построяваме контур с начало квадратчето, в което стои t_{ij}. Всички незачертани квадратчета може да служат за върхове на контура, по които поставяме знаците „+“ и „—“, като започваме с минус и циклично ги сменяме. Върховете, които имат знак минус по контура, трябва да са в пълни квадратчета, за които стойностите на x_{ij} са по-големи от x'_{ij}.

Ако такъв контур не е възможен, планът е оптимален. Ако е възможен, преминаваме към построяване на нов план, който се получава, като към стойностите на x_{ij}, стоящи в квадратчетата със знак плюс по контура, прибавяме x'_{ij}, а от стойностите на x_{ij}, стоящи в квадратчетата със знак минус по контура, изваждаме x'_{ij}.

Да разгледаме алгоритъма със следния пример: Да се снабдят с боеприпаси пет поделения от три склада. Броят на машините с боеприпаси в складовете, броят на машините с боеприпаси, необходими на поделенията, и времената за достигане от всеки склад до всяко поделение са дадени в таблица 2.3.21.

Таблица 2.3.21

Склад	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
A_1	2	4	4	3	2	70
A_2	1	5	6	6	9	80
A_3	13	4	10	6	10	90
b_j	20	60	70	50	40	240 / 240

Да се състави план за превоза, който да се реализира за най-малко време.

Построяваме начален план по метода на северозападния ъгъл (таблица 2.3.22).

Определяме $t_x = t'_{ij} = \max\limits_{x_{ij}>0}\{t_{ij}\} = 10$, $x'_{ij} = x_{35} = 40$. Зачертаваме квадратчетата (3,1) и (3,3), защото $t_{31} = 13 > 10$ и $t_{33} = 10 = 10$. Построяваме контур с начало квадратчето (3,5), извършваме подобряване на плана и получаваме таблица 2.3.23.

Определяме $t_x = t'_{ij} = \max\limits_{x_{ij}>0}\{t_{ij}\} = 8$, $x'_{ij} = x_{15} = 40$.

Зачертаваме квадратчетата (2,4) и (3,5), защото $t_{24} = 9 > 8$ и $t_{35} = 10 > 8$.

Таблица 2.3.22

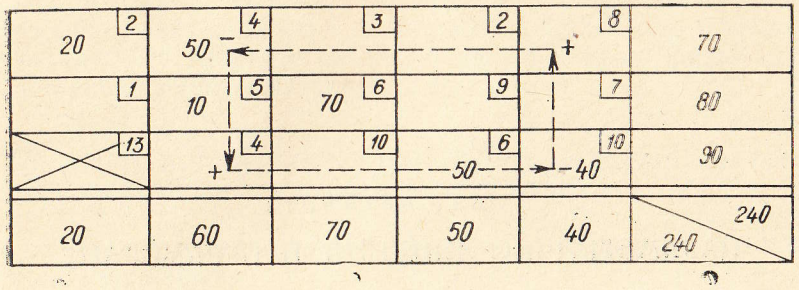


Таблица 2.3.23

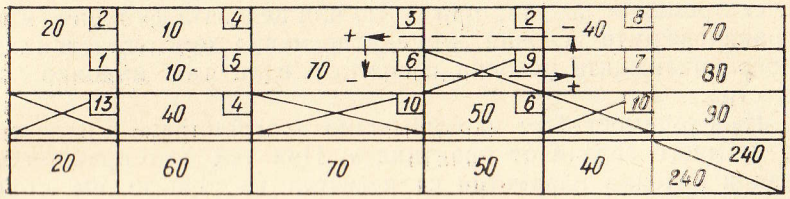
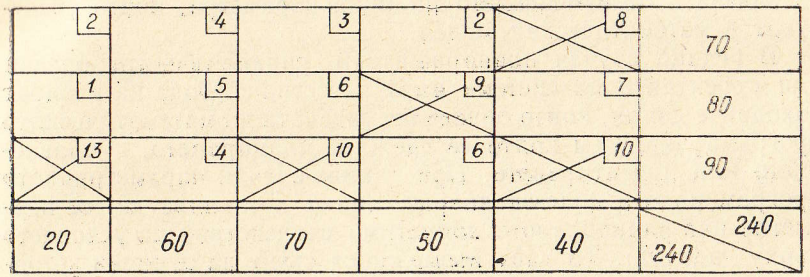


Таблица 2.3.24



Построяваме контур с начало квадратчето (1,5), извършваме подобряване на плана и получаваме таблица 2.3.24.

Определяме $t_x = 7$; $x'_{ij} = 40$. Зачертаваме квадратчето (1,5), понеже $t_{15} = 8 > 7$. Тъй като не е възможно вече да се построи контур с начало квадратчето (2,5), това е оптималният план. Минималното време е

$$T = \min_X t_x = \min(10, 8, 7) = 7.$$

Глава четвърта

ПАРАМЕТРИЧНО ЛИНЕЙНО ПРОГРАМИРАНЕ

Параметричното програмиране е частен случай от математическото програмиране. То изучава методите за решаване на екстремални задачи, при които или целевата функция, или ограничаващите условия, или едновременно целевата функция и ограничаващите условия зависят от един или няколко параметра.

Необходимостта от параметрично програмиране е наложена от много задачи от практиката. При тях като правило за редица изходни параметри са известни не точните им стойности, а някои възможни интервали на изменението им. Затова често пъти единствената възможност да се обоснове едно или друго решение е да се изучи зависимостта на оптималния план на задачата от изменението на някои параметри, които участвуват в математическия модел.

В редица случаи планиращите и управляващите органи или проектанти на системи имат известна свобода да избират изходните данни, които определят задачата на математическото програмиране, към която се свеждат планирането, управлението или проектирането. При такива случаи параметричното програмиране е полезен апарат, който позволява да се пресметне най-рационалното допустимо въздействие на условието върху задачата. То дава възможност също да се оцени устойчивостта на решенията на задачите на математическото програмиране по отношение на случайни грешки в изходните данни, при които се решава задачата. Непосредствено с оценката на устойчивостта е свързан и въпросът за чувствителността на решенията на задачите от условието на задачата.

Нека разгледаме линейното параметрично програмиране. Знаем, че при съставяне на математическия модел на задачата на линейното програмиране участвуват три числени величи-

ни — елементите на матрицата A, компонентите на целевия вектор C и компонентите на вектора на ограниченията B. Те може да зависят от един или повече параметри. Ако зависят линейно от един параметър, задачата е от линейно параметрично програмиране. Първите работи по линейно параметрично програмиране принадлежат на С. Гас и Саати.

1. СЛУЧАЙ, КОГАТО КОМПОНЕНТИТЕ НА ЦЕЛЕВИЯ ВЕКТОР ЗАВИСЯТ ЛИНЕЙНО ОТ ЕДИН ПАРАМЕТЪР (СЛУЧАЙ $C=C'+tC''$)

Математическият модел на задачата е: Дадени са за всяко $t \in [\alpha, \beta]$ функцията

$$L(X_t)=\sum_{j=1}^{n}(c_j'+t\,c_j'')x_j \tag{2.4.1}$$

и системата ограничаващи условия

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\,x_j=b_i,\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ m, \tag{2.4.2}$$

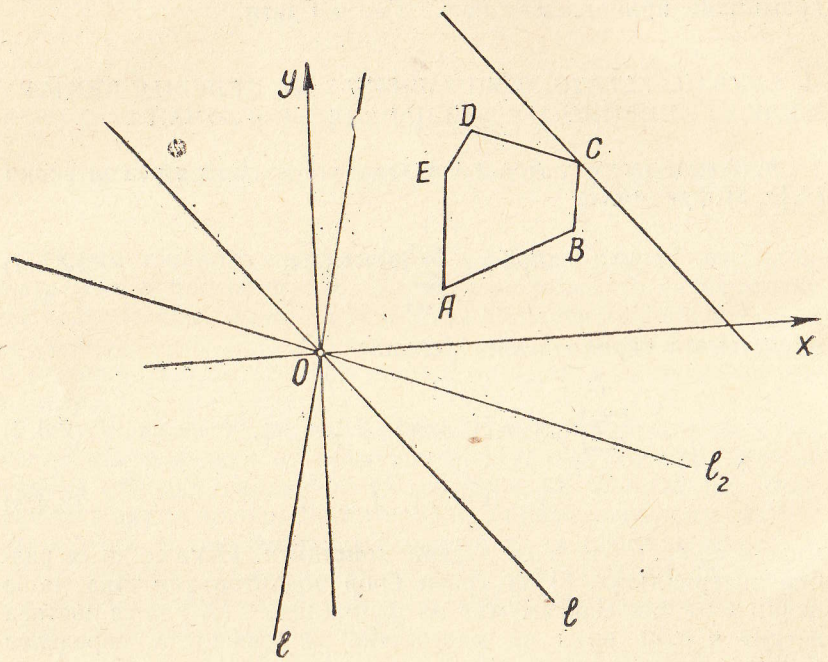
$$x_j \geq 0,\quad j=1,\ 2,\ldots,\ n, \tag{2.4.3}$$

където c_j', c_j'', a_{ij} и b_i са дадени константи. Иска се да се разбие интервалът $[\alpha, \beta]$ на краен брой подинтервали така, че за всяко t от тях максимумът на функцията $L(X_t)$ да се достига в един и същ връх на многостена на решенията, определен от условията (2.4.2) и (2.4.3).

За да изясним по-добре същността на задачата, преди да разгледаме алгоритъма за нейното решение, нека дадем геометричната ѝ интерпретация в двумерното пространство. Ако разглеждаме задача на линейното програмиране, нейните условия определят изпъкнал многоъгълник (фиг. 2.4.1). Нека линейната функция достига екстремалната си стойност в точка C. Но върхът C остава оптимален и когато заменим правата l с произволна права между правите $l_1 \| BC$ и $l_2 \| CD$.

Ако коефициентите на целевата функция зависят от параметъра t, тогава правата l съответствува на една начална стойност $t=t_0$, а правите l_1 и l_2 — на стойности на параметъра t, съответно $t=t_1$ и $t=t_2$. За всяко $t_1<t<t_2$ оптималното решение на задачата съответствува все на върха C на многоъгълника на решенията, т. е. на оптималното решение за $t=t_0$. Ако па-

раметърът t се изменя, като напусне интервала (t_1, t_2), при $t=t_2$ получаваме $l_2 \| CD$, следователно съответната задача на линейното програмиране има безброй много решения (техен геометричен образ е ръбът CD от многоъгълника на решенията). Следващото произволно малко изменение на параметъра опре-



Фиг. 2.4.1

деля задача с нов оптимален план, геометричен образ на който е върхът D. Този връх остава оптимален при изменението на t в интервала (t_2, t_3), където t_3 е стойност на параметъра, съответстваща на права $l_3 \| DE$.

Ако продължаваме така описания процес, интервалът $[\alpha, \beta,]$ в който се изменя параметърът t, се разбива на краен брой подинтервали, всеки от които съответствува на фамилия линейни форми, достигащи максималните си стойности в един и същ връх на многоъгълника, определен от условията на задачата. За нейното решаване можем да използуваме следния алгоритъм, всяка интеграция на който се състои от два етапа:

1. Решаваме задачата на линейното програмиране при ограничения (2.4.2) и (2.4.3) и целева функция, получена от (2.4.1) при някоя фиксирана стойност t_0 на параметъра $t \in [\alpha, \beta]$, т.е. намираме съответния връх от многостена на решенията, в който се достига $\max L(X_{t_0})$.

2. Определяме подмножествата за всички значения на параметъра t, за които целевата функция $L(X_t)$ достига съответно максимум в получения връх на многостена на решенията.

Допускаме, че разглежданата задача не е изродена и че сме намерили опорен план на системата (2.4.2) и (2.4.3). Приемане за удобство $t=t_0=\alpha$ и от (2.4.1) получаваме целевата функция

$$L(X_\alpha)=\sum_{j=1}^{n}(c_j'+\alpha c_j'')x_j \qquad (2.4.4)$$

с постоянни коефициенти. Решаваме задачата за намиране максимума на линейната функция (2.4.4) по симплексния метод при условия (2.4.2) и (2.4.3). Възможни са следните два случая:

а. Намираме максимума на линейната форма $L(X_\alpha)$.

б. Линейната форма $L(X_\alpha)$ е неограничена отгоре.

Случай а. Нека $\max L(X_\alpha)<\infty$, т. е. при решаването сме получили симплексна таблица, в която всички разлики

$$\Delta_j=z_j-c_j \geq 0, \ (j=1, 2, \ldots, n).$$

Намираме множеството от всички стойности на параметъра t, за който $\max L(X_\alpha)$ се получава в същия връх на многостена на решенията, в който се достига $\max L(X_\alpha)$. То се състои само от тези значения на параметъра t, за които в последната симплексна таблица $\Delta_j=z_j-c_j \geq 0$, $j=1, 2, \ldots, n$. Но коефициентите на линейната форма на разглежданата задача са $c_j=c_j'+tc_j''$, следователно за произволен базис разликата $\Delta_j=z_j-c_j=p_j+tq_j$, $j=1, 2, \ldots, n$ е линейна функция на t.

Множеството от стойности на параметъра t, за които оптималното решение на задачата съвпада с полученото при $t=\alpha$, се състои от тези стойности на параметъра t, за които коефициентите $\Delta_j(t)$ от индексния ред на последната симплексна таблица са неотрицателни, т. е.

$$\Delta_j(t)=p_j+t\,q_j \geq 0, \ j=1, 2, \ldots, n.$$

Тъй като при $t=\alpha$ е получен оптимален план на задачата (разглеждаме случай *а*), това означава, че системата

$$p_j+t\,q_j\geq 0,\ j=1,\ 2,\ldots,\ n \qquad (2.4.5)$$

е съвместима (едно нейно решение е $t=\alpha_0$)

Ще докажем, че търсеното множество от стойности на параметъра t удовлетворява неравенствата

$$\alpha_1\leq t\leq\alpha_2,$$

където

$$\alpha_1=\begin{cases}\max\limits_{q_j>0}\left(\dfrac{p_j}{q_j}\right), \text{ако съществува } q_j>0;\\ -\infty, \text{ако всички } q_j\leq 0;\end{cases}$$

$$\alpha_2=\begin{cases}\min\limits_{q_j<0}\left(-\dfrac{p_j}{q_j}\right), \text{ако съществува } q_j<0;\\ +\infty, \text{ако всички } q_j\geq 0.\end{cases}$$

Наистина, ако измежду коефициентите q_j, $j=1,\ 2,\ldots,\ n$ има както отрицателни, така и положителни, от системата неравенства (2.4.5) за всички $q_j>0$ имаме

$$t\geq-\frac{p_j}{q_j} \text{ и следователно } \alpha_1=\max_{q_j>0}\left(-\frac{p_j}{q_j}\right)$$

и за всички $q_j>0$ получаваме

$$t\leq-\frac{p_j}{q_j} \text{ и следователно } \alpha_2=\min_{q_j<0}\left(-\frac{p_j}{q_j}\right).$$

Ако всички q_j имат един и същ знак при $q_j\leq 0$ и $j=1,\ 2,\ldots,\ n$, всички стойности, за които е съвместима системата (2.4.5), са неограничени отдолу и следователно $\alpha_1=-\infty$.

Ако всички $q_j\geq 0$, $j=1,\ 2,\ldots,\ m$, всички стойности, за които е съвместима системата (1,5), са неограничени отгоре и следователно $\alpha_2=+\infty$. Интересуват ни само тези от получените стойности на параметъра t, които принадлежат на интервала $[\alpha,\ \beta]$. Решението на задачата (2.4.1) — (2.4.3) при $t=\alpha$ съвпада с оптималните ѝ планове за всяко $t\in[\alpha_1,\ \alpha_2]$. При $\alpha_1<\alpha$ и $\alpha_2>\beta$ оптималният план за $t=\alpha$ е решение на задачата.

Нека $\alpha_2<\beta$. Да анализираме задачата (2.4.1) — (2.4.3) за $t>\alpha_2$.

Да отбележим с k индекса, при който се получава α_2, т. е.

$$\alpha_2=\min_{q_j<0}\left(-\frac{p_j}{q_j}\right)=-\frac{p_k}{q_k},\ q_k>0.$$

Тук са възможни два случая:

1. В k-тия стълб на последната таблица всички $x_{ik}\leq 0$. Тогава при $t>\alpha_2$ коефициентът $\Delta_k(t)<0$, следователно целевата функция е неограничена отгоре. В този случай, ако $\alpha_1<\alpha$, изчислителният процес приключва. Оптималното решение на задачата за всяко $t\in[\alpha_1,\ \alpha_2]$ съвпада с полученото при $t=\alpha$, а за интервала $(\alpha_2,\ \beta)$ целевата функция е неограничена.

2. В k-тия стълб има поне едно положително x_{i1}. Като използуваме симплексния метод, въвеждаме в базиса вектора P_k и изключваме вектора P_r, за който

$$\frac{x_{r0}}{x_{rk}}=\min_{x_{ik}>0}\frac{x_{i0}}{x_{ik}},\ x_{rk}>0.$$

В този случай повтаряме пресмятанията по алгоритъма, но с целевата функция $L(X_{\alpha_2})$ вместо с $L(X_\alpha)$, преминаваме към съседен връх на многостена на решенията (случай *а*) или се убеждаваме в неограничеността на целевата функция (случай *б*).

Така изследването на параметричната задача при $t>\alpha_2$ се състои в преминаване от един интервал на изменение на параметъра t към друг, докато се определи такъв, който съдържа β.

Случай б. Нека $\max L(X_\alpha)=\infty$, т. е. при решаването сме дошли до симплексна таблица, в чийто индексен ред има отрицателно число и всички коефициенти на стълба, в който се намира това число, са неположителни. Нека

$$\Delta_k=p_k+\alpha q_k<0;$$
$$x_{ik}\leq 0,\ i=1,\ 2,\ldots,\ m. \qquad (2.4.6)$$

Възможни са следните случаи:

1. Ако $q_k=0$, условията (2.4.6) са изпълнени за всяка стойност на параметъра t и следователно целевата функция на задачата (2.4.1) — (2.4.3) е неограничена за всяко $t\in(\alpha,\ \beta]$, т. е. задачата няма решение.

2. Ако $q_k>0$, от (2.4.6) получаваме

$$t<-\frac{P_k}{q_k}=t_1,$$

следователно условията (2.4.6) са изпълнени за всяко $t\in[\alpha,\ t_1]$ и в този интервал функцията $L(X_t)$ е неограничена. За изследване на задачата при $t>t_1$ трябва да повторим описания процес, като вместо интервала $[\alpha,\ \beta]$ разглеждаме интервала $[t_1,\ \beta]$.

3. Ако $q_k<0$, условията (2.4.6) са изпълнение за всяко $t>t_1$, следователно целевата функция е неограничена отгоре за всяко $t\in[t_1, \beta]$. Анализът на задачата за $t<t_1$ се извършва също чрез повтаряне на целия процес за интервала $[\alpha, t_1]$, като се започва с решаване на задачата при $t=t_1$.

Така след краен брой итерации задачата е решена, тъй като на всеки етап или се получава интервал за всички значения на t, за които решението е оптимално, или се получава интервал, в който целевата функция е неограничена. На първата възможност съответствува връх, а на втората — ръб на многостена на решенията, но те са краен брой и не може да се повторят.

2. СЛУЧАЙ, КОГАТО КОМПОНЕНТИТЕ НА ВЕКТОРА НА ОГРАНИЧЕНИЯТА ЗАВИСЯТ ЛИНЕЙНО ОТ ЕДИН ПАРАМЕТЪР (СЛУЧАЙ $B=B'+tB''$)

Формулировката на задачата е: Да се намери минимумът на линейната форма

$$L(X_t)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{2.4.7}$$

при следните условия:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i \geq b_i'+t\, b_i'',\ i=1,\ 2,\ldots,\ m; \tag{2.4.8}$$

$$x_j\geq 0,\ j=1,\ 2,\ldots,\ n. \tag{2.4.9}$$

Решението на тази задача може да се сведе към разглеждания случай в точка 1, като се премине към двойствената ѝ задача. Тогава компонентите на вектора на ограничението стават коефициенти на целевата функция. Двойствената задача се формулира така:

Да се намери максимумът на линейната форма

$$U=\sum_{i=1}^{m}(b_i'+tb_i'')y_i \tag{2.4.10}$$

при следните условия:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\, y_i \leq c_j,\ j=1,\ 2,..,\ n; \tag{2.4.11}$$

$$y_i\geq 0,\ i=1,\ 2,\ldots,\ m. \tag{2.4.11}$$

3. ОБЩ СЛУЧАЙ

Да разгледаме общата задача на линейното параметрично програмиране. При нея коефициентите на целевата функция, компонентите на векторите на условието и на вектора на ограничението зависят линейно от един параметър $t\in[\alpha, \beta]$. Задачата се формулира така:

Да се намери максимумът на линейната форма

$$L(X_t)=\sum_{j=1}^{n}(c_j'+tc_j'')x_j \tag{2.4.12}$$

при следните условия:

$$\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}'+ta_{ij}'')x_j=b_i'+tb_i'' \tag{2.4.13}$$

и

$$x_j\geq 0. \tag{2.4.14}$$

Използването на симплексния метод за анализ на тази задача е свързано с много затруднения. Изчислителният процес е извънредно трудоемък и на него няма да се спираме, тъй като и в практиката се срещат преди всичко някои частни случаи, за които са разработени и по-прости алгоритми.

Пример. За всяко $t\in[0, \infty]$ да се намери максимумът на линейната функция

$$L(X_t)=(2-7t)x_1+3x_2+(6+t)x_3+(3+2t)x_4$$

при следните условия:

$$\begin{cases} 2x_1-\ x_2+\ x_3+2x_4\leq 1\\ 2x_1+\ x_2+\ x_3+\ x_4\leq 2\\ -x_1+8x_2-2x_3-3x_4\leq 3 \end{cases}$$

и

$$x_j\geq 0,\ j=1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

Въвеждаме допълнителни неотрицателни променливи и привеждаме задачата в каноничен вид.

За всяко $t \in [0, \infty)$ да се намери максимумът на линейната форма $L(X_t)$, при условие че:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_6 = 2 \\ -x_1 + 8x_2 - 2x_3 - 3x_4 + x_7 = 3 \end{cases}$$

и

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, 7.$$

Изчислителния процес започваме с решаването на задачата при $t=0$ по симплексния метод. Решението е дадено на таблица 2.4.1. След третата итерация получаваме оптималното решение

$$X^0 = (0, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 0, 0, 0, 2).$$

Максималната стойност на целевата функция е $L(X_0) = \frac{21}{2}$.

При третата итерация, при която е получен оптимален план, въвеждаме двата допълнителни реда q_j и $-\frac{p_j}{q_j}$. При по-първите итерации е необходим само редът $p_j = \Delta_j(0)$.

В реда $-\frac{p_j}{q_j}$ имаме

$$\max_{q_j > 0} \left(-\frac{p_j}{q_j} \right) = -\frac{10}{9},$$

съответстващ на вектора P_1, а

$$\min_{q_j < 0} \left(-\frac{p_j}{q_j} \right) = 9$$

съответствува на вектора P_4. Следователно намереното оптимално решение при $t=0$ остава решение на задачата за всяко t от интервала $\left[-\frac{10}{9}, 9 \right]$. Понеже ни интересува решение в интервала $[0, \infty]$, намереното решение в интервала $[0, 9]$ е оптимално. Максимумът на целевата функция е

$$L(X_t) = \frac{21}{2} + \frac{3}{2} t.$$

Таблица 2. 4. 1

c_i	Б	c_j	2—7t	3	6+t	3+2t	0	0	0
		P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
0	P_5	1	2	—1	[1]	2	1	0	0
0	P_6	2	2	1	1	1	0	1	0
0	P_7	3	—1	8	—2	—3	0	0	1
p_j		0	—2	—3	—6	—3	0	0	0
6+t	P_3	1	2	—1	1	2	1	0	0
0	P_6	1	0	[2]	0	—1	—1	1	0
0	P_7	5	3	3	0	1	2	0	1
p_j		6	10	—9	0	9	6	0	0
6+t	P_3	$\frac{3}{2}$	2	0	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
3	P_2	$\frac{1}{2}$	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
0	P_7	2	3	0	0	[4]	5	—3	1
p_j		$\frac{21}{2}$	10	0	0	$\frac{9}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{2}$	0
q_j		$\frac{3}{2}$	9	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$-\frac{p_j}{q_j}$		—	$-\frac{10}{9}$	—	—	9	—3	—9	—

Да изследваме задачата за стойности на t в интервала $(9, \infty)$. От базиса излиза векторът P_7, а влиза векторът P_4. След първата итерация (табл. 2.4.2) се вижда, че всички q_j 0, следователно базисът P_3, P_2, P_4, който е оптимален

Таблица 2. 4. 2

6+t	P_3	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{8}$	0	1	0	$\frac{11}{8}$	$\frac{13}{8}$	$-\frac{3}{8}$
3	P_2	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$	1	0	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
3+2t	P_4	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	0	0	1	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$
p_j		$\frac{33}{4}$	$\frac{53}{8}$	0	0	0	$\frac{33}{8}$	$\frac{63}{8}$	$-\frac{9}{8}$
q_j		$\frac{7}{4}$	$\frac{75}{8}$	0	0	0	$\frac{9}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

при $t=9$, е базис и на решенията при $t>9$, т. е. за всяко $t\in(9, \infty)$. В този случай не е необходимо да се пресмятат коефициентите $-\frac{p_j}{q_j}$. За намерения интервал оптималното решение X^1 е

$$X^1=\left(0, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}, 0, 0, 0\right),$$

при което максималната стойност на функцията е

$$L(X_t)=\frac{33}{4}+\frac{7}{4}t.$$

С това задачата е решена. Зададеният интервал $[0, \infty]$ на изменение на параметъра t се разделя на два подинтервала [0;9] и (9,8). За всяко t от тях целевата функция $L(X_t)$ достига своя максимум в една от съответно намерените точки на многостена на решенията, като максималната стойност на целевата функция зависи от параметъра t.

Глава пета

ЦЕЛОЧИСЛЕНО ЛИНЕЙНО ПРОГРАМИРАНЕ

1. ЗАДАЧИ НА ЦЕЛОЧИСЛЕНОТО ЛИНЕЙНО ПРОГРАМИРАНЕ

1.1. Постановка на задачата

Обект на изучаване от целочисленото линейно програмиране са задачите със следния математически модел:

Да се намери максимумът (минимумът) на линейната функция

$$L(X)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad (2.5.1)$$

при следните условия:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j=b_i,\ i=1, 2,..., m; \qquad (2.5.2)$$

$$x_j\geq 0;\ j=1, 2,..., n; \qquad (2.5.3)$$

$$x_j=\text{цяло},\ j=1, 2,..., n_1 (n_1\leq n). \qquad (2.5.4)$$

Ако $n_1=n$, (2.5.1) до (2.5.4) се нарича задача на пълното целочислено линейно програмиране, а при $n_1<n$ — задача на частичното целочислено линейно програмиране.

До такива математически модели се свеждат много задачи от икономиката, управлението, планирането, проектирането, военното дело и др.

Много често тези задачи се „решават“, като се отстранява условието (2.5.4) и се решава съответната задача на линейното програмиране. След това целочислените компоненти на оптималния план се закръглят до най-близките цели числа.

Обаче може да се дадат прости примери на задачи от линейно целочислено програмиране, които да покажат неприемливостта на такъв подход. Да разгледаме например задачата:

Да се намери максимумът на линейната функция

$$L(X)=x_1-3x_2+3x_3$$

при следните условия:

$$\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3 \leq 4 \\ 4x_1-3x_2 \leq 2 \\ -3x_1+2x_2+x_3 \leq 3 \end{cases}$$

$x_j \geq 0$; x_j — цели; $j=1, 2, 3$.

Като игнорираме условието за целочисленост, намираме, че оптималният план е

$$X^0=\left(x_1^0=\frac{1}{2},\ x_2^0=0,\ x_3^0=4\frac{1}{2} \right).$$

Никакви варианти на закръгляване на компонентите на този нецелочислен план не дават дори и допустимо решение. Оптималното целочислено решение на тази задача е

$$x_1=2,\ x_2=2,\ x_3=5.$$

Това показва, че е необходимо да се създадат нови методи за решаване на целочислени задачи на линейното програмиране.

1.2. Някои задачи, които се свеждат към целочислено линейно програмиране

а. Задачи с неделими обекти. Това са задачите, които са дали първоначалния и най-естествен стимул за изучаване на целочисленото програмиране. При тях променливите означават неделими величини: машини, самолети, оръдия и др.

Един от първите целочислени модели, публикуван в литературата (1955 г.), е задачата за оптималното натоварване на бомбардировачи с различни видове бомби, за да се постигне максимален ефект при дадени бойни операции.

Да означим с $i=1, 2,\ldots, m$ видовете бомби, с $j=1, 2,\ldots n$ — видовете бомбардировачи, с $k=1, 2,\ldots, p$ — бойните операции. Въвеждаме следните означения:

b_i — наличният запас от i-тия вид;

a_{ik} — ефективността на бомбите от i-тия вид в k-та операция;

n_j — планираният брой бойни полети на бомбардировача j;

w_k — теглото (стойността), определено от командуването за k-та операция.

Търсените величини тук са:

x_{ijk} — количеството бомби от вида i, които ще се натоварят в страничния бомбодържател на бомбардировача j при k-та операция;

y_{ijk} — аналогичната величина за централния бомбодържател.

Математическият модел на задачата е:

Да се намери максимумът на линейната форма

$$L(X)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} a_{ik} w_k n_j (2x_{ijk}+y_{ijk}) \qquad (2.5.5)$$

при следните ограничения:

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} n_j(2x_{ijk}+y_{ijk}) \leq b_i,\ i=1, 2,\ldots, m; \qquad (2.5.6)$$

$$x_{ijk} \geq 0;\ y_{ijk} \geq 0;\ x_{ijk},\ y_{ijk} \text{ — цели числа.} \qquad (2.5.7)$$

б. Задачи за оптимален избор на системи въоръжение. За изпълнение на еднотипни задачи (например унищожаване на еднотипни цели) може да се използуват оръжия от различен вид. Необходимо е да се определи в какви количества трябва да се произведат комплекси оръжия от различни видове, за да се осигури максималната им ефективност при определени ресурси и ограничени загуби. Към този математически модел се свеждат задачите за разпределение на средствата за производство на различни видове самолети за тактическата авиация, на самолети-снаряди и неуправляеми ракети с оперативно-тактическо назначение. Такава задача може лесно да се формулира и при избора на системи противотанкови оръжия или средства за противовъздушна отбрана.

Допускаме, че всеки комплекс действува само по своята група цели. Означаваме с x_j ($j=1,2,\ldots, n$) броя на комплексите оръжие от j-тия вид, а с p_j—средния брой цели, които се поразяват с едно средство от j-тия вид. Показател за качеството на системите въоръжение в случая е математическото очакване за броя на унищожените цели, т. е.

$$M=p_1x_1+p_2x_2+\ldots+p_nx_n. \qquad (2.5.8)$$

Да означим стойността на един комплекс от j-тия вид с r_j.

Ограничението за броя на комплексите, определено от допустимите разходи (b) за системата въоръжение, е

$$r_1 x_1 + r_2 x_2 + \ldots + r_n x_n \leq b. \qquad (2.5.9)$$

Нека с a_{ij} означим количеството единици от i-тия фактор (суровина, работна сила и др.), необходимо за производство на един комплекс въоръжение от j-тия вид, а с b_i ($i=1, 2,\ldots, s$) ограничението по този фактор. Тогава ограниченията са:

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n \leq b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{s1} x_1 + a_{s2} x_2 + \ldots + a_{sn} x_n \leq b_s. \end{cases} \qquad (2.5.10)$$

Тук s е броят на използуваните фактори. Някои от търсените величини x_j (нека това са първите k) може да са ограничени, т. е.

$$x_j \leq d_j, \quad j=1, 2,\ldots, k \leq n. \qquad (2.5.11)$$

Всички променливи x_j трябва да са положителни и цели, т. е.

$$x_j \geq 0; \quad x_j — \text{цяло}; \quad j=1, 2,\ldots, n. \qquad (2.5.12)$$

в. Транспортни задачи. Съществуват задачи на линейното програмиране, които формално не се отнасят към задачи на целочисленото линейно програмиране (изискване за целочисленост на търсените величини не се поставя), но при целочислени изходни данни винаги имат целочислено решение. Такова свойство има транспортната задача и различните нейни варианти (задача за назначенията, задача за потока в мрежа и др.). Знаем, че математическият модел на транспортната задача е:

$$L(X) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}, \quad i=1, 2,\ldots, m; \quad j=1, 2,\ldots, n \qquad (2.5.13)$$

при следните ограничения:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i=1, 2,\ldots, m; \qquad (2.5.14)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_i, \quad j=1, 2,\ldots, n; \qquad (2.5.15)$$

$$x_{ij} > 0, \quad i=1, 2,\ldots, m, \quad j=1, 2,\ldots, n. \qquad (2.5.16)$$

В тази задача няма изискване за целочисленост на x_{ij} в явен вид, но за транспортната задача е в сила следната теорема:

Т е о р е м а. При произволни цели стойности на $a_1, a_2,\ldots, a_m$ и $b_1, b_2,\ldots, b_n$ транспортната задача винаги има целочислен оптимален план независимо от коефициентите c_{ij} на линейната форма.

Това важно свойство на транспортната задача следва непосредствено, като се има пред вид, че числените методи за решаване на транспортните задачи изискват към изходните данни да се прилагат само действията събиране и изваждане.

Приведените примери, макар и малко на брой, са достатъчни, за да ни покажат колко големи са възможностите за приложение на целочисленото линейно програмиране при решаване на практически задачи от различни области на икономиката, техниката и военното дело.

2. МЕТОД НА СЕЧЕНИЯТА (АЛГОРИТЪМ НА ГОМОРИ)

2.1. И д е я н а м е т о д а

В основата на метода на сеченията лежи следната идея, принадлежаща на Данциг. Отначало се решава задачата, без да се взема под внимание условието за целочисленост на променливите. Ако полученият оптимален план удовлетворява и условието за целочисленост на променливите, намерено е оптималното решение на задачата. Ако полученият план не удовлетворява условието за целочисленост, към ограничителните условия на задачата се прибавя още едно линейно ограничение, което се удовлетворява от произволен целочислен (или частично целочислен) план на задачата, но не и от намереното решение. Геометрично изтълкувано, това означава, че построяваме хиперравнина, която отсича от многостена на решенията старата оптимална точка с дробни координати, но не отсича нито една точка с целочислени координати. Така тези ограничителни условия намаляват областта на допустимите решения, но не изключват целочислените решения. По тази причина методът е получил наименованието метод на отсичащите хиперравнини или метод на сеченията. Такива сечения се наричат **правилни.**

След това задачата се решава отново при така допълнените с още едно ограничения. Ако полученото решение е целочислено, то е оптималното решение на задачата, а ако не е целочислено, построява се ново линейно ограничение, което отсича полученото решение, но не и целочислените решения и про-

цесът се повтаря. След няколко интерации се намира решението на целочислената задача на линейното програмиране или пък се установява несъвместимостта на условията на изходната задача. На Р. Гомори се удава пръв да осъществи тази идея на Данциг и разработеният алгоритъм носи неговото име.

2.2. Алгоритъм на Гомори за решаване задачата на пълното целочислено линейно програмиране

Нека разгледаме начина за построяване на правилни сечения, предложени от Гомори, за задачата на пълното целочислено линейно програмиране (1.5.1)—(2.5.4), т.е. при $n_1=n$.

Приемаме, че параметрите a_{ij}, b_j и c_j са цели числа. Задачата се решава, като се използува следният алгоритъм:

1. Без да се вземе пред вид условието (2.5.4) за целочисленост, решава се поставената задача на линейното програмиране. Ако се получи целочислено решение, задачата е решена.

2. Ако се получи оптимално решение, за което поне едно $x_j|j=1, 2,..., n|$ е дробно число, в последната симплексна таблица се въвежда още един ред, който отговаря на допълнителното ограничаващо условие, и се преминава към точка 1. Нека разгледаме начина за съставяне на това условие. Да запишем условията (2.5.2) във вида

$$\sum_{j=1}^{n} x_1 P_j = P_0 \qquad (2.5.17)$$

и системата вектори $P_1, P_2,..., P_m$ да образуват базиса $Б$. Умножаваме (2.5.17) отляво с $Б^{-1}$ и получаваме

$$\sum_{j=1}^{n} x_j X_j = X_0, \qquad (2.5.18)$$

където $X_j = Б^{-1} P_j$ и $X_0 = Б^{-1} P_0$. Равенството (2.5.18) може да се напише още и така:

$$x_i + \sum_{j=m+1}^{n} x_{ij} x_j = x_{i0}, \quad i=1, 2,..., m. \qquad (2.5.19)$$

От (2.5.19) получаваме

$$x_i = x_{i0} - \sum_{j=m+1}^{n} x_{ij} x_i, \quad i=1, 2,..., m. \qquad (2.5.20)$$

Въвеждаме следните означения.

Ако x е реално число, цяла част на x се нарича най-голямото цяло число, което не го превъзхожда, и се означава с $[x]$.

Дробна част на числото x, която се означава с $\{x\}$, се нарича числото

$$\{x\} = x - [x].$$

Да допуснем, че оптималният базис на задачата (2.5.1)—(2.5.3) (не се взема пред вид условието за целочисленост) се състои от векторите $P_{s_1}, P_{s_2},..., P_{sc},..., P_{sm}$.

Ако всички компоненти x_{i0} на оптималния план са цели числа, задачата е решена. Да предположим, че x_{l_0} е дробно число. Като използуваме коефициентите на l-тия ред, съставяме новото (допълнителното) ограничаващо условие. Нека X е произволен план на задачата (2.5.1) — (2.5.3). От (2.5.20) получаваме, че неговите комоненти са свързани с уравнението

$$x_{sl} = x_{l_0} - \sum_{j \in I} x_{lj} x_j, \qquad (2.5.21)$$

където I е множеството на векторите, които не влизат в базиса на разгледания оптимален план. Заместваме x_{l_0} и x_{lj} чрез техните цели и дробни части, т. е.

$$x_{lj} = [x_{lj}] + \{x_{lj}\},$$

и получаваме

$$x_{sl}[x_{l_0}] + \sum_{j \in I_1} [x_{lj}] x_j = \{x_{l_0}\} - \sum_{j \in I_1} \{x_{lj}\} x_j, \qquad (2.5.22)$$

което е в сила за всеки допустим план на задачата. Ако планът X е целочислен, лявата страна е цяло число, следователно и дясната трябва да е цяло число, т. е.

$$\{x_{l_0}\} - \sum \{x_{lj}\} x_j \text{ — цяло число}$$

$$\text{или } \sum \{x_{lj}\} x_j = \{x_{l_0}\} + \alpha, \ \alpha \text{ — цяло число.} \qquad (2.5.23)$$

Като вземем пред вид, че $0 \leq \{x_{lj}\} < 1$, получаваме

$$\sum_{j \in I_1} \{x_{lj}\} x_j \geq 0, \ \{x_{l_0}\} < 1. \qquad (2.5.24)$$

Нека цялата част α е отрицателно число ($\alpha \leq -1$). Тогава

$$\sum_{j\in I_1}\{x_{lj}\}x_j+1\leq\{x_{l0}\}. \qquad (2.5.25)$$

Като вземем пред вид първото от неравенствата (2.5.24), получаваме

$$1\leq\{x_{l0}\},$$

което противоречи на второто неравенство на (2.5.24), следователно α е неотрицателно число, т. е. в сила е неравенството

$$\sum_{j\in I_1}\{x_{lj}\}x_j\geq x_{l0}\} \qquad (2.5.26)$$

за всеки целочислен план на разглежданата задача. Това неравенство е исканото допълнително ограничение. Като въведем допълнителна променлива $x_{n+1}\geq 0$, условието (2.5.26) се записва така:

$$\sum_{j\in I_1}\{x_{lj}\}x_j-x_{n+1}=\{x_{l0}\};\ x_{n+1}\geq 0. \qquad (2.5.27)$$

Планът на целочислената задача (2.5.17)—(2.5.19) не удовлетворява условието (2.5.27), тъй като за него лявата част на (2.5.26) е нула, а дясната — положително число. Следователно построеното допълнително условие действително отсича някаква част от областта на решение на задачата (1.5.1) — (1.5.3).

3. След като се определи допълнителното ограничение, отново по симплексния метод се решава задачата (2.5.1) при условия (2.5.3) и (2.5.26). Ако решението ѝ е целочислено, то е оптималното, а ако не е целочислено, съставя се ново ограничение и отново се прилага симплексният метод. Този подход се прилага, докато се намери оптималният план на първоначалната целочислена задача или докато се установи, че тя няма решение. Целочислената задача няма решение, когато при някоя итерация се получи дробен свободен член x_{l0}, а всички коефициенти x_{lj} от този ред са цели числа или когато някоя от линейните задачи е несъвместима в областта на положителните числа.

Ако няколко свободни члена x_{i0} са дробни числа, за да се осигури по-бърза сходимост на процеса, обикновено се избира този ред за съставяне на допълнително ограничение, в който $\{x_{i0}\}$ е най-голямо, т. е. номерът l на реда, по който се формира ограничението, се избира чрез равенството

$$x_{l0}=\max_i\{x_{i0}\}=\max_i\{x_{i0}-[x_{i0}]\}.$$

Да разгледаме един пример.

Да се намери максимумът на линейната форма

$$L(X)=3x_1+8x_2$$

при условие, че

$$3x_1+4x_2+x_3 \qquad =18;$$
$$3x_1+5x_2 \qquad +x_4=21;$$
$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4\geq 0;$$
$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \text{ — цели числа.}$$

Без да отчитаме условието за целочисленост на величините $x_j(j=1, 2, 3, 4)$, решаваме задачата по симплексния метод. Решението е дадено в таблица 2.5.1. Втората симплексна таблица на таблица 2.5.1 дава оптималното решение на задачата, т. е.

$$x_1=0,\ x_2=\frac{21}{5},\quad x_3=\frac{6}{5},\ x_4=0,$$

което не е целочислено.

Таблица 2. 5. 1

C_j			3	8	0	0
$C_Б$	Б	X	P_1	P_2	P_3	P_4
0	P_3	18	3	4	1	0
0	P_4	21	3	[5]	0	1
Δ_j		0	—3	—8	0	0
0	P_3	6/5	3/5	0	1	—4/5
8	P_2	21/5	3/5	1	0	1/5
Δ_j		168/5	9/5	0	0	8/5

От втората симплексна таблица се вижда, че преобразуваните условия са:

$$\frac{3}{5}x_1 \qquad +x_3-\frac{4}{5}x_4=\frac{6}{5} \qquad (2.5.28)$$

$$\frac{3}{5}x_1+x_2 \qquad +\frac{1}{5}x_4=\frac{21}{5} \qquad (2.5.29)$$

Към тях прибавяме допълнително ограничение, което съставяме чрез коефициентите пред свободните неизвестни (x_1 и x_2) и свободния член на равенството (2.5.29). Съгласно с (2.5.26) допълнителното ограничение, образувано чрез коефициентите на (2.5.29), е

$$\left\{\frac{3}{5}\right\}x_1+\left\{\frac{1}{5}\right\}x_4\geq\left\{\frac{21}{5}\right\} \qquad (2.5.30)$$

или

$$\frac{3}{5}x_1+\frac{1}{5}x_1\geq\frac{1}{5}.$$

Решаваме следната задача:

Да се намери максимумът на линейната форма

$$L(X)=3x_1+8x_2$$

при условията:

$$\frac{3}{5}x_1 \quad +x_3-\frac{4}{5}x_4=\frac{6}{5};$$

$$\frac{3}{5}x_1+x_2 \quad +\frac{1}{5}x_4=\frac{21}{5};$$

$$\frac{3}{5}x_1 \quad +\frac{1}{5}x_4\geq\frac{1}{5};$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4\geq 0.$$

Задачата решаваме също по симплексния метод (чрез изкуствен базис поради неравенство в допълнителното условие). Решението на тази задача е дадено в таблица 2.5.2.

Оптималното решение е

$$x_1=\frac{1}{3},\ x_2=4,\ x_3=1,\ x_4=0,$$

където x_1 не е цяло число. За x_1 въвеждаме по аналогичен начин ново допълнително ограничение. Преобразуваните ограничителни условия на задачата (от втората симплексна таблица на таблица 2.5.2) са:

$$\begin{cases} x_3-x_4 & +x_5=1 \\ x_2 & +x_5=4 \\ x_1+\frac{1}{3}x_4-\frac{5}{3}x_5=\frac{1}{3}. \end{cases} \qquad (2.5.31)$$

Таблица 2. 5. 2

C_j			3	8	0	0	0	—M
$C_Б$	Б	X	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
0	P_3	6/5	3/5	0	1	—4/15	0	0
8	P_2	21/5	3/5	1	0	1/5	0	0
—M	P_6	1/5	3/5	0	0	1/5	—1	1
Δ_j		168/5 —M/5	9/5 —3M/5	0	0	8/5 —1/5M	M	0
0	P_3	1	0	0	1	—1	1	
8	P_2	4	0	1	0	0	1	
3	P_1	1/3	1	0	0	1/3	—5/3	
Δ_j		33	0	0	0	1	3	

От коефициентите на третото уравнение (реда на x_1 в симплексната таблица) съставяме допълнително ограничение

$$\left\{\frac{1}{3}\right\}x_4+\left\{-\frac{5}{3}\right\}x_5\geq\left\{\frac{1}{3}\right\}$$

или

$$\frac{1}{3}x_4+\frac{1}{3}x_5\geq\frac{1}{3}. \qquad (2.5.32)$$

Решаваме задачата за намиране на максимума на функцията $L(X)=3x_1+8x_2$ при ограничителни условия (2.5.31), (2.5.32) и условието за неотрицателност на неизвестните. Решението е дадено в таблица 2.5.3.

Получихме

$$x_1=0,\ x_2=4,\ x_3=2,\ x_4=1,\ L_{max}=32,$$

което е оптималното целочислено решение на задачата. Максималната стойност на целевата функция, без изискването за целочисленост, е 33,6, следователно разликата между оптималното решение на нецелочислената и на целочислената задача е 1,6.

Таблица 2. 5. 3

C_j			3	8	0	0	0	0	—M
$C_Б$	Б	X	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_7	P_8
0	P_3	1	0	0	1	—1	1	0	0
8	P_2	4	0	1	0	0	1	0	0
3	P_1	1/3	1	0	0	1/3	—5/3	0	0
—M	P_8	1/3	0	0	0	1/3	1/3	—1	1
Δ_j		31 —M/3	0	0	0	1 —M/3	3 —M/3	M	0
0	P_3	2	0	0	1	0	2	—3	
8	P_2	4	0	1	0	0	1	0	
3	P_1	0	1	0	0	0	—2	1	
0	P_4	1	0	0	0	1	1	—3	
Δ_j		32	0	0	0	0	2	3	

2.3. Алгоритъм на Гомори за решаване на частично целочислени задачи

Да разгледаме следната задача:
Да се намери максимумът на линейната форма

$$L(X)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad (2.5.33)$$

при условие, че

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\ i=1, 2,\ldots, m; \qquad (2.5.34)$$

$$x_j \geq 0,\ j=1, 2,\ldots, n; \qquad (2.5.36)$$

x_j — цели числа, $j=1, 2,\ldots, n_1<n$.

И тук, както при задачата на пълното целочислено програмиране, се решава съответната задача на линейното програмиране без условието за целочисленост. Ако решението не е целочислено, въвеждат се нови ограничителни условия. Разликата при решаването на разглежданата и на пълната целочислена задача е в начина на построяване на тези ограничения.

Да предположим, че при решаването на задача (2.5.23)—(2.5.35) x_{l_0} е дробно число. Както при пълната целочислена задача, и тук се установява, че допълнителното ограничение, съставено чрез коефициентите на l-тия ред, има вида

$$\sum_{j\in I_1} \delta_{lj} x_j \geq \{x_{l_0}\}, \qquad (2.5.37)$$

където:

$$\delta_{lj}\begin{cases} x_{lj}, \text{ ако } j>n_1,\ x_{lj}\geq 0 \\ -\dfrac{\{x_{l_0}\}}{1-\{x_{l_0}\}} x_{lj}, \text{ ако } j>n_1,\ x_{lj}<0 \\ \{x_{lj}\}, \text{ ако } j\leq n_1, \{x_{lj}\}\leq\{x_{l_0}\} \\ \dfrac{\{x_{l_0}\}}{1-\{x_{l_0}\}}(1-\{x_{lj}\}), \text{ ако } j\leq n_1\ \{x_{lj}\}>\{x_{l_0}\}. \end{cases} \qquad (2.5.38)$$

Неравенството (2.5.37) може да се запише и така:

$$\sum_{j\in I_1} \delta_{lj} x_j - x_{n+1} = \{x_{l_0}\},$$

където $x_{n+1}\geq 0$ е допълнителна променлива.

Доказано е, че оптимално решение на разглежданата задача се намира след краен брой итерации, когато първите n_1 променливи са цели числа и целевата функция зависи само от тях, като се спазва същото правило за избор на реда, по който се образува допълнителното ограничение, както при пълната целочислена задача.

Като пример нека разгледаме задачата от т. 2.2 при положение, че изискването за целочисленост е наложено само на x_1 и x_2. Да формулираме допълнителното ограничение (2.5.37) чрез коефициентите пред небазисните променливи и свободния член на уравнението:

$$\frac{3}{5}x_1+x_2+\frac{1}{5}x_4=\frac{21}{5}.$$

В случая

$$x_{21}=\frac{3}{5},\quad x_{24}=\frac{1}{5},\quad x_{20}=\frac{21}{5}.$$

Допълнителното ограничение има вида

$$\delta_{21}x_1+\delta_{24}x_{24}\geq\{x_{20}\}.$$

В разгледания случай $n_1=2$, следователно за коефициентите δ_{21} и δ_{24} получаваме

$$\delta_{21}=\frac{\{x_{20}\}}{1-\{x_{20}\}}(1-\{x_{21}\}),\text{ защото } j=1<n_1 \text{ и}$$

$$\{x_{21}\}=\frac{3}{5}>\{x_{20}\}=\frac{1}{5}.$$

Следователно

$$\delta_{21}=\frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}}\left(1-\frac{3}{5}\right)=\frac{1}{10},$$

$$\delta_{24}=x_{24}=\frac{1}{5},\text{ защото } j=4>n_1 \text{ и } x_{24}>0.$$

Оттук допълнителното ограничение е

$$\frac{1}{10}x_1+\frac{1}{5}x_4\geq\frac{1}{5}.$$

3. КОМБИНАТОРНИ МЕТОДИ

3.1. Същност на комбинаторните методи

Комбинаторните методи се отличават от методите, свързани с отсичащи хиперравнини, главно по това, че при тях се използуват ограниченият брой планове на задачата и техният комбинаторен характер. Методите от тази група са твърде разнородни, но всички в една или друга степен използуват подбора на плановете. Основната идея при тях е замяната на пълния подбор на всички планове с частичен, като се отстраняват някои множества от решения, за които се установява, че не могат да дадат оптималното решение, и подборът се извършва при останалите „перспективни“ варианти. За разлика от методите на сеченията комбинаторните методи се влияят

значително по-малко от грешките при закръгляванията. При много от комбинираните методи изобщо не се използува решението на задачата на линейното програмиране, съответствуваща на разглежданата целочислена задача. Изобщо за комбинаторните методи са характерни по-простото пресмятане, но много по-сложна логика при решаването на проблема.

Комбинаторните методи са много разнообразни. Централно място всред тях сега заемат методите, обединени под общото наименование **методи на разклоненията и границите.** За пръв път методът на разклоненията и границите е бил предложен в 1960 г. от Ленд и Дойг, приложен към задачата от целочисленото линейно програмиране. Тази работа не е оказала особено влияние върху развитието на целочисленото програмиране. Фактически „второто раждане“ на метода на разклоненията и границите е през 1963 г. и е свързано с работата на Литл, Мурти, Суини и Керел, посветена на задачата за пътуващия търговец. Оттогава се появяват твърде много работи, посветени на този метод и различните негови модификации. Големият успех се обяснява с това, че Литл, Мурти, Суини и Керел първи обърнали внимание на широките възможности на метода, отбелязали колко е важно да се използува спецификата на дадена задача и сами твърде удачно се възползували от нея при разглеждания от тях проблем.

3.2. Идея на метода на разклоненията и границите

Нека разгледаме задачата на целочисленото линейно програмиране.

Да се намери минимумът на линейната форма

$$L(X)=\sum_{j=1}^{n}c_j x_j, \tag{2.5.39}$$

при следните условия:

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i,\ i=1,2,\ldots,n; \tag{2.5.40}$$

$$x_j\geq 0,\ j=1,2,\ldots,n; \tag{2.5.41}$$

$$x_j\text{ — цяло},\ j=1,2,\ldots,n_1\leq n. \tag{2.5.42}$$

Приемаме, че множеството планове на задачата е ограничено.

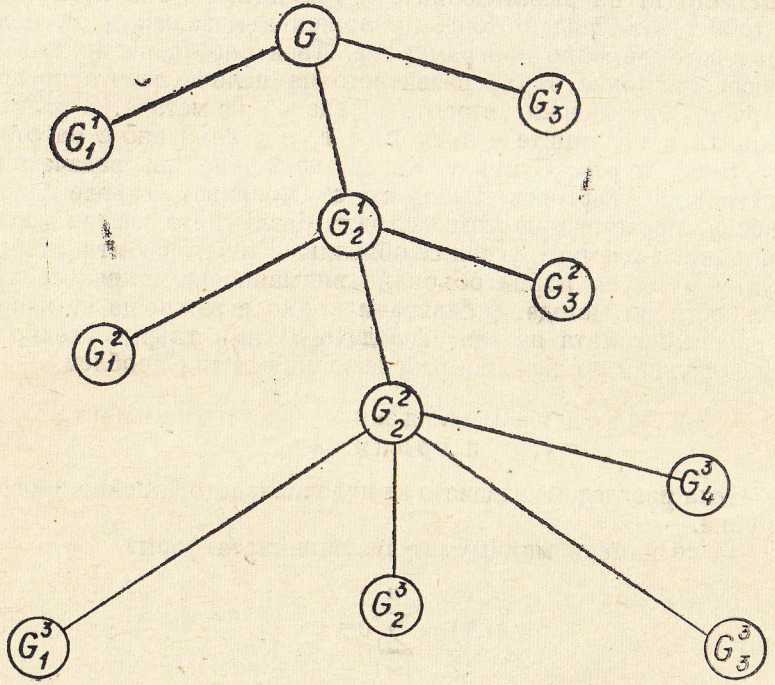
При този метод се извършват следните дейности:

а) Пресмятане на долната граница (оценка). Често пъти е възможно да се намери долната граница (оценка) на целевата функция $L(X)$ на множеството планове G (или на някое негово подмножество G'), т. е. такова число $f(G)$, $[f(G')]$, че за $X \in G$ да е в сила

$$L(X) \geq f(G).$$

(Съответно за $X \in G'$ имаме $L(X) \geq f(G')$.

б) Разбиване на подмножествата (разклонение). Реализацията на метода е свързана с постепенно разбиване на мно-



Фиг. 2.5.1

жеството планове G на подмножества (разклонение). Така се получава граф-дърво от подмножества. Разклонението се извършва така. Изхожда се от множеството планове G на задачата. По някакъв начин то се разбива на краен брой (обикновено непресичащи се) подмножества G_1', G_2', G_3', ..., G_r'. По известно правило (то ще бъде изяснено по-долу) от тези множества се избира едно и отново се разбива на крен брой подмножества и т. н. С няколко етапа този процес е показан схематично на фиг. 2.5.1.

в) Пресмятане на оценката. Ако при разклоняването множеството $G_1 \subset G_2$, тогава

$$\min_{X \in G_1} L(X) \geq \min_{X \in G_2} L(X).$$

Разбивайки в процеса на решаването някое множество на непресичащи се множества G_1', G_2', ..., G_s', винаги ще смятаме, че оценката (границата) за произволно подмножество G_i' не е по-малка от оценката за множеството G', т. е.

$$f(G_i') \geq f(G'), \quad i = 1, 2, \ldots, s.$$

При конкретни задачи често се оказва възможно да се подобри оценката, т. е. поне за едно i да се получи строго неравенство

$$f(G_i') > f(G').$$

г) Намиране на плановете. За конкретните задачи, като се използува тяхната специфичност, може да се укажат различни способи за намиране на планове на задачата в последователно разклоняващи се множества.

д) Проверка на признака за оптималност. Нека

$$G = \bigcup_{i=1}^{s} G_1.$$

Ако планът $\bar{X}$ принадлежи на някое подмножество G_v и е изпълнено условието

$$L(X) = f(G_v) \leq f(G_i), \quad i = 1, 2, \ldots, s,$$

то $\bar{X}$ е оптималният план на задачата (2.5.29)—(2.5.42).

Този признак се прилага на някой етап от разклонението.

За да реализираме описаната схема на метода на разклоненията и границите, приложена към отделни задачи от целочисленото програмиране, необходимо е, като се изходи от особеността на задачата, да се извърши следното:

— да се конкретизират правилата за разклонение;

— да се пресметне оценката (границите);

— да е намерят плановете на задачите.

В следващата точка е разгледана накратко една важна реализация на този метод.

3.3. Метод на Ленд и Дойг

Нека разгледаме частично целочислена задача на линейното програмиране.

Да се намери минимумът на линейната форма

$$L(X)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad (2.5.43)$$

при условие, че

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i,\ i=1,\ 2,\ldots,\ m; \qquad (2.5.44)$$

$$0\le x_i\le d_j,\ j=1,\ 2,\ldots,\ n; \qquad (2.5.45)$$

$$x_j \text{ — цели},\ j=1,\ 2,\ldots,\ n_1. \qquad (2.5.46)$$

При тази задача се предполага, че $n_1\le n$, т. е. не се изключва случаят на пълно целочислени задачи. Предполага се, че многостенното множество, определено от условията (2.5.44) — (2.5.46), е ограничено.

Както при метода на Гомори, и тук решаването на задачата започва с решаване на съответната ѝ нецеленасочена задача на линейното програмиране (2.5.43)—(2.5.45). Ако полученият оптимален план $X^0(x_1^0,\ x_2^0,\ldots,\ x_n^0)$ не удовлетворява условието за целочисленост (2.5.46), стойността $L_0=L(X^0)$ на целевата функция за този план дава долната граница на целочислената задача, т. е.

$$\min L(X)\ge L(X).$$

Нека променливата x_{i_0}, където $1\le i_0\le n_1$, няма целочислено значение. В оптималния целочислен план x_{i_0} трябва или да се намали до $[x_{i_0}]$, или да се увеличи до $[x_{i_0}]+1$. Ако границите на изменение на x_{i_0} не са дадени предварително, можем да ги намерим, като решим две спомагателни задачи на линейното програмиране. Едната е да се намери максимумът, а другата—минимумът на x_{i_0} при условия (2.5.44)—(2.5.45), след което на всяко фиксирано цяло значение на x_{i_0} в намерения интервал може да се изчисли $\min L(X)$ чрез решаване на задачи на линейното програмиране с ограничения (2.5.44) и допълнително ограничение $x_{i_0}=k_{i_0}$.

Всичките указани възможности може да се представят чрез граф-дърво, в който началният връх съответствува на изходния план X^0, а всеки съединен с него връх—на оптималния план на задачи от вида: да се намери минимумът на $L(X)$ при условие (2.5.44)—(2.5.45) и допълнителното условие, че на променливата x_{i_0} е дадено конкретно значение $x_{i_0}=k_{i_0}$. На всеки от върховете се преписва граница $f_k(i_0,k)$, равна на минималното значение на $L(X)$ за съответната задача. За всички k имаме

$$f(X^0)\le(i_0,\ k).$$

Ако оптималните планове на указаните задачи удовлетворяват условието за целочисленост, планът с максимална граница ще бъде оптималният на изходната задача. В противен случай възниква необходимост от по-нататъшно разклонение на графа-дърво от някой връх, който не удовлетворява условието за целочисленост. За разклонение всеки път се избира връх с най-малка граница. Произволен връх в получения граф, започващ от началния връх до някои от неговите върхове, определя допустимата последователност на избора на целочислени значения за променливите. Процесът продължава, докато разклонението стане невъзможно. На всеки краен връх отговаря допустим целочислен план. Оптималният план съответствува на върха с минимално $L(X)$.

Така в изчислително отношение алгоритъмът на Ленд и Дойг се свежда към решаване на последователност от задачи на линейното програмиране. Крайността на този алгоритъм следва от предположението, че множеството (2.5.45)—(2.5.46) е ограничено.

Нека разгледаме един пример.

Да се намери минимумът на линейната форма

$$L(X)=-x_1-x_2. \qquad (2.5.47)$$

при условие, че

$$\begin{cases} 2x_1+11x_2\le 38 \\ x_1+x_2\le 7 \\ 4x_1-5x_2\le 5. \end{cases} \qquad (2.5.48)$$

$$x_1,\ x_2\ge 0. \qquad (2.5.49)$$

$$x_1,\ x_2\ge 0 \text{ — цели}. \qquad (2.5.50)$$

Нулева итерация. Намираме оптималния план X^0 на съответната нецелочислена задача на линейното програмиране, т. е. задача (2.5.47) — (2.5.49). Той е

$$X^0=\left(4\frac{4}{9},\quad 2\frac{5}{9}\right).$$

Получаваме $L(X^0)=-7$.

Планът X^0 не удовлетворява условието за целочисленост (2.5.50). Да изберем неговата нецелочислена компонента x_1^0 и да разбием множеството планове G^0 на две подмножества,

$$G^0=G_1' \cup G_2',$$

където
$$G_1'=\{X|X\in G^0,\ x_1\leq 4\},$$
$$G_2^1=\{X|X\in G^0,\ x_1\geq 5\}.$$

Първа интеграция. Решаваме две задачи на линейното програмиране за намиране на минимума на (2.5.47) — едната за множеството G_1^1, а другата за множеството G_2^1. При първата задача минимумът се достига при $x_1=4$, $x_2=2\frac{8}{11}$,

$$L'(G_1')=]-6\frac{8}{11}[=-6,$$

където символът $]a[$ означава най-малкото цяло число, не по-малко от a.

Множеството G_2^1 се указва празно, така че за него

$$L^1=(G_2^1)=+\infty.$$

Разклоняваме графа-дърво, съответстващ на решението, като излизаме от множеството G_1^1, което разбиваме на две подмножества.

$$G_1^1=G_{11}^1 \cup G_{12}^1,$$

където:
$$G_{11}^1=\{X|X\in G_1^1,\ x_2\leq 2\},$$
$$G_{12}^1=\{X|X\in G_1^1,\ x_2\geq 3\}.$$

За удобство преозначаваме

$$G_{11}^1\equiv G_1^2,\ G_{12}^1\equiv G_2^2,\ G_2^1\equiv G_3^2.$$

Втора итерация. Решаваме две задачи на линейното програмиране за намиране на минимума на (2.5.47) — едната за множеството G_1^2, а другата за множеството G_2^2. За първата задача минимумът се достига при $x_1=3\frac{3}{4}$, $x_2=2$, $L^2(G_1^2)=$ $=\left]-5\frac{3}{4}\right[=-5$, а за втората — при $x_1=2\frac{1}{2}$, $x_2=3$ и $L^2(G_2^2)=$ $=\left]-5\frac{1}{2}\right[=-5$. За множеството G_3^2 имаме $G_3^2\equiv G_2^1=\varnothing$, $L^2=(G_3^2)=\infty$.

Извършваме разклонение, като излизаме от множеството G_1^2, което разбиваме на две подмножества,

$$G_1^2=G_{11}^2 \cup G_{12}^2,$$

където
$$G_{11}^2=\{X|X\in G_1^2,\ x_1\leq 3\}$$
$$G_{12}^2=\{X|X\in G_1^2,\ x_1\geq 4\}.$$

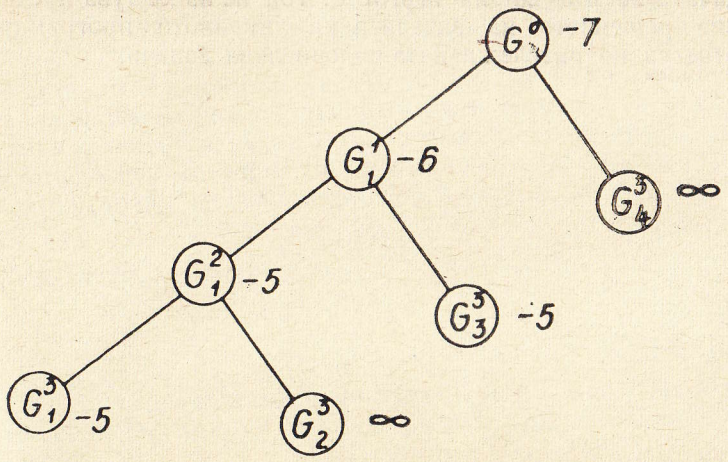
Преозначаваме

$$G_{11}^2\equiv G_1^3,\ G_{12}^2\equiv G_2^3,\ G_2^2\equiv G_3^3,\ G_3^2\equiv G_4^3.$$

Трета итерация. Решаваме две задачи на линейното програмиране за намиране на минимума на (2.5.47) — едната за множеството G_1^3, а другата за G_2^3. Получаваме $x_1=3$, $x_2=2$, $L^3(G_1^3)=-5$, $G_2^3=\varnothing$; $L^3(G_2^3)=\infty$, $x_1=2\frac{1}{2}$, $x_2=3$; $L^3(G_3^3)=$ $=\left]-5\frac{1}{2}\right[=-5$, $G_4^3\equiv G_3^2\equiv\varnothing$; $L^3(G_4^3)=\infty$. Така намерихме целочисленото решение $X(3,2)$ за множеството. При това

$$\min[L^3(G_1^3),\ L^3(G_2^3),\ L^3(G_3^3),\ L^3(G_4^3)]=$$
$$=\min[-5,\ \infty,\ -5,\ \infty]=-5\leq L(\bar{X})=-5,$$

следователно планът $\bar{X}(2,5,40)$ е оптимален. Съответстващият на решението граф-дърво е представен на фиг. 2.5.2.



Фиг. 2.5.2

От описанието на метода на Ленд и Дойг се вижда, че той се прилага еднакво както при задачи на пълното, така

и при задачи на частичното целочислено програмиране. Особено удобен е за частични целочислени задачи с малък брой целочислени променливи. Сведения за машинна реализация на този метод не са публикувани. Известно е само, че е запрограмиран през 1965 година.

Друга важна реализация на метода на разклоненията и границите е алгоритъмът на Литл, Мурти, Суини и Керел за задачата за пътуващия търговец. Той не използува предварително решението на задачата на линейното програмиране, съответна на разглежданата целочислена задача.

Глава шеста

НЕЛИНЕЙНО ПРОГРАМИРАНЕ

1. ПОСТАНОВКА НА ЗАДАЧИТЕ НА НЕЛИНЕЙНОТО ПРОГРАМИРАНЕ

Както отбелязахме в увода на раздел II, основната задача на математическото програмиране се състои в намиране на минималната (максималната) стойност на функцията $f(X)$, която изразява критерия за оптималност при дадени ограничаващи условия на параметрите x_j, $j=1,2,\ldots,n$, т. е. търси се

$$inf F(X) \tag{2.6.1}$$

при следните условия:

$$g_i(X) \leq 0,\ i=1,2,\ldots,m; \tag{2.6.2}$$

$$X \geq 0. \tag{2.6.3}$$

Досега разглеждахме само задачи, при които $f(X)$ и $g_i(X)$ са линейни функции. Това бяха задачите на линейното програмиране.

Когато $f(X)$ и $g_i(X)$ са нелинейни функции, говорим за задачи на нелинейното програмиране.

Когато областта $D=\{X \in E^n | X \geq 0, g_i(X) \leq 0, i=1,2,\ldots,m\}$, определена от ограничаващите условия, не е празно множество и е ограничена, $inf F(X)$ съществува. Когато той се достига, в задачите на нелинейното програмиране пишем $\min f(X)$ вместо $\inf F(X)$.

И тук, както в линейното програмиране, всяка точка $X \in D$ се нарича **допустим план** или **допустимо решение**.

Точката X^0, в която функцията $f(X)$ достига минималната си стойност, се нарича **оптимален план** или **решение** на задачата.

При анализа на нелинейните задачи е необходимо да се намерят условията, които трябва да се удовлетворяват от

точката X^0, за да бъде тя решение на задачата, т. е. условията за оптималност и методите за намиране на тази точка.

Решаването на тези проблеми в общия случай е много трудно. За сега са разработени числени методи за решаване само на няколко класа нелинейни задачи.

2. ИЗПЪКНАЛО ПРОГРАМИРАНЕ

2.1. Постановка на задачите на изпъкналото програмиране

Към този клас спадат нелинейните задачи, при които функциите $f(X)$ и $g_i(X)$, $i=1,2,\ldots,m$ са изпъкнали.

При тях областта D е изпъкнало множество и локалният минимум на функцията $f(X)$ върху нея съвпада с глобалния й минимум.[1]

Ако областта D не е празна и е ограничена, $inf F(X)$ съществува и се достига поне в една точка. Ще предполагаме, че това условие винаги е изпълнено. Тогава задачите на изпъкналото програмиране ще записваме по следния начин.

Да се намери

$$\min f(X) \tag{2.6.4}$$

при следните условия:

$$g_i(X)\leq 0,\ i=1,2,\ldots,m; \tag{2.6.5}$$

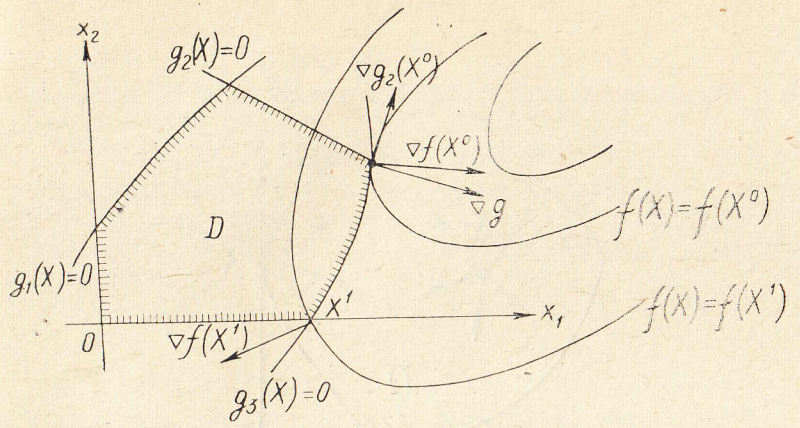
$$X\geqq 0. \tag{2.6.6}$$

Използува се още и записът

$$\min\{f(X)|X\in D\}. \tag{2.6.7}$$

Много често ще предполагаме, че функциите $f(X)$ и $g_i(X)$ са непрекъснато диференцируеми. Градиентът $\nabla f(X)$ на функцията $f(X)$ в точката X^1 е перпендикулярен към повърхността $f(X)=f(X^1)$ и показва посоката на най-голямата изпъкналост на функцията $f(X)$ в околността на точката X^1. Ако $g_i(X^0)=0$ и $\nabla g_i(X^0)$ е различен от нула, той има същото направление, както и перпендикуляра към ограничаващата хиперравнина $g_i(X)=0$ в точката X^0 и е насочен към външността на допустимата област. Външните нормали към ограничаващите повърхнини $x_j=0$ се задават с векторите $-e_j$ (e_j е j-тият единичен вектор). На фиг. 2.6.1 е показан случаят $n=2$, $m=3$.

[1]. Вж. глава първа, т. 4.2 на този раздел.



Фиг. 2.6.1

2.2. Условия за оптималност

Нека задачата на изпъкналото програмиране е записана във вида (2.6.7), т. е. търси се $\min\{f(X)|X\in D\}$. Ще дадем следните определения.

Определение 1. Направлението s в точката $X\in D$ се нарича възможно, ако $X+\lambda s\in D$ за всички $0<\lambda\leq\lambda_0$.

Множеството от възможните направления в точката X е конус с връх в точката 0.

Тъй като областта D е изпъкнала, конусът на възможните направления във всяка точка $X\in D$ е изпъкнал.

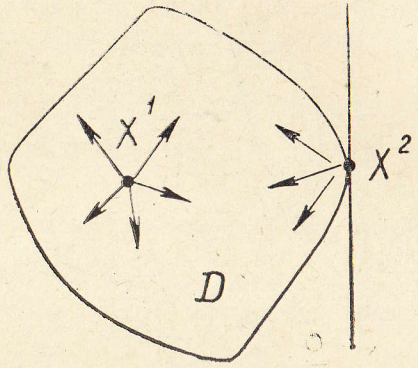
На фиг. 2.6.2 за точката X^1 всяко направление е възможно, а за точката X^2 — само тези, които се намират в полуравнината, определена от допирателната права към областта D в точката X^2, съдържаща областта D.

Определение 2. Направление s в точката $X\in D$ се нарича подходящо, ако $f(X+\lambda s)<f(X)$ за $0<\lambda\leq\lambda_0$ (фиг. 2.6.3).

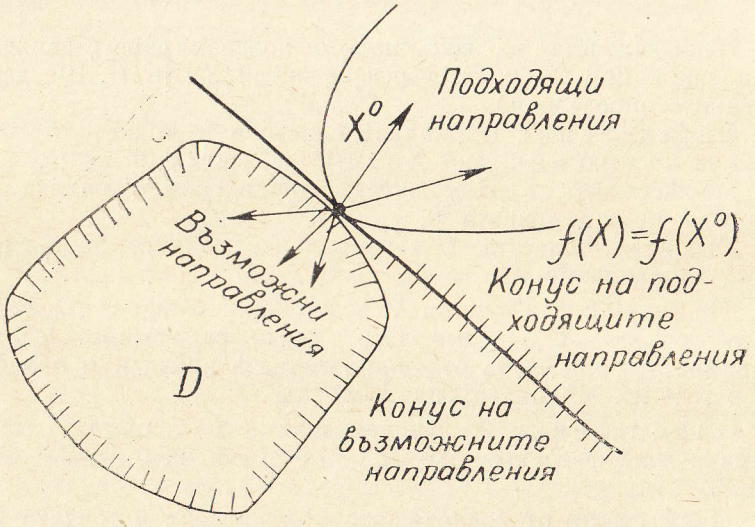
Множеството от подходящите направления в точката X е конус с връх в точката 0.

Тъй като $f(X)$ е изпъкнала функция, и конусът от подходящите направления във всяка точка $X\in D$ е изпъкнал. С $K_1(X)$ означаваме конуса от възможните направления в точката $X\in D$, т. е.

$$K_1(X)=\{s|X+\lambda s\in D,\ \text{за } X\in D \text{ и } 0<\lambda\leq\lambda_1\}.$$



Фиг. 2.6.2



Фиг. 2.6.3

С $K_0(X)$ означаваме конуса от подходящите направления в точка $X\in D$, т. е.

$$K_0(X)=\{s|f(X+\lambda s)<f(X) \text{ за } X\in D \text{ и } 0<\lambda\leq\lambda_0\}.$$

Лема 1. Необходимото условие точката X^0 да е решение на задачата

$$\min\{f(X)|X\in D\}$$

е конусите от възможните и подходящите направления в нея да имат празно сечение, т. е.

$$K_0(X^0)\cap .K_1(X^0)=\varnothing.$$

Доказателство. Да допуснем, че сечението не е празно, т.е. съществува направление s в точката X^0, принадлежащо едновременно на $K_0(X^0)$ и $K_1(X^0)$. Следователно съществуват такива числа λ_0 и λ_1, че

$$f(X^0+\lambda s)<f(X^0) \text{ за } 0<\lambda\leq\lambda_0 \text{ и}$$
$$X^0+\lambda s\in D \text{ за } 0<\lambda\leq\lambda_1.$$

Да вземем $\bar{\lambda}=\min(\lambda_0,\lambda_1)$. Тогава $X^0+\bar{\lambda}s\in D$ и $f(X^0+\bar{\lambda}s)<f(X^0)$. Следователно точката X^0 не е решение на задачата. От полученото противоречие следва, че

$$K_0(X^0)\cap K_1(X^0)=\varnothing$$

Лема 2. Нека $f(X)$ е диференцируема и X^0 е фиксирано решение на задачата на изпъкналото програмиране. Тогава всяка точка $X\in D$, за която са изпълнени равенствата

$$\nabla f(X)=\nabla f(X^0) \tag{2.6.8}$$

и

$$(X-X^0)^T\nabla f(X^0)=0, \tag{2.6.9}$$

е също решение на задачата.

Доказателство. Нека точката $X\in D$ удовлетворява равенствата (2.6.8) и (2.6.9). Тогава от неравенството

$$f(X)-f(X^0)\geq(X-X^0)^T\nabla f(X^0)=0$$

следва, че

$$f(X)\geq f(X^0). \tag{2.6.10}$$

Ако равенството (2.6.9) запишем във вида

$$(X^0-X)^T\nabla f(X)=0,$$

ще получим

$$f(X)\leq f(X^0). \tag{2.6.11}$$

От (2.6.10) и (2.6.11) следва, че

$$f(X)=f(X^0),$$

т.е. точката X е също решение на задачата. Нека предположим, че $f(X)=f(X^0)$. Тъй като $f(X)$ е изпъкнала функция и $f(X)=f(X^0)$, то

$$f(\widetilde{X})=f\Big(X^0+\lambda(X-X^0)\Big)\leq\lambda f(X)+(1-\lambda)f(X^0)=$$
$$=\lambda f(X^0)+(1-\lambda)f(X^0)=f(X^0) \text{ за } 0<\lambda<1.$$

Понеже X^0 е точката, в която функцията достига минималната си стойност, то

$$f(\widetilde{X}) \geqslant f(X^0).$$

От последните две неравенства получаваме

$$f(\widetilde{X}) = f\left(X^0 + \lambda(X - X^0)\right) = f(X) = f(X^0). \tag{2.6.12}$$

Следователно всяка точка, която може да се представи като изпъкнала линейна комбинация на точките X^0 и X, също е решение на задачата.

Ако вземем пред вид (2.6.12) и това, че при

$$(X - X^0)^T \nabla f(X^0) > 0$$

функцията $f\left(X^0 + \lambda(X - X^0)\right)$ расте монотонно, когато се увеличава λ, а при

$$(X - X^0)^T \nabla f(X^0) < 0$$

намалява монотонно, когато се увеличава λ от 0 до λ_0, получаваме равенството (2.6.9), т.е.

$$(X - X^0)^T \nabla f(X^0) = 0.$$

Едно необходимо и достатъчно условие, за да бъде точката X^0 решение на задачата (2.6.7), дава теоремата на Кун и Такер. Тя установява връзката между съществуването на седлова точка на функцията на Лагранж и оптималността на точката X^0. Функцията на Лагранж $\varphi(X_1 U)$ за задачата на изпъкналото програмиране се образува по следния начин.

$$\varphi(X_1 U) = f(X) + \sum_{i=1}^{m} U_i g_i(X).$$

Точката (X^0, U^0) се нарича седлова точка на функцията $\varphi(X, U)$, ако е изпълнено

$$\varphi(X^0, U) \leq \varphi(X^0, U^0) \leq \varphi(X, U^0) \tag{2.6.13}$$

за $X \geq 0$ и $U \geq 0$.

3. ТЕОРЕМА НА КУН И ТАКЕР

Теорема 1. Точката $X^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ е решение на задачата

$$\min f(X)$$

при условията

$$g_i(X) \leq 0, \quad i = 1,2,\ldots,m,$$
$$X \geq 0$$

тогава и само тогава, когато съществува такъв вектор $U^0 = (u_1^0, u_2^0, \ldots, u_m^0)$, че

$$X^0 \geq 0, U \geq 0 \tag{2.6.14}$$

и

$$\varphi(X^0, U) \leq \varphi(X^0, U^0) \leq \varphi(X, U^0) \tag{2.6.15}$$

за всяко $X \geq 0$ и $U \geq 0$.

Доказателство. Да докажем достатъчността на условието, т.е. ако $X^0 \geq 0$, $U^0 \geq 0$ и (X^0, U^0) е седлова точка на функцията $\varphi(X, U)$, то X^0 е решение на задачата.

Неравенството (2.6.15) може да се запише по следния начин:

$$f(X^0) + \sum_{i=1}^{m} u_i g_i(X^0) \leq f(X^0) + \sum_{i=1}^{m} u_i^0 g_i(X^0) \leq f(X) + \sum_{i=1}^{m} u_i^0 g_i(X)$$

за всички $X \geq 0$, $U \geq 0$. (2.6.16)

Да вземем лявото неравенство

$$f(X^0) + \sum_{i=1}^{m} u_i g_i(X^0) \leq f(X^0) + \sum_{i=1}^{m} u_i^0 g_i(X^0)$$

От него получаваме

$$\sum_{i=1}^{m} (u_i - u_i^0) g_i(X^0) \leq 0 \tag{2.6.17}$$

за всички

$$u_i \geq 0, \quad i = 1,2,\ldots,m.$$

Ако вземем вектора $U > U^0$, например

$$U = (u_1^0, u_2^0, \ldots, u_{l+1}^0, \ldots, u_m^0),$$

то от последното неравенство получаваме

$$g_l(X^0) \leq 0 \text{ за } i = 1,2,\ldots,m.$$

Следователно X^0 е допустимо решение, т.е. принадлежи на областта D. От (2.6.17) при $U = 0$ следва

$$\sum_{i=1}^{m} u_i^0 g_i(X^0) \geq 0.$$

От $u_i^0 \geq 0$ и $g_i(X^0) \leq 0$ следва

$$\sum_{i=1}^{m} u_0^i g_i(X^0) \leq 0.$$

От последните две неравенства получаваме

$$\sum_{i=1}^{m} u_1^0 g_i(X^0) = 0. \qquad (2.6.18)$$

Дясното неравенство в (2.6.16) добива вида

$$f(X^0) \leq f(X) + \sum_{i=1}^{m} u_1^0 g_i(X) \text{ за всички } X \geq 0. \qquad (2.6.19)$$

Тъй като $U^0 \geq 0$, то за всички допустими X (такива, че $X \geq 0$ и $g_i(X) \leq 0$ за $i = 1,2,\ldots,m$)

$$\sum_{i=1}^{m} u_1^0 g_i(X) \leq 0.$$

Тогава от (2.6.19) и последното неравенство получаваме $f(X^0) \leq f(X)$ за всички допустими X. (2.6.20). Следователно X^0 е решение на задачата.

За доказателство на необходимостта на условието (2.6.14), (2.6.15) предполагаме, че е изпълнено условието на Слейтер (нарича се още предположение за регулярност): съществува поне една допустима точка X^1 такава, че

$$g_i(X^1) < 0 \text{ за } i = 1,2,\ldots,m.$$

При това предположение да докажем, че от оптималността на вектора X^0 следва съществуването на вектор $U^0 \geq 0$ такъв, че двойката (X^0, U^0) е седлова точка на функцията $\varphi(X,U)$.

В пространството E^{m+1} разглеждаме двете множества

$A = \{Y = (y_0, y_1, y_2, \ldots, y_m) \mid y_0 \geq f(X), y_1 \geq g_1(X), \ldots, y_m \geq g_m(X)$ за някое $X \geq 0\}$,

$B = \{Y = (y_0, y_1, y_2, \ldots, y_m) \mid y_0 < f(X^0), y_1 < 0, y_2 < 0, \ldots, y_m < 0\}$.

Множествата A и B са изпъкнали, тъй като $f(X)$ и $g_i(X)$ са изпъкнали функции, и $A \cap B = \varnothing$, тъй като X^0 е оптималният

вектор. Следователно по теоремата за разделящата хиперравнина съществува такъв вектор $V = (v_0, v_1, \ldots, v_m) \neq 0$, че

$$VY^1 \geq VY^2 \text{ за } Y^1 \in A \text{ и } Y^2 \in B.$$

Тъй като компонентите на Y^2 може да приемат колкото си искаме големи отрицателни стойности, то V трябва да е неотрицателно, т.е. $V \geq 0$ (ако $V < 0$, то $VY^2 \to +\infty$ и $VY^1 > \infty$, което няма смисъл).

Нека

$$Y^1 = \Big(f(X), g_1(X), g_2(X), \ldots, g_m(X)\Big);$$

$$Y^2 = \Big(f(X^0), 0, 0, \ldots, 0\Big).$$

Тогава

$$v_0 f(X) + \sum_{i=1}^{m} v_i g_i(X) \geq v_0 f(X^0). \qquad (2.6.21)$$

Оттук следва, че $v_0 > 0$, тъй като в противен случай от $V \geq 0$ и (2.6.21) ще следва, че

$$\sum_{i=1}^{m} v_i g_i(X) \geq 0,$$

при което поне едно $v_i > 0$.

Това неравенство не е вярно поне за X^1, тъй като по предположение е изпълнено условието на Слейтер $g_i(X^1) < 0$ за $i = 1,2,\ldots,m$. Разделяме неравенството (2.6.21) на v_0 и заместваме v_i/v_0 с u_i^0. Тогава получаваме

$$f(X) + \sum_{i=1}^{m} u_i^0 g_i(X) \geq f(X^0) \text{ или}$$

$$\varphi(X, U^0) \geq f(X^0) \text{ за всички } X \geq 0. \qquad (2.6.22)$$

Полагаме в (2.6.22) $X = X^0$ и получаваме

$$\sum_{i=1}^{m} u_i^0 g_i(X^0) \geq 0,$$

но $g_i(X^0) \leq 0$, тъй като $X^0 \in D$ и $v^0 \geq 0$, т.е.

$$\sum_{i=1}^{m} u_i^0 g_i(X^0) \leq 0.$$

От последните две неравенства получаваме

$$\sum_{i=1}^{m} u_i^0 g_i(X) = 0,$$

$$\varphi(X^0, U^0) = f(X^0) \text{ и}$$

$$f(X^0) \geq f(X^0) + \sum_{i=1}^{m} u_i g_i(X^0) = \varphi(X^0, U) \text{ за } U \geq 0. \qquad (2.6.23)$$

От (2.6.22), (2.6.23) и последното неравенство следва, че

$$\varphi(X^0, U) \leq \varphi(X^0, U^0) \leq \varphi(X, U^0) \text{ за } X \geq 0, U \geq 0.$$

С това теоремата е доказана.

В случая, когато ограниченията се задават чрез линейни неравенства

$$AX \leq B, \text{ т.е. } B - AX \leq 0$$

и $X \geq 0$, теоремата може да се докаже без предположението за регулярност.

Функцията на Лагранж в този случай има вида

$$\varphi(X, U) = f(X) + (U, B - AX).$$

Теорема 2. Ако функциите $f(X)$ и $g_i(X), i = 1, 2, \ldots, m$ са диференцируеми, за да бъде двойката (X^0, U^0) седлова точка на функцията на Лагранж, необходимо и достатъчно е да се изпълняват следните условия:

$$\frac{\partial \varphi(X^0, U^0)}{\partial X} \geq 0; \qquad (2.6.24)$$

$$X^0 . \frac{\partial \varphi(X^0, U^0)}{\partial X} = 0; \qquad (2.6.25)$$

$$X^0 \geq 0; \qquad (2.6.26)$$

$$\frac{\partial \varphi(X^0, U^0)}{\partial X} \leq 0; \qquad (2.6.27)$$

$$U^0 . \frac{\partial \varphi(X^0, U^0)}{\partial U} = 0; \qquad (2.6.28)$$

$$U^0 \geq 0. \qquad (2.6.29)$$

Доказателство на необходимостта. Нека за функцията $\varphi(X, U)$ са изпълнени (2.6.14) и (2.6.15). Това показва, че $\varphi(X, U^0)$ има локален минимум в точката $X = X^0$, а $\varphi(X^0, U)$ има локален максимум в точката $U = U^0$. Ако за $x_j^0 \geq 0$ не се изпълнява условието (2.6.24) или (2.6.25), т.е., ако

$$x_j^0 > 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial \varphi(X^0, U^0)}{\partial x_j} \neq 0 \text{ или } x_j^0 = 0 \text{ и } \frac{\partial \varphi(X^0, U^0)}{\partial x_j} < 0,$$

би съществувала точка $Y \geq 0$, в която функцията $\varphi(X, U^0)$ би имала по-малка стойност, отколкото в точката X^0. Но това противоречи на условието (2.6.15). Следователно условията (2.6.24), (2.6.25) и (2.6.26) се изпълняват. Аналогично се доказва, че ако са изпълнени (2.6.14) и (2.6.15), изпълняват се и условията (2.6.27), (2.6.28) и (2.6.29).

Доказателство на достатъчността на условията (2.6.24) — (2.6.29). Нека са изпълнени условията (2.6.24), 2.6.25) и (2.6.26). Тъй като $\varphi(X, U^0)$ е изпъкнала функция по X,

$$\varphi(X, U^0) \geq \varphi(X^0, U^0) + (X - X^0) \frac{\partial \varphi(X^0, U^0)}{\partial X} =$$

$$= \varphi(X^0, U^0) + X \frac{\partial \varphi(X^0, U^0)}{\partial X} \geq \varphi(X^0, U^0) \text{ за } X \geq 0.$$

$$\left(\text{Използуваме, че } X^0 \frac{\partial \varphi(X^0, U^0)}{\partial X} = 0 \text{ и } \frac{\partial \varphi(X^0, U^0)}{\partial X} \geq 0. \right).$$

Тъй като $\varphi(X^0, U)$ е линейна функция по U,

$$\varphi(X^0, U) = \varphi(X^0, U^0) + (U - U^0) \frac{\partial X(X^0, U^0)}{\partial X} =$$

$$= \varphi(X^0, U^0) + U \frac{\partial X(X^0, U^0)}{\partial U} \leq \varphi(X^0, U^0) \text{ за } U \geq 0.$$

Следователно

$$\varphi(X^0, U) \leq \varphi(X^0, U^0) \leq \varphi(X, U^0) \text{ за } X \geq 0 \text{ и } U \geq 0.$$

С това теоремата е доказана.

Условията (2.6.24—(2.6.29) ни дават възможност да получим други необходими и достатъчни условия за оптималността на точката X^0. Използуваме представянето

$$\varphi(X, U) = f(X) + \sum_{i=1}^{m} u_i g_i(X).$$

Тогава условието (2.6.27)

$$\frac{\partial\varphi(X^0,U^0)}{\partial U_i}=g_i(X^0)\leq 0$$

и условието (2.6.26)

$$X^0\geqq 0$$

осигуряват допустимостта на точката X^0.

Условието (2.6.24) се преобразува във вида

$$\frac{\partial\varphi(X^0,U^0)}{\partial x_i}=\nabla f(X^0)+\sum_{i=1}^{m}u_i^0\nabla g_i(X^0)=V^0=\sum_{j=1}^{n}v_j^0 l_j, v_i\geq 0.$$

Да въведем означенията

$$\overline{M}=\left\{i|g_i(X^0)=0\right\};$$

$$\overline{N}=\left\{j|x_j^0=0\right\}.$$

Тогава условията (2,6,25) и (2.6.28) може да се запишат по следния начин:

$u_i^0=0$ за $i\notin\overline{M}$; $v_j^0=0$ за $j\notin\overline{N}$, т.е.,

$u_i^0=0$ за $g_i(X^0)<0$ и $v_j^0=0$ за $x_j^0>0$.

Окончателно получаваме, че (2.6.24) и (2.6.29) са еквивалентни на следните условия:

точката X^0 е допустима и (2.6.30)

$$-\nabla f(X^0)=\sum_{i\in\overline{M}}u_i^0\nabla g_i(X^0)+\sum_{j\in\overline{N}}v_j^0(-l_j);\qquad(2.6.31)$$

$$u_i^0\geq 0 \text{ за } i\in\overline{M};\qquad(2.6.32)$$

$$v_j^0\geq 0 \text{ за } j\in\overline{N}.\qquad(2.6.33)$$

Ако са изпълнени условията (2.6.30) — (2.6.33), изпълняват се и условията (2.6.24) — (2.6.29), при което

$$u_i^0=0 \text{ за } i\notin\overline{M} \text{ и } v_j^0=0 \text{ за } j\notin\overline{N}.$$

Следователно условията (2.6.30) — (2.6.33) са необходими и достатъчни, за да бъде точката X^0 решение на задачата (2.6.4), (2.6.5) и (2.6.6).

От тези условия следва, че в оптималната точка X^0 отрицателният градиент на минимизируемата функция $f(X)$ може

да се представи като неотрицателна линейна комбинация на външните нормали на хиперповърхнините, на които принадлежи точката X^0. Нагледно това е показано на фиг. 2.6.1.

Ако условията са линейни, т.е.

$$g_i(X)=A_i.X-b_i, \text{ то } \nabla g_i(X)=A_i.$$

Условието (2.6.31) добива вида

$$-\nabla f(X^0)=\sum_{i\in\overline{M}}u_i^0A_i.+\sum_{j\in\overline{N}}v_j^0(-l_y).$$

Условията на Кун и Такер (2.6.24) — (2.6.29) или (2.6.30) — (2.6.33) остават в сила и при някои изменения на условията на задачата. Ако липсват ограниченията $X\geqq 0$, условията (2.6.24) — (2.6.26) се заменят само с условието

$$\frac{\partial\varphi(X^0,U^0)}{\partial X}=0.\qquad(2.6.34)$$

(В случая представяме X като разлика на два положителни вектора.)

Ако условията са линейни от вида

$$g_i(X)=0,$$

условията (2.6.27) — (2.6.29) се заменят от условието

$$\frac{\partial\varphi(X^0,U^0)}{\partial U}=0.\qquad(2.6.35)$$

(В случая $g_i(X)=0$ се заменя с неравенствата $g_i(X)\leq 0$ и $-g_i(X)\leq 0$. Векторът U не е вече ограничен по знак.)

Когато ограниченията са линейни от вида $g_i(X)=0$, $i=1,2,\ldots,m$ и нямаме ограничения по знака на вектора X, условията (2.6.24) — (2.6.29) се заменят само от двете условия (2.6.34) и (2.6.35). Това е известният в класическия анализ метод на множителите на Лагранж.

4. МЕТОДИ ЗА РЕШАВАНЕ НА ЗАДАЧИТЕ НА ИЗПЪКНАЛОТО ПРОГРАМИРАНЕ

За решаване на задачите на изпъкналото програмиране се използват преди всичко градиентните методи. За да получим представа за същността им, нека разгледаме най-напред задачата за минимизиране на изпъкналата функция $f(X)$ без ограничения за X, т.е.

$$\min f(X),$$
$$X\in E^n.$$

На фиг. 2.6.4 са изобразени линиите на ниво на функцията $f(X)$.

Ако функцията $f(X)$ е диференцируема, решението на системата

$$\frac{\partial f(X)}{\partial x_j}=0,\ j=1,2,\ldots,n \tag{2.6.36}$$

дава точката, в която функцията достига абсолютния си минимум. Когато системата диференцирани уравнения не се решава лесно, постъпваме по следния начин. Вземаме произволна точка X^1 и от нея се движим в направление, обратно на направлението на вектора-градиент $\nabla f(X^1)$ до точка X^2.

$$X^2=X^1-\lambda_1\nabla f(X^1).$$

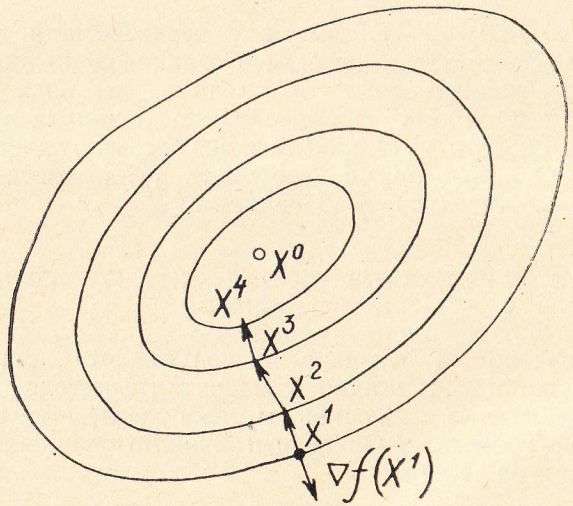
От точка X^2 се движим до точка X^3.

$$X^3=X^2-\lambda^2\nabla f(X^2).$$

Ако се намираме в точка X^t, от нея се движим в направление, обратно на вектора-градиент $\nabla f(X^t)$, до точка

$$X^{t+1}=X^t-\lambda_t\nabla f(X^t) \tag{2.6.37}$$

и т.н. Така получаваме една последователност от точки $\{X^t\}$, която се стреми към точката X^0. Основен въпрос тук остава



Фиг. 2.6.4

въпросът за избора на големините на стъпките $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_t,\ldots$ по такъв начин, че $\{X^t\}$ да клони към точката X^0. Ако λ_t е голямо, може да се случи да „прескочим“ точката X^0. Поради това понякога всички λ_t се вземат достатъчно малки и равни помежду си. По този начин точката X^0 не се достига точно, но X^t се намира в достатъчно малка околност на X^0.

Големината на λ_t може до се определи по следния начин. Образуваме функцията

$$\varphi(\lambda)=f(X^t)-\lambda\nabla f(X^t) \tag{2.6.38}$$

и търсим

$$\min\varphi(\lambda),$$
$$\lambda\geq 0.$$

Нека той се достига за $\lambda=\lambda_t$, тогава

$$X^{t+1}=X^t-\lambda_t\nabla f(X^t).$$

Този метод се нарича м е т о д н а н а й-б ъ р з о т о с п у с к а н е. Това е един практически метод за решаване на системата (2.6.36).

Ако вземем произволна точка X^1, можем да поставим и въпроса: може ли да се движим от X^1 към X^0 по такъв начин, че направлението на движение да съвпада постоянно с направлението на антиградиента $\Delta f(X)$ във всяка точка. Траекторията на движение се нарича о п т и м а л н а т р а е к т о р и я и се определя от решението на диференциалното уравнение

$$\frac{dX(t)}{dt}=-\nabla f(X) \tag{2.6.39}$$

при началното условие

$$X(0)=X^1. \tag{2.6.40}$$

Числената схема за решаване на това векторно диференциално уравнение е

$$X(t+1)=X(t)-\lambda_t\nabla f\Big(X(t)\Big), \tag{2.6.41}$$

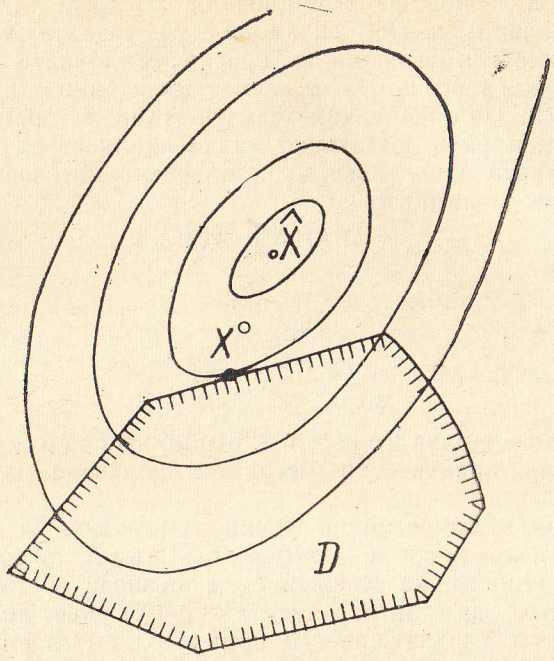
т.е. това е схемата на разгледания градиентен метод.

Да се спрем сега на задачата с ограничения

$$\min_{X\in D} f(X), \tag{2.6.42}$$

където $D=\Big\{X\big|g_i(X)\leqslant 0$ и $X\geq 0\Big\}$.

Този случай е показан на фиг. 2.6,5.



Фиг. 2.6.5

Стремим се да сведем задачата (2.6.42) към задача без ограничения. Нека с U_i означим „големината“ на неизпълнението на i-тото ограничаващо условие на една единица. Разглеждаме функцията

$$\varphi(X,U)=f(X)+\sum_{i=1}^{m} u_i\, g_i(X)$$

и търсим нейната минимална стойност, като се стремим да определим най-добре величините u_i, $i=1,2,\ldots,m$, т.е. да намерим

$$\max_{U}\ \min_{X}\ \varphi(X,U) \qquad (2.6.43)$$

при условията

$$X\geq 0,\ U\geq 0. \qquad (2.6.43)$$

Това е задачата за определяне на седловата точка на функцията на Лагранж.

Вземаме произволна точка (X^1,U^1) и се движим от точката X^1 по посока, обратна на вектора-градиент на функцията $\varphi(X,U)$ по X, и от точката U^1 — по посока на вектора-градиент на функцията $\varphi(X,U)$ по U.

Ако означим

$$\varphi_x(X,U)=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1},\ \frac{\partial\varphi}{\partial x_2},\ \ldots,\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}\right);$$

$$\varphi_u(X,U)=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u_1},\ \frac{\partial\varphi}{\partial u_2},\ \ldots,\frac{\partial\varphi}{\partial u_m}\right);$$

$$\varphi x_j(X,U)=\frac{\partial\varphi}{\partial x_j},\ \varphi u_i(X,U)=\frac{\partial\varphi}{\partial u_i};$$

$$j=1,2,\ldots,n,\ \ i=1,2,\ldots,m,$$

оптималните траектории $X(t)$ и $U(t)$ се определят от решението на следната система диференциални уравнения:

$$\frac{dx_j(t)}{dt}=\begin{cases}-\varphi x_j(X,U), & \text{ако } x_j>0 \text{ или } x_j=0, \text{ но } \varphi x_j<0;\\ 0 & \text{ако } x_j=0 \text{ и } \varphi x_j\geq 0;\end{cases}$$

$$\text{за } j=1,2,\ldots,n;$$

$$\frac{du_i(t)}{dt}=\begin{cases}-\varphi u_i(X,\ U), & \text{ако } u_i>0 \text{ или } u_i=0, \text{ но } \varphi u_i<0;\\ 0 & \text{ако } u_i=0 \text{ и } \varphi u_i\geq 0;\end{cases}$$

$$\text{за } i=1,\ 2,\ldots,\ m;$$

$$x_j(0)=x_j^1 \text{ за } j=1,\ 2,\ldots,\ n;$$

$$u_i(0)=u_i^1 \text{ за } i=1,\ 2,\ldots,\ m.$$

Ако $\varphi(X,U)$ е строго изпъкнала по X,

$$X(t)\to X^0 \text{ при } t\to\infty.$$

Числената схема за решаване на тази система е

$$x_j(t+1)=\begin{cases}x_j(t)-f_t\,\varphi_{xj}(X,\ U)\\ 0, \text{ ако } x_j(t)-f_t\,\varphi_{xj}(X,\ U)<0\end{cases}$$

$$\text{за } j=1,\ 2,\ldots,\ n \qquad (2.6.45)$$

$$u_i(t+1)=\begin{cases}u_i(t)-f_t\,\varphi u_i(X,\ U)\\ 0, \text{ ако } u_i(t)-f\end{cases}$$

$$\text{за } i=1,\ 2,\ldots,\ m,$$

т. е.

$$x_j(t+1)=\max(0,\ x_j(t)-f_t\,\varphi_{xj}); \qquad (2.6.46)$$

$$u_i(t+1)=\max(0,\ u_i(t)-f_t\varphi u_i).$$

Този метод е известен като метод на „наказателните“ функции.

Друг метод за решаване на задачите на изпъкналото програмиране е методът на възможните направления.

Както отбелязахме, ако сечението на множеството от подходящи и възможни направления е празно за точката X^0, тя е оптималната точка. Ако за някоя точка X сечението

не е празно, съществува направление s, което е и възможно, и подходящо.

Ако X^1 е произволна точка и s_1 е възможно и подходящо направление, от X^1 се движим по направление s_1 до точка X^2

$$X^2=X^1+\lambda_1 s_1,$$

и т. н.

$$X^{t+1}=X^t+\lambda_t s_t.$$

Различните методи, които използуват тази идея, се различават по начина на определяне на направленията s_t и големините на числата λ_t.

5. КВАДРАТИЧНО ПРОГРАМИРАНЕ

5.1. Постановка на задачите на квадратичното програмиране

Ако функцията $f(X)$ е изпъкнала квадратична функция

$$f(X)=PX+XCX,$$

където P е n-мерен вектор, C — n-мерна положително полуопределена матрица, а ограничаващите условия са линейни, т. е.

$$g_i(X)=A_i . X-b_i\leq 0 \text{ за } i=1, 2,\ldots, m$$

и $X\geq 0$, тогава тези задачи на изпъкналото програмиране се наричат задачи на квадратичното програмиране.

Следователно задачите на квадратичното програмиране имат следния вид:

$$min f(X)=PX+XCX$$

при ограничаващи условия

$$AX\leq B;$$
$$X\geq 0.$$

Ограничаващите условия може да имат още вида

$$AX=B;$$
$$X\geq 0$$

или само

$$AX\leq B$$

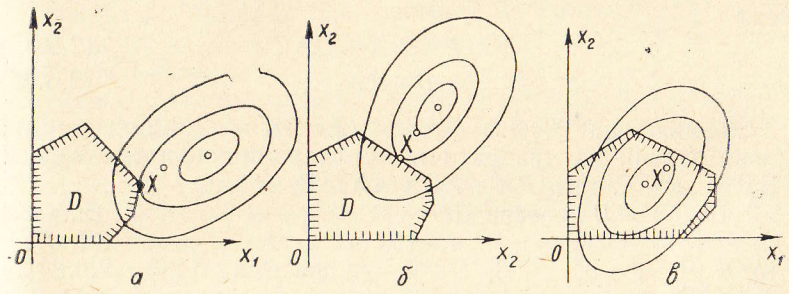
без ограничения по знак за вектора X. Тези три формулировки на задачите на квадратичното програмиране се наричат съответно задачи I, II и III и за по-кратко се записват по следния начин:

I: $\min\{PX+XCX \mid AX\leq B,\ X\geq 0\}$;

II: $\min\{PX+XCX \mid AX=B,\ X\geq 0\}$;

III: $\min\{XP+XCX \mid AXB\leq\}$.

От линейното програмиране знаем как можем да преминем от задача I или III към задача II и от задача II или III към задача I. Следователно задачи II и III по същество не ес различават от задача I, но този начин на записване позволява да се правят някои математически опростявания при разглеждане на методите за решаването им.



Фиг. 2.6.6

Нека дадем кратка геометрична интерпретация на задача I в случая, когато $X\in E^2$. Да предположим, че матрицата C е положително определена. В този случай функцията $f(X)$ е строго изпъкнала и линиите на ниво $f(X)=\text{const}$ са елипси с център безусловния минимум на $f(X)$.

Областта, определена от ограничаващите условия, както и в линейното програмиране, е изпъкнал многостен. Трябва да се намери такава точка, принадлежаща на многостена, която лежи на линията на ниво с най-малка стойност на константата. В двумерното пространство са възможни трите случая, показани на фиг. 2.6.6, а, б и в.

За разлика от линейното програмиране квадратичната функция $f(X)$ може да достигне своя минимум както в гранична, така и във вътрешна точка на областта D. Следователно в точката X^0 като равенства ще се изпълняват не точно m, както в линейното програмиране, когато няма изродност, а не повече от m ограничаващи условия.

5.2. Условия на Кун и Такер за задачите на квадратичното програмиране

Функцията на Лагранж за задачи I, II и III има вида

$$\varphi(X,\ U)=f(X)+\sum_{i=1}^{m}u_i(A_i.X-b_i)=PX+XCX+U(AX-B).$$

Да въведем означенията

$$\frac{\partial\varphi}{dX}=V,\quad -\frac{\partial\varphi}{\partial U}=Y.$$

Тогава

$$V=P+2(X+UA); \tag{2.6.47}$$

$$Y=B-AX. \tag{2.6.48}$$

Условията на Кун и Такер (2.6.24) — (2.6.29) за трите основни задачи на квадратичното програмиране добиват вида:

За задача I. $\min\{PX+XCX|AX\leq B,\ X\geq 0\}$:

а) $AX+Y=B$, следва от (2.6.48);

б) $2(X-V+A_TU=-P$, следва от (2.6.47);

в) $X\geq 0$, $V\geq 0$, $Y\geq 0$, $U\geq 0$, следва от (2.6.26), (2.6.24) и (2.6.27);

г) $XV+YU=0$, следва от (2.6.25) и (2.6.28).

За задача II. $\min\{PX+XCX|AX=B,\ X\geq 0$:

а) $AX=B$, следва от (2.6.36);

б) $2(X-V+A^TU=-P$, следва от (2.6.42);

в) $Y\geq 0$, $V\geq 0$, следва от (2.6.26) и (2.6.24);

г) $XV=0$, следва от (2.6.25)

За задача III. $\min\{PX+XCX:AX\leq B\}$:

а) $AX+Y=B$, следва от (2.6.48);

б) $2(X+A^TU)=-P$, следва от (2.6.34);

в) $Y\geq 0$, $U\geq 0$, следва от (2.6.27) и (2.6.29);

г) $YU=0$, следва от (2.6.28).

От тези условия следва, че допустимият вектор X^0 е решение на задача I тогава и само тогава, когато заедно с n-мерния вектор V^0 съществуват и двата m-мерни вектора U^0 и Y^0 такива, че $(X^0,\ V^0,\ U^0,\ Y^0)$ удовлетворява условия а) — г) за задача I.

Аналогични твърдения са справедливи и за задачи II и III. За задача II векторът X^0 е решение тогава и само тогава, когато $(X^0,\ V^0,\ U^0)$ удовлетворяват условията а) — г) за задача II, а за задача III — когато $(X^0,\ U^0,\ Y^0)$ удовлетворяват съответните условия за задача III.

Условията $а$, $б$ и $в$ са линейни. Условието $г$ е нелинейно комбинаторно условие. То изисква от всеки две ограничени по знак променливи x_j и v_j (съответно u_i и y_i) поне една да е равна на нула. Следователно всички решения на линейната система а) — в), които удовлетворяват условието $г$, се характеризират с това, че имат най-много m+n различни от нула компоненти. Да отбележим, че условията $а$ и $б$ съдържат точно m+n равенства. Решения, които удовлетворяват условията $а$, $б$ и $в$, са базисните и измежду тях трябва да се търси решението, удовлетворяващо и условието $г$.

Решаването на задачата на квадратичното програмиране се свежда до намиране на решение на системата а) — г), за което може да се използува симплексният метод в някаква изменена форма.

Лема 1. Изпълнението на условията $а$, $б$ и $в$ е необходимо и достатъчно да съществува решение на задачите на квадратичното програмиране.

Доказателство. Необходимостта е очевидна, тъй като всяко решение на задачата удовлетворява условията $а$, $б$ и $в$.

Нека достатъчността на условията докажем за задача I.

Ако съществуват такива X^1, V^1, U^1, Y^1, които удовлетворяват условията $а$, $б$ и $в$ за задача I, X^1 е допустимото решение, тъй като от условията $а$ и $в$ следва

$$AX\leq B,\ X^1\geq 0,$$

т. е. X^1 е допустимото решение. Ако векторът X също е допустимо решение, то

$$f(X)=f(X^1)\geq(X-X^1)\frac{\partial f(X^1)}{\partial X}=(X-X^1)(P+2CX^1)=$$

$$=(X-X^1)(V^1-A^TU^1)=XV^1-X^1V^1+X^1A^TU^1-XA^TU^1=$$

$$=XV^1-X^1V^1+(B-Y^1)U^1-(B-Y)U^1=$$

$$=XV^1-X^1V^1+BU^1-Y^1U^1-BU^1+YU^1=$$

$$=XV^1+YU^1-(X^1V^1+Y^1U^1)\geq-(X^1V^1+Y^1U^1).$$

(Следва от $X\geq 0$, $V^1\geq 0$, $Y\geq 0$, $U^1\geq 0$.)

Така получаваме

$$f(X)\geq f(X^1)-(X^1V^1+Y^1U^1).$$

Следователно функцията $f(X)$ е ограничена отдолу и тъй като областта $\Delta\neq 0$, тя достига своята минимална стойност.

За решаване на задачите на квадратичното програмиране

може да се използуват градиентните методи, прилагани за решаване на задачите на изпъкналото програмиране. Те се опростяват значително поради елементарния вид на функцията $f(X)$ и линейността на ограничаващите условия. Освен това са разработени редица методи, които използуват в основата си симплексните преобразования за решаване на системата $а$ — $г$, т. е. за задачите на квадратичното програмиране. От тази група ще разгледаме само метода на Вулф и Франк.

6. МЕТОД НА ВУЛФ И ФРАНК

Нека разгледаме задача I: $\min\{PX+XCX \mid AX<B,\ X\geq 0\}$. Векторът X^0 е нейно решение тогава и само тогава, когато заедно с вектора V^0 съществуват векторите U^0 и Y^0 такива, че (X^0, V^0, U^0, Y^0) удовлетворява условията:

$$\begin{aligned} &а)\ AX+Y\ =B;\\ &б)\ 2CX-V+A^TU=-P;\\ &в)\ X\geq 0,\ Y\geq 0,\ V\geq 0,\ U\geq 0;\\ &г)\ XV+YU=0. \end{aligned} \tag{2.6.49}$$

Да въведем следните означения:

$$Z=(X,\ Y,\ V,\ U);\ \widetilde{Z}(V,\ U,\ X,\ Y);$$

$$S=\left(\begin{array}{c|c|c|c} A & E & 0 & 0 \\ \hline 2C & 0 & -E & A^T \end{array}\right);\quad D=\begin{pmatrix} B \\ -P \end{pmatrix}.$$

Векторите Z и $\widetilde{Z}$ са $2(n+m)$-мерни вектори-стълбове и $Z\geq 0$, $\widetilde{Z}\geq 0$, тъй като е изпълнено условието $в$. Векторът D $l(m+n)$-мерен, а матрицата S има размери $(m+n)\times 2(m+n)$, т. е.

$$S=\left(\begin{array}{c|c|c|c} \begin{matrix}A\end{matrix}^{n} & \begin{matrix}E\end{matrix}^{m} & \begin{matrix}0\end{matrix}^{n} & \begin{matrix}0\end{matrix}^{m} \\ \hline \begin{matrix}2C\end{matrix}^{n} & \begin{matrix}0\end{matrix}^{m} & \begin{matrix}-E\end{matrix}^{n} & \begin{matrix}A^T\end{matrix}^{n} \end{array}\right).$$

Тогава условията $а$, $б$ и $в$ може да се запишат по следния начин:

$$\begin{aligned} SZ&=D;\\ Z&\geq 0, \end{aligned} \tag{2.6.50}$$

а условието $г$ — $Z\widetilde{Z}=0$, тъй като $Z\widetilde{Z}=2(XV+YU)$.

По този начин на задача I съпоставяме задачата

$$\min R(Z)=Z\widetilde{Z} \tag{2.6.51}$$

при следните условия:

$$\begin{aligned} SZ&=D;\\ Z&\geq 0. \end{aligned} \tag{2.6.52}$$

Ако $\min R(Z)=0$ за $Z^0=(X^0,\ Y^0,\ V^0,\ U^0)$, X^0 е решение на задача I, тъй като Z^0 удовлетворява условията $а$ — $г$.

Да отбележим, че всяко базисно решение Z на задача (2.6.51), (2.6.52) съдържа най-много $m+n$ положителни компоненти, тъй като матрицата S има $m+n$ реда, следователно може да съдържа най-много $m+n$ линейно независими вектори.

За решаване на задача (2.6.51) при условия (2.6.52) трябва да имаме начален опорен план. Построяваме го по метода на изкуствения базис. Въвеждаме изкуствените променливи $t_1, t_2,\ldots, t_n$, които прибавяме съответно към последните n равенства. Така различните от нула $m+n$ компоненти на началния план са

$$y_1=b_1,\ y_2=b_2,\ldots,\ y_m=b_m,\ t_1=-p_1,\ t_2=-p_1,\ldots,\ t_n=-p_n.$$

Решаваме задачата

$$\min\left(\sum_{k=1}^{2(m+n)} Z_k\widetilde{Z}_k+\sum_{j=1}^{n} t_j\right) \tag{2.6.53}$$

при

$$\begin{aligned} SZ+FT&=0,\\ Z\geq 0,\ T&\geq 0, \end{aligned}$$

където матрицата F има вида

$$F=\begin{pmatrix}0_{m\times n}\\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ E_{n\times m}\end{pmatrix}=\begin{Vmatrix}0&0&\cdot&\cdot&\cdot&0\\0&0&\cdot&\cdot&\cdot&0\\ \cdot&\cdot&&&&\cdot\\ \cdot&\cdot&&&&\cdot\\ \cdot&\cdot&&&&\cdot\\0&0&\cdot&\cdot&\cdot&0\\0&0&\cdot&\cdot&\cdot&0\\1&0&\cdot&\cdot&\cdot&0\\0&1&\cdot&\cdot&\cdot&0\\ \cdot&\cdot&&&&\cdot\\ \cdot&\cdot&&&&\cdot\\ \cdot&\cdot&&&&\cdot\\0&0&\cdot&\cdot&\cdot&1\end{Vmatrix}.$$

Първоначално решаваме задачата

$$\min\sum_{j=1}^{n}t_j$$

при

$$SZ+FT=0;\quad Z\geq 0,\ T\geq 0. \tag{2.6.54}$$

Ако $\min\sum_{j=1}^{n}t_j=0$, т. е. всички изкуствени променливи са равни на нула, получаваме едно базисно решение на задача (2.6.51), (2.6.52). Нека го означим с Z^1. По-нататък линеализираме функцията $R(Z)$, като полагаме $W^1=Z^1$ и намираме $\widetilde{W}^1=\widetilde{Z}^1$. Чрез симплексния метод търсим минимума на

$$Z\,\widetilde{W}^1 \tag{2.6.55}$$

при условия (2.6.52). Получаваме последователните базисни решения

$$Z^1,\ Z^2,\ldots,\ Z^\kappa,\ldots,$$

като

$$Z^1\widetilde{W}^1>Z^2\widetilde{W}^1>\ldots>Z^\kappa\,\widetilde{W}^1\ldots$$

Преустановяваме процеса на решаване, ако се изпълнява едно от следните условия:

а) $Z^\kappa.\widetilde{Z}^\kappa=0$;

б) $Z^\kappa\,\widetilde{W}^1\leq\frac{1}{2}W^1\,\widetilde{W}^1=\frac{1}{2}R(W^1)$.

В първия случай Z^κ е окончателното решение на задачата, т. е. $Z^\kappa=Z^0$. Във втория случай полагаме

$$W^2=W^1+\lambda(Z^\kappa-W^1)=\lambda Z^\kappa+(1-\lambda)W^1,$$

където

$$\lambda=\min\left\{1,\ \frac{(W^1-Z^\kappa)\ \widetilde{W}^1}{(Z^\kappa-W^1)\ (Z^\kappa-\widetilde{W}^1)}\right\}, \tag{2.6.56}$$

т. е. W^2 е изпъкнала линейна комбинация на точките W^1 и Z^κ.

Точката W^2 или съвпада с точката Z^κ, или в нея функцията $R(Z)$ достига минималната си стойност на отсечката $(W^1,\ Z^1)$.

Наистина

$$R(W^2)=(W^1+\mu(Z^\kappa-W^1)(\widetilde{W}^1+\mu(\widetilde{Z}^\kappa-\widetilde{W}^1))=$$

$$=W^1\widetilde{W}^1+\mu W^1(\widetilde{Z}^\kappa-\widetilde{W}^1)+\mu(Z^\kappa-W^1)\widetilde{W}^1+$$

$$+\mu^2(Z^\kappa-W^1)(\widetilde{Z}^\kappa-\widetilde{W}^\kappa).\ \text{От}\ \frac{\partial R(W^2)}{\partial\mu}=W^1(Z^\kappa-\widetilde{W}^\kappa)+$$

$$(Z^\kappa-W^1)\widetilde{W}^1+2\mu(Z^\kappa-W^1)(\widetilde{Z}^\kappa-\widetilde{W}^\kappa)=0$$

следва, че $2(Z^\kappa-W^1)\widetilde{W}^1+2\mu(Z^\kappa-W^1)(\widetilde{Z}^\kappa-\widetilde{W}^1)=0$, т. е.

$$\mu=\frac{(W^1-Z^\kappa)\widetilde{W}^1}{(Z^\kappa-W^1)\ (\widetilde{Z}^\kappa-\widetilde{W}^1)}.$$

Избираме $\lambda=\min\{1,\ \mu\}$, т. е. формула (2.6.56). Линеализираме функцията $R(Z)$ в точката $Z=W^2$ и търсим минимума на линейната функция

$$Z\widetilde{W}^2$$

при условия (2.6.52), като за базисно решение използуваме решението Z^κ.

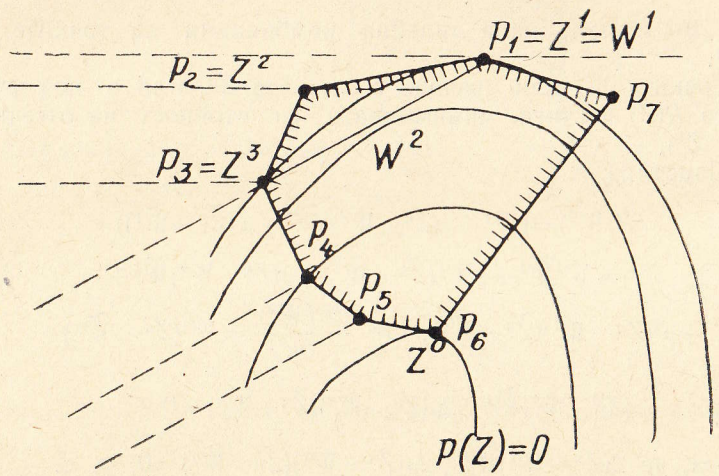
Вулф и Франк доказват, че след краен брой повтаряния на този етап [линеализиране на $R(Z)$ и минимизиране на линейната форма при условия (2.6.52)] се достига до случай a, така че процесът е сходящ и води до решаване на задачата.

На фиг. 2.6.7 е показан пример, на който геометрично е илюстрирана същността на метода на Вулф и Франк.

Областта D, определена от ограничаващите условия (2.6.52) в двумерния случай, е многоъгълник с върхове P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7. Решение на задачата е върхът P_6.

Нека началният опорен план да съвпада с точката $P_1 = Z_1 = W_1$. Линеализираме функцията $R(Z)$ в точката $Z = W^1$ и я минимизираме с помощта на симплексния метод, при което получаваме

$$Z^2 = P^2, \quad Z^3 = P_3.$$



Фиг. 2.6.7

Нека за точката $Z^3 = P_3$ е изпълнено условието *б*. За точка W^2 вземаме точката от отсечката $[Z^3, W^1]$, в която функцията $R(Z)$ достига минималната си стойност. Линеализираме функцията $R(Z)$ в точката $Z = W^2$ и минимизираме получената линейна функция по симплексния метод, като за начално базисно решение вземаме точката $Z^3 = P_3$. Така получаваме новите базисни решения $P_4 = Z^1, P_5 = Z^2$, като за Z^2 се удовлетворява условието *б*. Определяме $W^3 = Z^2 = P_5$, линеализираме $R(Z)$ в $Z = W^3$ и я минимизираме, при което получаваме $Z^1 = P_6$ и за P_6 е изпълнено условието *а*, т. е. получаваме решението на задачата $Z^0 = P_6$.

Да разгледаме примера

$$\min F(X) = -x_1 - 2x_2 + \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2$$

при следните условия:

$$2x_1 + 3x_2 \leq 6;$$
$$x_1 + 4x_2 \leq 5;$$
$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

В случая

$$P = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix};$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Определяме:

$$Z = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \\ v_1 \\ v_2 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \\ z_6 \\ z_7 \\ z_8 \end{pmatrix}; \quad \tilde{Z} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ u_1 \\ u_2 \\ x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix};$$

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Получаваме следната задача:

$$\min R(Z)$$

при

$$SZ = D;$$
$$Z \geq 0.$$

За да намерим начален опорен план, въвеждаме изкуствените променливи $z_9 = t_1$ и $z_{10} = t_2$, които добавяме съответно към третото и четвъртото равенство и търсим

$$\min L(T) = t_1 + t_2 = z_9 + z_{10}$$

при следните условия:

$$\begin{aligned} 2z_1+3z_2+z_3 &= 6;\\ z_1+4z_2+z_4 &= 5;\\ z_1-z_5+2z_7+z_8+z_9 &= 1;\\ z_2-z_6+z_7+4z_8+z_{10} &= 2;\\ z_j \geq 0,\ j=1,\ 2,\ldots,\ 10. & \end{aligned}$$

Началният опорен план ще има вида

$$\overline{Z}=(0,\ 0,\ 6,\ 5,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 2),$$

а началният базис се състои от векторите P_3, P_4, P_9 и P_{10}. Решаваме задачата по симплексния метод (таблица 2.6.1). След третата итерация получаваме $\min L(T)=0$. Следователно е намерено едно базисно решение на задачата

$$\min R(Z)=Z.\widetilde{Z}$$

при следните условия:

$$\begin{aligned} 2z_1+3z_2+z_3 &= 6;\\ z_1+4z_2+z_4 &= 5;\\ z_1-z_5+2z_7+z_8 &= 1;\\ z_2-z_6+3z_7+4z_8 &= 2;\\ z_j \geq 0,\quad j=1,\quad 2,\ldots,\ 8. & \end{aligned}$$

Това базисно решение е

$$Z^1=\left(0,\ 0,\ 6,\ 5,\ 0,\ 0,\frac{2}{5},\ \frac{1}{5}\right).$$

Тогава

$$W^1=Z^1,\widetilde{W}^1=\left(0,\ 0,\ \frac{2}{5},\ \frac{1}{5},\ 0,\ 0,\ 6,\ 5\right).$$

Тъй като $W^1\,\widetilde{W}^1>0$, още не е получено решение на задачата.

Линеализираме функцията $R(Z)$ в точката $Z=\widetilde{W}^1$ и търсим

$$\min L(Z)=Z\widetilde{W}^1=6z_5+5z_4+\frac{2}{5}z_7+\frac{1}{5}z_8$$

при същите ограничаващи условия. Решението е дадено в таблица 2.6.2, а, б, в.

Таблица 2.6.1

Q	Целеви стълб	Стълб на базиса	X	$c_1=0$ P_1	$c_2=0$ P_2	$c_3=0$ P_3	$c_4=0$ P_4	$c_5=0$ P_5	$c_6=0$ P_6	$c_7=0$ P_7	$c_8=0$ P_8	$c_9=0$ P_9	$c_{10}=0$ P_{10}	Ред на векторите
	0	P_8	6	2	3	1	0	0	0	0	0	0	0	Целеви ред
	0	P_4	5	1	4	0	1	0	0	0	0	0	0	Ключов ред
1/2	1	P_9	1	1	0	0	0	−1	0	2	1	1	0	
2/3	1	P_{10}	2	0	1	0	0	0	−1	3	4	0	1	Индексен ред
			L(T)=3	1	1	0	0	−1	−1	5	5	0	0	
										Ключов стълб				
	0	P_3	6	2	3	1	0	0	0	0	0	0	0	
	0	P_4	5	1	4	0	1	0	0	0	0	0	0	
	0	P_7	1/2	1/2	0	0	0	−1/2	0	1	1/2	1/2	0	
	1	P_{10}	1/2	−3/2	1	0	0	3/2	−1	0	5/2	−3/2	1	Ключов ред
1/5			L(T)=1/2	−3/2	1	0	0	3/2	−1	0	5/2	−5/2	0	
											Ключов стълб			
	0	P_3	6	6	3	1	0	0	0	0	0			
	0	P_4	5	1	4	0	1	0	0	0	0			
	0	P_7	2/5	4/5	−1/5	0	0	−4/5	1/5	1	0			
	0	P_8	1/5	−3/5	2/5	0	0	3/5	−2/5	0	1			Главен ред
			L(T)=0	0	0	0	0	0	0	0	0			

Таблица 2. 6. 2,а

θ	Целеви стълб	Стълб на базиса	Z	0	0	2/5	1/5	0	0	6	5	Целеви ред
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	Ред на векторите
3	2/5	P_3	$6=y_1$	2	3	1	0	0	0	0	0	
5	1/5	P_4	$5=y_2$	1	4	0	1	0	0	0	0	
1/2	6	P_7	$2/5=u_1$	[4/5]	−1/5	0	0	−4/5	1/5	1	0	
	5	P_8	$1/5=u_2$	−3/5	2/5	0	0	3/5	−2/5	0	1	
$L(Z)=Z\widetilde{W}^1=34/5$				14/5	14/5	0	0	−9/5	−4/5	0	0	Индексен ред

Пресмятаме $\frac{1}{2}W^1\widetilde{W}^1=\frac{17}{5}$. Тъй като $Z^1\widetilde{W}^1=\frac{34}{5}>\frac{1}{2}W^1\widetilde{W}^1$,

пресмятанията продължават. Попълваме следващата симплексна таблица 2.6.2,б.

Таблица 2. 6. 2,б

	2/5	P_3	$5=y_1$	0	7/2	1	0	2	−1/2	−5/2	0	
	1/5	P_4	$9/2=y_2$	0	[17/4]	0	1	1	−1/4	−5/4	0	
	0	P_1	$1/2=x_1$	1	−1/4	0	0	−1	+1/4	5/4	0	
	5	P_8	$1/2=u_1$	0	1/4	0	0	0	−1/4	3/4	1	
$L(Z)=Z\widetilde{W}^1=$			27/5	0	7/2	0	0	+1	−3/2	−7/2	0	Индексен ред

Получаваме $Z^2=\left(\frac{1}{2},\ 0,\ 5,\ \frac{9}{2},\ 0,\ 0,\ 0,\frac{1}{2}\right);\widetilde{Z}^2=\left(0,\ 0,\ 0,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 0,5,\frac{9}{2}\right)$.

Пресмятаме $Z^2\widetilde{Z}^2=\frac{9}{2}\neq 0$. Тъй като условие *а*) не е изпълнено, проверяваме за условие *б*): $Z^2=\widetilde{W}^1=\frac{27}{5}\leqq\frac{17}{5}$. То също не е изпълнено и пресмятанията продължават (таблица 2.6.2, *в*).

Таблица 2. С. 2,1

	2/5	P_3	$22/17=y_1$	0	0	1	—14/17	20/17	—5/17	—25/17	0	
	0	P_2	$18/17=x_2$	0	1	0	4/17	4/20	—1/17	—5/17	0	
	0	P_1	$13/17=x_1$	1	0	0	1/17	—16/17	4/17	20/17	0	
	5	P_8	$4/17=u_2$	0	0	0	—1/17	—1/17	—4/17	14/17	1	
$L(Z)=ZW^1=144/85$				0	0	0	—14/17	3/17	—22/17	—42/17	0	Индексен ред

Полученото решение означаваме с $Z^3.Z^3=\left(\frac{13}{17}, \frac{18}{17}, \frac{22}{17}, 0, 0, 0, \frac{4}{17}\right)$; $\widetilde{Z}^3=\left(0, 0, 0, \frac{4}{17}, \frac{13}{17}, \frac{18}{17}, \frac{22}{17}, 0\right)$. Пресмятаме $R(Z)=Z^3\widetilde{Z}^3$.

Тъй като $R(Z)=0$, условието a) е изпълнено и е намерено решението на задачата. То е

$$X^0=\left(Z_1^3, Z_2^3\right)=\left(\frac{13}{17}, \frac{18}{17}\right).$$

Следователно $f(X)=f(X^0)=-\frac{13}{17}-2\frac{18}{17}+\frac{1}{2}\left(\frac{13}{17}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{18}{17}\right)^2=-\frac{544}{289}$.

Глава седма

ДИНАМИЧНО ПРОГРАМИРАНЕ

1. ЕДНОМЕРЕН ПРОЦЕС НА РАЗПРЕДЕЛЕНИЕ

1. 1. Предмет на динамичното програмиране

Динамичното програмиране е метод за изследване и решаване на задачи за оптимално планиране на процеси и системи, върху състоянието и развитието на които може да се влияе отвън (управляеми процеси).

Структурата на тези процеси, детерминирани или стохастически, има следните по-главни черти: системата се характеризира с известен брой параметри; на всеки етап се прави избор на едно решение от съвкупността на всички допустими решения, в резултат на което параметрите, описващи състоянието на системата, приемат други числени стойности. Целта на последователното преобразуване на параметрите е да се определи екстремумът на някакъв критерий за ефективност, който е функция от параметрите, характеризиращи състоянието на системата.

Методът на динамичното програмиране, който се използува за оптимизиране на управляеми процеси, се състои в съставяне на функционални уравнения, които описват управляемия процес, и решаване на такива уравнения посредством оригинални числени методи.

Основата на динамичното програмиране представлява принципът на оптималност, формулиран от американския математик Р. Белман. Оптималното поведение има това свойство, че каквито и да са първоначалното състояние на системата и решението в началния момент, следващите решения (решенията в следващите етапи) трябва да се вземат така, че да съставляват оптимално поведение относно състоянието на системата, получено в резултат на първото решение.

С помощта на динамичното програмиране може да се решават най-разнообразни задачи от практиката: за разпределение на бойните средства между различните подразделения; за надеждността на схеми, съставени от много компоненти; за разпределение на запасни части по ремонтни бази; за избор на оптимална траектория на балистичната ракета, спътник и т.н. От важно значение за решаване на практически задачи е обстоятелството, че методът на динамичното програмиране се реализира сравнително лесно на електронно-сметачна машина.

1.2. Основно функционално уравнение

Основната задача, която решава динамичното програмиране, е следната:

Да се определи максимумът на функцията

$$R(x_1, x_2, \ldots, x_N)=g_1(x_1)+g_2(x_2)+\ldots+g_N(x_N)$$

при зададени ограничения

$$x_1+x_2+\ldots+x_N=x;\ x_i\geq 0.$$

Тъй като максимумът на функцията R зависи от x и N, можем да определим една система от функции $f_N(x)$ за $N=1, 2,\ldots$ при $x\geq 0$ по следния начин:

$$f_N(x)=\max R(x_1, x_2, \ldots, x_N),$$

където

$$x_i\geq 0 \text{ и } \sum_{i=1}^{N} x_i=x.$$

Но за $f_N(x)$ е изпълнено

$$f_N(x)=\max_{\sum x_i=x,\ x_i>0}[g_N(x_N)+g_{N-1}(x_{N-1})+\ldots+g_1(x_1)]=$$

$$=\max_{0\leq x_N\leq x}\left[\max_{\sum_{i=1}^{N-1} x_i=x-x_N,\ x_i\geq 0}\left(g_N(x_N)+\ldots+g_1(x_1)\right)\right]=$$

$$=\max_{0\leq x_N\leq x}\left[g_N(x_N)+\max_{\sum_{i=1}^{N-1} x_i=x-x_N,\ x_i>0}\left(g_{N-1}(x_{N-1})+\ldots+g_1(x_1)\right)\right]=$$

$$=\max_{0\leq x_N\leq x}\left[g_N(x_N)+f_{N-1}(x-x_N)\right]. \qquad (2.7.1)$$

Рекурентната връзка (2.7.1) се нарича основно функционално уравнение на динамичното програмиране. То ни дава възможност да определим системата от функции $f_N(x)$, стига да е известна $f_1(x)$.

1.3. Числена схема за решаване на основното функционално уравнение

За да намерим в интервала $[0, x_0]$ всички стойности на функцията $f_N(x)$, нека пресметнем стойностите ѝ в дискретни точки от разглеждания интервал, например за точките

$$x=0,\ \Delta,\ 2\Delta,\ldots,\ r\Delta=x_0.$$

Стойностите на $f_N(x)$ за точки, различни от горните, получаваме посредством интерполация. Ако

$$k\Delta<x<(k+1)\Delta,$$

най-простото пресмятане на приблизителната стойност на $f_N(x)$ е от

$$f_N(x)=f_N(k\Delta).$$

По-нататък друга приблизителна стойност на $f_N(x)$ се получава от

$$f_N(x)=f_N(k\Delta)+(x-k\Delta)\frac{f_N((k+1)\Delta)-f_N(k\Delta)}{\Delta}.$$

Максимизацията в (2.7.1) се извършва чрез непосредствено сравняване по следния начин.

При $N=1$ $f_1(x)=\max g_1(x)$. Пресмятаме $g_1(x)$ за $x=0,\ \Delta,\ 2\Delta,\ \ldots,\ x_0$ и намираме $f_1(x)$. Следователно с това определяме и оптималната стратегия x_1, при която $f_1(x)$ достига максималната си стойност.

За $N=2$

$$f_2(x)=\max_{0\leq x_2\leq x}[g_2(x_2)+f_1(x-x_2)], \qquad (2.7.2)$$

Като заместим интервала $[0, x]$ с множеството от дискретни точки, то (2.7.2) се замества с

$$f_2(x)=\max[g_2(k\Delta)+f_1(x-k\Delta)],\ k=0,\ 1,\ \ldots,\ r.$$

По този начин получаваме $f_2(x)$ и стойността на x_2, при която в (2.7.2) се достига максимум. Понеже тази стойност зависи от x, означаваме я с $x_2(x)$.

След тези два етапа от решаването можем да попълним таблица 2.7.1.

В случая $f_1(x)=g_1(x)$ и $x_1(x)=x$.

Таблица 2.7.1 дава решение на двуетапна задача за максимизация по следния начин: ако е дадена стойността на x, преглеждаме стълба $x_2(x)$, докато не намерим съответната стойност на x_2, след което преминаваме към решаване на задачата за максимизация и при едноетапен процес със зададена стойност на $x-x_2(x)$.

Таблица 2.7.1

	$f_1(x)$	$x_1(x)$	$f_2(x)$	$x_2(x)$
0				
2Δ				
2Δ				
.				
.				
.				
rΔ				

Като продължаваме процеса в N етапа, получаваме решението в аналогична таблица, в която се нанасят стойностите на x_N, x_{N-1},..., x_2, x_1, които зависят от стойностите на x.

1.4. Пример за едномерен процес на разпределение

Нека притежаваме някакъв брой бойни средства x_0, които трябва да се разпределят между две подразделения. Да означим с y_0 и x_0-y_0 количествата, които ще получат подразделенията, а с $g(y_0)$ и $h(x_0-y_0)$ — съответната ефективност. Нека да се извършва преразпределение на бойните средства след всеки етап на боя. След един етап общата ефективност е

$$R_1(x_0,\ y_0)=g(y_0)+h(x_0-y_0). \tag{2.7.3}$$

В процеса на бойните действия след първия етап първоначалното количество y_0 се намалява до ay_0, $0\leq a<1$, а величината x_0y_0 — до $b(x_0-y_0)$, $0\leq b<1$.

Броят на останалите средства до началото на втория етап от процеса е равен на

$$x_1=ay_0+b(x_0-y_0). \tag{2.7.4}$$

Изразът (2.7.4) представлява функцията, която преобразува процеса от старото в ново състояние. x_1 може да се

представи още така: $x_1=y_1+(x_1-y_1)$, където $0\leq y_1\leq x_1$. В резултат на новото разпределение (y_1 — единици бойни средства на първото подразделение, x_1-y_1 — на второто) на втория етап ще се получи ефективност

$$g(y_1)+h(x_1-y_1).$$

Общата ефективност от двустепенния процес е

$$R_2(x_0,\ y_0,\ y_1)=g(y_0)+h(x_0-y_0)+g(y_1)+h(x_1-y_1). \tag{2.7.5}$$

Като продължим пресмятанията по същия начин за процес, продължаващ N етапа, получаваме

$$R_N(x_0,\ y_0,\ y_1,\ldots,\ y_{N-1})=g(y_0)+h(x_0-y_0)+\ldots+g(y_{N-1})+h(x_{N-1}-y_{N-1}), \tag{2.7.6}$$

където:

$$\begin{aligned} &x_1=ay_0+b(x_0-x_0), && 0\leq y_0\leq x_0;\\ &\quad\ldots\ldots\ldots && \ldots\ldots\\ &x_{N-1}=ay_{N-2}+b(x_{N-2}-y_{N-2}), && 0\leq y_{N-2}\leq x_{N-2};\\ & && 0\leq y_{N-1}\leq x_{N-1}. \end{aligned} \tag{2.7.7}$$

Задачата е да получим максимална ефективност, т. е. да максимизираме R_N, като избираме съответната съвкупност от стойности y_i, $i=0,\ 1,\ldots,\ N-1$.

В съответствие с (2.7.2) и принципа на оптималността получаваме за $f_N(x_0)$ и R_N:

$$f_1(x_0)=\max[g(y_0)+h(x_0-y_0)]; \tag{2.7.8}$$

$$f_1(x_0)=f_1[ay_0+b(x_0-y_0)]; \tag{2.7.9}$$

$$R_2(x_0,\ y_0,\ y_1)=g(y_0)+h(x_0-y_0)+f_1[ay_0+b(x_0-y_0)]; \tag{2.7.10}$$

$$f_2(x_0)=\max[g(y_0)+h(x_0-y_0)+f_1[ay_0+b(x_0-y_0)]; \tag{2.7.11}$$

$$R_N(x_0,\ y_0,\ y_1,\ldots,\ y_{N-1})=g(y_0)+h(x_0-y_0)+f_{N-1}[ay_0-b(x_0-y_0)]. \tag{2.7.12}$$

Основното функционално уравнение е

$$f_N(x_0)=\max\ R_N,\ 0\leq y_0\leq x_0. \tag{2.7.13}$$

Решаваме по следната схема:

1. Определяме ефективността за първия етап по формулата (2.7.1) за различни стойности на x от интервала $[0,\ x_0]$. За всяка стойност на x определяме $f_1(x)=\max R_1$ и стойността на $y=y_1$, при която се получава максимумът на функцията R_1.

2. Определяме величините $\bar{x}_i=a\bar{y}_{i-1}+b(\bar{x}_{i-1}-\bar{y}_{i-1})$ и $f_1(\bar{x})$ при $i=1,\ 2,\ldots,\ N-1$ за тези x и y, за които беше пресмет-

нато R_1. Намираме R_2 и $\max R_2$. В резултат на това получаваме $f_2(x)$ и т. н.

Оптималните стратегии $\bar{y}_i$ се определят от формулите:

$$\bar{y}_0 = y_N(x_0),$$
$$\bar{y}_1 = y_{N-1}[a\bar{y}_0 + b(x_0 - \bar{y}_0),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (2.7.14)$$
$$\bar{y}_i = y_{N-i}[a\bar{y}_{i-1} + b(\bar{x}_{i-1} - \bar{y}_{i-1})], \quad i = 1, 2, \ldots, N-1,$$

където

$$\bar{x}_i = a\bar{y}_{i-1} + b(\bar{x}_{i-1} - \bar{y}_{i-1}), \qquad (2.7.15)$$

а ефективността в i-тия етап се определя от формулата

$$r_i = g(y_i) + h(x_i - y_i). \qquad (2.7.16)$$

Да разгледаме следния числен пример. Нека $x_0 = 7$, $g(y) = 0{,}4y^2$, $h(x-y) = x-y$, $a = 0{,}6$ и $b = 0{,}9$.

Да се определят общата ефективност и оптималните стратегии за трите етапа на боя.

Решение (вж. таблица (2.7.2—2.7.5). След като пресметнем R_1, за всяко x от интервала $[0, x_b]$ и $y \leq x$ (петия стълб от таблица 2.7.3), определяме $f_1(x) = \max R_1$ и стойностите на y, за които се достига този максимум. Резултатите се записват във втория и третия стълб на таблица 2.7.3. В шестия стълб на таблицата 2.7.3 се записват резултатите от пресмятанията за $x_1(x,y)$, направени по формулата 2.7.5. От данните на този стълб и третия стълб на таблица 2.7.3 чрез линейна интерполация определяме стойностите на $f_1(x_1)$, които се записват в седмия стълб на таблица 2.7.2. След това определяме величините R_2 и $f_2 = \max R_2$. Стойностите на f_2 се записват в таблица 2.7.3.

Стойностите на y_1 и y_2 от таблица 2.7.3 съответстват на тези стойности на y, които са осигурили екстремалните стойности на R_1 и R_2, т.е. величините f_1 и f_2, които са изходни за определяне на оптималните стратегии. Те са оградени с правоъгълници в таблица 2.7.2.

Тъй като началната стойност на x е $x_0 = 7$, тогава $f_3(x)$ и съответстващата ѝ величина $y_2(x)$ определяме, както по-горе, но само за $x = 7$. Резултатите нанасяме в таблица 2.7.4.

Следователно $y_3 = 7$ и $f_3 = 29{,}7$.

Окончателните резултати от пресмятанията записваме в таблица 2.7.5.

Началните стойности са $x = x_0 = 7$, $\bar{y}_0 = \bar{y} = 7$.

Таблица 2. 7. 2

x	$y \leq x$	$g(y)$	$h(x-y)$	R_1	$\bar{x}(x, y)$	$f_1(\bar{x})$	R_2
2	0	0	2	[2]	—	—	[2]
	1	0,4	1	1,4	—	—	—
	2	1,6	0	1,6	—	—	—
3	0	0	3	3	2,7	3,4	6,1
	1	0,4	2	2,4	2,4	2,6	5
	2	1,6	1	2,6	2,1	2,2	4,8
	3	3,6	0	[3,6]	1,8	2	—
4	0	0	4	4	3,6	5,3	[9,3]
	1	0,4	3	3,4	3,3	4,4	7,8
	2	1,6	2	3,6	3	3,6	7,2
	3	3,6	1	4,6	2,7	3,1	7,7
	4	6,4	0	[6,4]	2,4	2,6	9
5	0	0	5	5	4,5	8,2	13,2
	1	0,4	4	4,4	4,2	7,1	11,5
	2	1,6	3	4,6	3,9	6,1	10,7
	3	3,9	2	5,6	3,6	5,3	10,9
	4	6,4	1	7,4	3,3	4,4	11,8
	5	10	0	[10]	3,	3,6	[13,6]
6	0	0	6	6	5,4	11,8	17,8
	1	0,4	5	5,4	5,1	10,4	15,8
	2	1,6	4	5,6	4,8	9,3	14,9
	3	3,6	3	6,6	4,5	8,2	14,8
	4	6,4	2	8,4	4,2	7,1	15,5
	5	10	1	11	3,9	6,1	17,1
	6	14,4	0	[14,4]	3,6	5,3	[19,7]
7	0	0	7	7	6,3	15,4	22,4
	1	0,4	6	6,4	6	14,4	20,8
	2	1,6	5	6,6	5,7	13,1	19,7
	3	3,6	4	7,5	5,4	11,8	19,4
	4	6,4	3	9,4	5,1	10,4	19,8
	5	10	2	12	4,8	9,3	21,3
	6	14,4	1	15,4	4,5	8,2	23,6
	7	19,6	0	[19,6]	4,2	7,1	[26,7]

Величините $\bar{x}_i$ и R_i са пресметнати по формули (2.7.15) и (2.7.16), а величините $\bar{y}_1=y_2$ и $\bar{y}_2=y_1(x)$ са определени по данните от таблица 2.7.3.

По такъв начин в резултат на решението са получени оптималните стратегии $\bar{y}_0, \bar{y}_1, \bar{y}_2$ и стойностите на критерия за ефективност за всеки от етапите, определени от условието за оптималност на целия триетапен процес.

Таблица 2. 7. 3

x	y_1	f_1	y_2	f_2
2	0	2	0	2
3	3	3,6	0	6,1
4	4	6,4	0	9,3
5	5	10	5	13,6
6	6	14,4	6	19,7
7	7	19,6	7	26,7

Таблица 2. 7. 4

y	0	1	2	3	4	5	6	7
$f_2\ (x)$	21,8	19,7	17,9	16	14,2	12,7	11,3	10,1
$R_i + f_2\ (x)$	28,8	26,1	24,5	23,6	23,6	24,7	26,7	29,7

Таблица 2. 7. 5

i	0	1	2	Сума
x_i	0	4,2	0	
y_i	7	0	3,8	
r_i	19,6	4,2	5,8	29,6

Пресмятаме:

$$f_3(7)=\max[g(0)+h(7)+f_2(6,\ 3);\ g(1)+h(6)+f_2(6);\ldots;$$
$$g(7)+h(0)+f_2(4,\ 2)]=\max[7+21{,}8;\ 6{,}4+19{,}7;\ldots;\ 19{,}6+10{,}1]=$$
$$=29{,}7=g(7)+h(0)+f_2(4,\ 2).$$

Резултатите от пресмятанията за $f_3(7)$ са дадени в таблица 2.7.4. Следователно на първия етап седемте бойни средства се използуват от първото подразделение. Ефективността е $r_1=g(7)+h(0)=0{,}4\,.\,7^2=19{,}6$. В резултат на загубите след първия етап остават $ay_0+b(7-y_0)=a.7=0{,}6.7=4{,}2$ средства, които ще се използуват през втория и третия етап.

През втория етап (таблица 2.7.5) бойни средства се използуват само от второто подразделение. Ефективността през този етап е

$$r_2=g(0)+h(4{,}2)=4{,}2.$$

За третия етап остават 3,8 бойни средства. Тъй като

$$f_1(3{,}8)=g(3{,}8)+h(0)=5{,}8=r_3,$$

те се използуват само от първото подразделение и ефективността им е 5,8. Сумарната ефективност на седемте средства през трите етапа на боя е $r_1+r_2+r_3=19{,}6+4{,}2+5{,}8=29{,}6$. В таблица 2.7.5 са нанесени оптималните стратегии и ефективностите r_1, r_2, r_3 за трите етапа на боя.

2. МНОГОМЕРЕН ПРОЦЕС НА РАЗПРЕДЕЛЕНИЕ

2.1. Процес на разпределение при наличие на два вида ресурси

Разгледахме процеса на разпределение на един вид ресурси, когато за използуването му е наложено само едно ограничение. Но при различните процеси, където можем да прилагаме методите на динамичното програмиране, се явяват по-сложни задачи—разпределение на повече видове ресурси, когато при използуването им са наложени и повече ограничения. Такъв процес на разпределение се нарича **многомерен**. Той се разглежда аналогично, както и едномерният процес.

Нека се спрем на случая, когато имаме два различни вида ресурси, предназначени за използуване в няколко независими технологични процеса. Да предположим, че те са съответно в количество x и y единици. Да означим с x_i и y_i ($i=1,2,\ldots,N$) количествата от тези ресурси, които се използуват в i-тия процес, а с

$$g_i(x_i,\ y_i),\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ N \qquad (2.7.17)$$

доходите от i-тия процес при условие, че за него са отделени съответно x_i единици от ресурса от първия и y_i единици от ресурса от втория вид.

Математическият модел на тази задача за избор на най-ефективно използуване на ресурсите е:
Да се определи максимумът на функцията на $2N$ променливи

$$R_N(x_1, x_2,..., x_N; y_1, y_2,..., y_N) = \sum_{i=1}^{N} g_i(x_i, y_i) \quad (2.7.18)$$

при следните ограничения:

$$\left.\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N} x_i = x, \quad x_i \geq 0; \\ \sum_{i=1}^{N} y_1 = y, \quad y_i \geq 0. \end{aligned}\right\} \quad (2.7.19)$$

Решаването на тази задача се свежда към изчисляване на редица функции на две променливи. Като следваме пътя на работата, използуван при едномерен процес на разпределение, въвеждаме редицата от функции $\{f_N(x, y)\}$, определени по следния начин:

$$f_N(x, y) = \max_{\{x, y\}} R_N(x_1, x_2,..., x_N; y_1 + y_2,..., y_N), \quad (2.7.20)$$

където максимумът се търси в областта от значения на x_i и y_i $(i = 1, 2,..., N)$, определена с условията (2.7.19).

При $N = 1$ имаме

$$f_1(x, y) = g_1(x, y), \quad (2.7.21)$$

а при $N \geq 2$, като използуваме принципа на оптималност, получаваме реконентното съотношение

$$f_N(x, y) = \max_{0 \leq x_N \leq x,\ 0 \leq y_N \leq y} \max [g_N(x_N, y_N) + f_{N-1}(x - x_N, y - y_N), \quad (2.7.22)$$

което представлява основното функционално уравнение в динамичното програмиране за разглежданата задача.

Аналогично се постъпва и при разпределение на повече от два вида ресурси.

2.2. Процес на разпределение с два вида ограничения

В много случаи се разглеждат задачи, при които трябва да се разпредели един вид ресурс при два вида ограничения. Такава е например задачата за натоварването на едно превозно средство при ограничения за теглото и обема на товарените предмети. Математическият модел на задачата е:
Да се намери максимумът на функцията

$$R_N(x_1, x_2,..., x_N) = g_1(x_1) + g_2(x_2) + ... + g_N(x_N). \quad (2.7.23)$$

при следните ограничения:

$$\left.\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N} a_1(x_i) \leq x; \\ \sum_{i=1}^{N} b_i(x_i) \leq y; \end{aligned}\right\} \quad (2.7.24)$$

$$x_i \geq 0, \ i = 1, 2,..., N.$$

За да изведем основното функционално уравнение на динамичното програмиране за разглежданата задача, използуваме същият подход, както и при преходните задачи. Приемаме

$$f_N(x, y) = \max_{\{x\}} [g_i(x_i) + g_2(x_2) + ... + g_N(x_N)], \quad (2.7.25)$$

където максимумът се изчислява по всички x_i, които удовлетворяват условията (2.7.24).

При $N = 1$ имаме:

$$f_1(x, y) = \max_{\substack{a_1(x_1) \leq x \\ b_1(x_1) \leq y}} g_1(x_1), \quad (2.7.26)$$

а при $N \geq 2$ от принципа на оптималност следва рекурентното съотношение:

$$f_N(x, y) = \max_{\substack{a_N(x_N) \leq x \\ b_N(x_N) \leq y}} [g_N(x_N) + f_{N-1}(x - a_N|x_N),\ y - b_N(x_N)]. \quad (2.7.27)$$

Така получихме основното функционално уравнение на динамичното програмиране за разглежданите задачи.

2.3. Пример за многомерен процес на разпределение

Като пример ще разгледаме задачата за резервните части.

Нека имаме N вида резервни части и при липса на всяка от тях в склада ремонтната база понася известни загуби. Да предположим, че търсенето на всеки вид резервни части се описва с разпределението на Поасон. Какво количество резервни части от всеки вид трябва да се достави с един самолет на базата, за да се минимизират загубите от ремонта, причинени от недостига на резервни части, при дадени ограничения W за теглото и S за обема на частите?

Това е типична задача, която се среща при замяна на оборудването и управлението на запасите. При нея имаме елемент на случайност. Едно от големите предимства на методите на динамичното програмиране е това, че към детерминираните и към стохастичните (вероятностните) процеси може да се използува един и същ подход.

Нека съставим математически модел на разглежданата задача.

Да означим с w_i теглото на детайла от i-тия вид, с s_i — обема му, с λ_i — параметъра в разпределението на Поасон, характеризиращ нуждата от i-тия детайл, а c_i — загубата поради липсата му в базата. Трябва да се определи такова комплексно снабдяване на базата, с което да се минимизира очакваната загуба при определени ограничения за обема и теглото на резервните части.

Ако отбележим с x_i броя на детайлите от i-тия вид, които трябва да се доставят от самолета, и с $P(z)$ вероятността за нуждата от z детайли, очакваната загуба за неудовлетворените ремонти е

$$c_i \sum_{z=x_i+1}^{\infty} (z-x_i)P(z). \tag{2.7.28}$$

Ако $P(z, \lambda_i)$ е разпределението на Поасон за i-тия вид детайл, математическото очакване за сумарната загуба е

$$E_N = \sum_{i=1}^{N} c_i \left[\sum_{x=x_i+1} (z-x_1)\ P(z, \lambda_i) \right]. \tag{2.7.29}$$

Следователно задачата може да се формулира така:
Да се намери минимумът на E_N по всички x_i, удовлетворяващи условията

$$\sum_{i=1}^{N} x_i w_i \le w;$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i s_i \le s; \tag{2.7.30}$$

$$x_i = 0,\ 1,\ 2,\ldots$$

Определяме функцията $f_k(w', s')$ като загуба, свързана с оптималния избор на детайли от първите k вида.

Теглото на товарите, които може да достави самолетът, е ограничено с някаква величина w', а обемът — с величина s'; w' и s' може да се изменят съответно в интервалите

$$0 \le w' \le w \text{ и } 0 \le s' \le s.$$

Основното рекурентно съотношение на динамичното програмиране има вида

$$f_k(w',\ s') = \min_{x_k} \left[c_k \sum_{z=x_k+1}^{\infty} (z-x_k)P(z,\ \lambda_k) + f_{k-1}(w'-x_k w_k,\ \ s'-x_k s_k), \right. \tag{2.7.31}$$

където x_k се изменя в областта

$$0 \le x_k \le \min\left\{ \left[\frac{w'}{w_k}\right], \left[\frac{s'}{s_k}\right] \right\}, \tag{2.7.32}$$

а $[x_k]$ означава най-голямото цяло число, което не надминава x.

3. ЗАДАЧИ ЗА ЗАМЯНА НА ОБОРУДВАНЕТО

3.1. Обща постановка

Проблемът за замяна на оборудването е важен за промишлеността и за армията. С течение на времето оборудването старее, което води до увеличаване на разходите по обслужването и намаляване на производителността му. Идва момент, когато трябва да се замени старото оборудване. Средствата, отделени за закупуване на ново оборудване, загубите, свързани със замяната му, се компенсират с увеличената производителност и намаляването на производствените разходи.

Целта на всички задачи от този вид е да се определи оптимална стратегия за замяна на оборудването. Обикновено

при тях като критерий на оптималност се приема намирането на максимума на очакваната печалба или минимума на очакваните разходи за определен интервал от време.

Използуването на динамичното програмиране при решаване на въпросите за замяна на старото оборудване с ново се обуславя от обстоятелството, че решения за замяна трябва да се вземат периодично, т. е. имаме многостранен процес на вземане на решения. С помощта на динамичното програмиране процесите на вземане на решения за замяна на оборудването се формулират с две функционални уравнения за всеки етап. Едно от тях дава печалбата или разходите при запазване на старите машини, а другото — съответно печалбата или разходите при замяната на машините.

3.2. Замяна на оборудването в n-етапен процес

Нека имаме машина, която за една година дава продукция с определена стойност в зависимост от нейната възраст. Известни са годишните експлоатационни разходи и остатъчната стойност на машината, които също ще зависят от възрастта ѝ. Дадена е и покупната цена на новата машина.

За период от n години трябва да се определи оптимален цикъл за замяна на машината, за да се получи оптимален доход. Всяка година следва да се взема решение да продължи ли работа старата машина или да се замени с нова. Предполага се, че преходът от работа на старата към работа на новата машина е мигновен.

Въвеждаме следните означения:

— $r(t)$ — стойност на продукцията, произведена за една година, от машина на възраст t години;

— $u(t)$ — годишни експлоатационни разходи на машина с възраст t години;

— $s(t)$ — стойност на машината, след като е работила t години;

— p — покупна цена на новата машина;

— $f_N(t)$ — максимален сумарен доход за оставащите N години от машина на възраст t години при оптималната стратегия относно нейната замяна.

При тази задача етапите на процеса се номерират в обратно направление на неговия ход. Така $N=1$ означава, че имаме едноетапен процес, т. е. до края на целия N-етапен процес остава една година. Възрастта на машината се отчита по хода на процеса. Така $t=2$ означава, че се използува машина, която е работила две години.

Сумарният доход от целия процес при използуване на машината на възраст t години при N-те етапа и при използуване на оптималната стратегия за оставащите $(N-1)$ етапа е

$$r(t)-u(t)+f_{N-1}(t+1). \tag{2.7.33}$$

Сумарният доход на N-етапен период при замяна на машината на N-тия етап и при спазване на оптималната стратегия за следващите етапи се дава от

$$s(t)-p+r(0)-u(0)+f_{N-1}(1). \tag{2.7.34}$$

Взема се пред вид, че след решението за смяна на машината на N-тия етап тя е нова, има възраст нула години, а в началото на $(N-1)$-етапния процес е на възраст 1 година.

Функционарното уравнение на разглежданата задача е

$$f_N(t)=\max\begin{cases} r(t)-u(t)+f_{N-1}(t+1) \\ s(t)-p+r(0)-u(0)-f_{N-1}(t) \end{cases} \tag{2.7.35}$$

При $N=1$, т. е. за едноетапен процес, имаме

$$f_1(t)=\max\begin{cases} r(t)-u(t) \\ s(t)-p+r(0)-u(0). \end{cases} \tag{2.7.36}$$

Горният ред на всяко от уравненията (2.7.35) или (2.7.36) определя дохода, който се получава при запазване на старата машина, а долният ред дава дохода, получен при замяна на старата машина и продължаване на процеса с нова. Функцията $r(t)-u(t)$ изразява разликата между стойността на произведената продукция и експлоатационните разходи за N-тата година на процеса. Разликата $s(t)-p$ представлява разходите по замяната на машина на възраст t години с нова. Членът $r(0)-u(0)$ е доходът от новата машина на възраст нула години.

Функционалното уравнение (2.7.35) дава връзката между $f_N(t)$ и $f_{N-1}(t+1)$. При преминаване от един етап към следващия броят на оставащите етапи намалява с един, а възрастта на машината се увеличава с една година. Решаването на задачата започва с уравнението (2.7.36), описващо едноетапен процес, а след това се използува уравнението (2.7.35) за $N=2, 3,\ldots$ Вземането на решение на всеки етап за всяко t се състои в избор на един от двата възможни варианта: продължаване на работата на същата машина или купуване на друга. Двата възможни варианта се оценяват чрез уравненията (2.7.35) и (2.7.36), като се избира вариантът с по-голям доход. Следователно уравненията дават отговор не само на

въпроса да се запази или замени машината, но определят и максималния доход, съответствуващ на всяко от двете възможни решения.

Въпросът за замяна на оборудването в N-етапния процес може да се обобщи и за процес с неограничена продължителност.

4. ДИНАМИЧНО ПРОГРАМИРАНЕ ПРИ ТРАНСПОРТНИТЕ ПРОБЛЕМИ

4.1. Определяне на оптимален път в мрежов график

Да разгледаме N пункта, свързани с пътища. За превозване на даден товар от пункт 1 до пункт N от съществено значение, особено за армията, е намирането на оптималния път, т. е. пътя, който се изминава за най-кратко време. Аналогично се разглежда задачата, когато се търси най-късото разтояние между началния и крайния пункт без оглед на времето, за което се изминава.

Тази задача е комбинаторна. Трябва да се подберат всички възможни пътища от началния до крайния пункт и да се сравнят времената, за които се изминават (или техните дължини, ако се търси най-късото разстояние). При голям брой пунктове и съединяващи ги линии от пътната мрежа подбирането на всички възможни пътища е трудна задача. Този подбор се улеснява значително чрез използуване метода на динамичното програмиране. Като пример нека разгледаме пътната мрежа на фиг. 2.7.1 с 6 пункта. Времената, за които се изминават отделните пътища между пунктовете, са записани при съединителните им отсечки. Трябва да се намери най-краткият път между началния и крайния пункт, като движението може да се осъществи само в посоките, указани на пътната мрежа.

Подходът на динамичното програмиране при определяне на оптималния път в мрежовия график се състои в разглеждане на най-краткия път за придвижване от всеки пункт до крайния, което се извършва в обратно направление (започва се от крайния пункт и се приключва в началния).

Означаваме с:

t_{ij} — времето за придвижване от пункт i до пункт j;

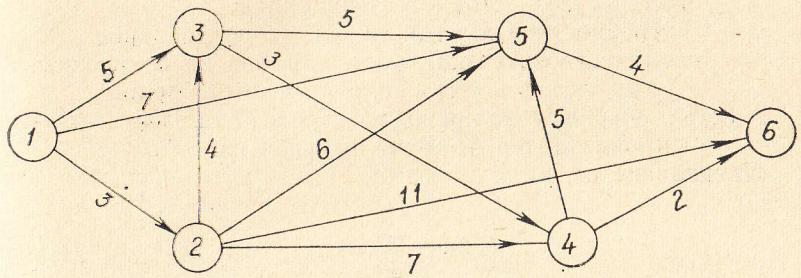
f_i — минималното време, необходимо за придвижване от пункт i до крайния пункт N, по допустимите пътища при следване на оптимална стратегия.

Функционалното уравнение на разглежданата задача има вида

$$f_i=\min(t_{ij}+t_i) \qquad (2.7.37)$$

при

$$t=N \text{ и } f_N=0. \qquad (2.7.38)$$



Фиг. 2.7.1

Най-краткият път в мрежата от фиг. 2.7.1 се намира с горните уравнения в следната последователност:

$$f_6=0;$$

$$f_5=\min(t_{56}+f_6)=\min(4+0)=4;$$

$$f_4=\min\begin{Bmatrix}t_{45}+f_5\\t_{46}+f_6\end{Bmatrix}=\min\begin{Bmatrix}5+0\\2+0\end{Bmatrix}=2;$$

$$f_3=\min\begin{Bmatrix}t_{34}+f_4\\t_{35}+f_5\end{Bmatrix}=\min\begin{Bmatrix}3+2\\5+4\end{Bmatrix}=2;$$

$$f_2=\min\begin{Bmatrix}t_{23}+f_3\\t_{24}+f_4\\t_{25}+f_5\\t_{26}+f_6\end{Bmatrix}=\min\begin{Bmatrix}4+5\\7+2\\6+4\\11+0\end{Bmatrix}=9;$$

$$f_1=\min\begin{Bmatrix}t_{12}+f_2\\t_{13}+f_3\\t_{15}+f_5\end{Bmatrix}=\min\begin{Bmatrix}3+9\\5+5\\7+4\end{Bmatrix}=10;$$

Понеже f_1 се получава при $t_{13}+f_3$, а $f_3=t_{34}+f_4$ и $f_4=t_{46}+f_6$, оптималният път в транспортната мрежа, изобразена на фиг. 2.7.1, е

1 — 3 — 4 — 6.

4.2. Транспортна задача

Формулировката на траспортната задача ни е известна. Да означим с:

m — броят на складовете ($i=1, 2,\ldots, m$);

N — пунктовете на потребление ($j=1—2,\ldots, N$);

a_i — количеството стоки в i-тия склад;

b_j — потребностите в j-тия пункт на потребление;

x_{ij} — количеството стока, което трябва да се превози от i-тия склад в j-тия пункт на потребление;

$g_{ij}(x_{ij})$— разходът за превоз на x_{ij} единици стоки от i-тия производител до j-тия потребител.

Предполага се, че

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{N} b_j. \tag{2.7.39}$$

Същността на метода на динамичното програмиране при решаване на траспортни задачи се състои в съчетаване на метода на функционалните уравнения с метода на последователните приближения.

За да изясним същността му, нека разгледаме задачата с два склада ($m=2$) и произволен брой потребители. Математическият модел на тази задача е:

Да се намери минимумът на функцията

$$\sum_{j=1}^{N} [g_{1j}(x_{1j}) + g_{2j}(x_{2j})] \tag{2.7.40}$$

при следните условия:

$$\sum_{j=1}^{N} x_{1j} = a_1, \quad \sum_{j=1}^{N} x_{2j} = a_2; \tag{2.7.41}$$

$$x_{1j} + x_{2j} = b_j, \quad j=1, 2,\ldots, N; \tag{2.7.42}$$

$$x_{ij} \geq 0; \quad \geq x_{2j} 0; \tag{2.7.43}$$

$$a_1 + a_2 = \sum_{j=1}^{N} b_j. \tag{2.7.44}$$

За решаване на тази задача чрез методите на динамичното програмиране определяме функциите $f_N(a_1, a_2)$, които дават сумарните транспортни разходи при оптималната стратегия, когато в двата склада има съответно a_1 и a_2 единици товар при фиксирани потребности в пунктовете за потребление. Потребностите се задоволяват последователно, като се започне от N-тия пункт. Да допуснем, че е взето решение да се превозят в този пункт x_{1N} и x_{2N} единици товари съответно от първия и втория склад. Тогава разходите са

$$g_{1N}(x_{1N}) + g_{2N}(x_{2N})$$

и в първия склад остават $a_1 - x_{1N}$ товари, а във втория — $a_2 - x_{2N}$. Съгласно с принципа за оптималност за $N \geq 2$ получаваме рекурентното съотношение

$$f_N(a_1, a_2) = \min_{R_N} [g_{1N}(x_{1N}) + g_{2N}(x_{2N}) + f_{N-1}(a_1 - x_{1N}, a_2 - x_{2N})], \tag{2.7.45}$$

където минимизирането се извършва в областта R_N, определена от условията:

$$x_{1N} + x_{2N} = b_N;$$
$$0 \leq x_{1N} \leq a_1;$$
$$0 \leq x_{2N} \leq a_2.$$

При $N=1$ получаваме

$$f_1(a_1, a_2) = g_{11}(a_1) + g_{21}(a_2). \tag{2.7.46}$$

Изложеният метод може да се приложи и към задачи с повече от два склада.

Глава осма

ТЕОРИЯ НА ИГРИТЕ

1. ПРЕДМЕТ, ОСНОВНИ ПОНЯТИЯ И КЛАСИФИКАЦИЯ НА ИГРИТЕ

1.1. Основни понятия в теорията на игрите

Теорията на игрите е теория на математическите модели на такива ситуации, при които участвуващите страни имат противоположни интереси и разполагат с различни начини на действие за достигане на своите цели. Такива ситуации се наричат конфликтни.

Теорията на игрите изучава абстрактния модел на конфликтна ситуация, в която участвуват най-малко две страни с противоположни или частично противоположни интереси. Изобилието на такива ситуации в обкръжаващия ни свят е съвсем очевидно. Примери може да се вземат от салонните игри — шах, бридж, белот, покер или от икономиката и военните действия.

Математическият анализ на която и да е конфликтна ситуация, подбрана непосредствено от практиката, се затруднява от наличието на многобройни странични фактори. Необходимо е да пренебрегнем второстепенните от тях, за да построим опростен математически модел на такава ситуация, който ще наричаме **стратегическа игра** или само **игра.** От реалната конфликтна ситуация играта се отличава по това, че се води по напълно установени правила. В тях се определят ясно и еднозначно: какво се допуска и иска от играчите; какви сведения може да получи всеки от тях в хода на играта; целта на всеки играч; какво получава или губи при избора на определен начин за действие; кога ще свърши играта и т.н. Отдавна са познати такива модели на конфликтни ситуации, които са игри в буквалния смисъл на думата, например шах,

шашки, всевъзможни игри на карти и други. Терминологията, заимствувана от тях, се употребява и при анализа на реалните конфликтни ситуации. Страните, участвуващи в конфликтна ситуация, се наричат *играчи*, а резултатът от съревнованието — *печалба* на една от страните. Да въведем някои основни понятия

Партия се нарича възможната реализация на правилата на една игра.

Ход се означава моментът от партията, в който един от играчите (а понякога и случаят) избира една алтернатива (възможен начин за действие) от няколко такива. *Избор* се нарича избраната вече алтернатива. Например играчът, който играе с белите фигури при една партия на шах, спечели благодарение на правилния избор на 25-тия ход. Ходовете са лични и случайни.

Личен се нарича такъв ход на играча, който той съзнателно избира в зависимост от създалата се ситуация.

Ход, който се определя от случаен механизъм (хвърляне на монета, зар, използуване на генератори за случайни числа и др.) се нарича *случаен*.

След всеки ход се определя печалбата на всеки играч. Затова се казва, че след всяка партия се извършва разплащане между играчите.

Когато са дадени правилата на играта, предварително, преди всяка партия, всеки играч може да си състави подробен план за действие, който да обхваща всички възможни варианти за провеждане на играта. Такова пълно описание на поведението на всеки играч за всяка партия от играта се нарича *стратегия* на този играч. При провеждане на играта за всяка партия играчите може да имат повече от една стратегия, но винаги се стремят да изберат от множеството онази, която ще им донесе максимална печалба. Такава стратегия се нарича *оптимална*.

1.2. Класификация на игрите

Съществуват различни начини за класификация на игрите. Да разгледаме някои от тях. Игрите може да се класифицират по броя на играчите: игра с двама, с трима и т.н. играчи, например шах, трупа. Когато се говори за игра с n играчи, не трябва да се разбира непременно, че в нея участвуват точно n лица, а просто според правилата те се разпределят в n непресичащи се съвкупности така, че интересите на лицата, вли-

защи в една съвкупност, са еднакви. Така например бриджът е игра на двама души (играчи).

В зависимост от броя на ходовете в една партия игрите са с краен или безкраен брой ходове. Игри с краен брой ходове, при всеки от които има краен брой алтернативи, се наричат крайни. В противен случай играта е безкрайна.

Игрите, в които печалбата на единия играч е равна на загубите на останалите играчи, се наричат игри с нулева сума.

1.3. Правоъгълни (матрични) игри

Правоъгълна игра се нарича всяка крайна игра на двама играчи с нулева сума, при всяка партия на която всеки играч има само по един ход. Ходовете може да се извършват едновременно или един след друг.

Участниците в играта се означават с A и B, стратегиите на играча A — с $p_1, p_2, \ldots, p_m$, а на играча B — с $q_1, q_2, \ldots, q_n$.

Ако играчът A играе своята p_i стратегия ($i=1, 2, \ldots, m$), а играчът B играе q_j стратегията си ($j=1, 2, \ldots, n$), печалбата на играча A се означава с a_{ij}. Тъй като играта е с нулева сума, загубата на играча B също е a_{ij}, т. е. печалбата му е a_{ij}.

И така, за да е зададена една правоъгълна игра, е необходимо за всяка стратегия на единия и другия играч да бъде указана стойността на печалбата. Това може да се направи в табличен или матричен вид (вж. стр. 367).

$U=(a_{ij})_{m\times n}$ се нарича платежна матрица на играта.

Пример 1. Играят двама участника, като всеки от тях може да държи в ръката си 1 или 2 клечки и едновременно казва броя на клечките, които държи противникът му в ръката си. Ако единият играч познае, получава една точка, ако познаят и двамата, никой не печели точка.

Стратегиите на играчите означаваме с двойка числа. Например с (2.1) означаваме, че играчът държи в ръката си две клечки, а казва, че противникът му държи една. Таблицата и матрицата на играта имат вида, показан на стр. 368, горе.

Пример 2. Страната А („червените“) и страната В („сините“) се стремят да завземат две позиции. „Червените“ разполагат с четири батальона, а „сините“ — с три. Правилата на играта са следните: ако „червените“ имат на дадена позиция повече батальони от „сините“, те печелят толкова точки, колкото са батальоните на сините плюс единица. Същото се

$$(2.8.1)\quad U=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Стратегии: B \ A	q_1	q_2	$\ldots$	q_n	
p_1	a_{11}	a_{12}	$\ldots$	a_{1n}	
p_2	a_{21}	a_{22}	$\ldots$	a_{2n}	
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	
p_m	a_{m1}	a_{m2}	$\ldots$	a_{mn}	

Стратегии на A \ Стратегии на B	$q_1=(1.1)$	$q_2=(1.2)$	$p_3=(2.1)$	$q_4=(2.2)$
$P_1=(1.1)$	0	1	−1	0
$P_2=(1.2)$	−1	0	0	1
$P_3=(2.1)$	1	0	0	−1
$P_4=(2.2)$	0	−1	−1	0

Платежна матрица

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = U$$

отнася и до „сините“. Общата печалба и за двамата играчи е равна на сумата от точките им на двете позиции.

Въвеждаме следните означения за стратегиите на играчите. С (i, j) означаваме стратегията, при която играчът има на първата позиция i батальона, а на втората — j батальона. Например стратегията (3.1) означава, че играчът има на първата позиция три батальона, а на втората — един.

Стратегии на A \ Стратегии на B	(3,0)	(0,3)	(2,1)	(1,2)
(4,0)	4	0	2	1
(0,4)	0	4	1	2
(3,1)	1	−1	3	0
(1,3)	−1	+1	0	3
(2,2)	−2	−2	2	2

Платежна матрица

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \\ -2 & -2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = U$$

Пример 3. (Задача за рационалното съотношение между танковите брони и бронебойните снаряди). Противникът разполага с m вида танкови брони $p_1, p_2, \ldots, p_m$, а ние с n вида бронебойни снаряди $q_1, q_2, \ldots, q_n$. Знае се вероятността p_{ij} за поразяване на i-тата броня от j-тия вид снаряди. Не е известно какви брони ще използува противникът. Трябва да се определи в какво съотношение да се използуват различ-

ните бронебойни снаряди, за да се получи максимална стойност на математическото очакване за поразяването на противника. Тази игра може да се разглежда като матрична със следната матрица:

$$U = \begin{Vmatrix} p_{11}, & p_{12}, \ldots, & p_{1n} \\ p_{21}, & p_{22}, \ldots, & p_{2n} \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ p_{m1}, & p_{m2}, \ldots, & p_{mn} \end{Vmatrix}.$$

2. ПРАВОЪГЪЛНИ ИГРИ СЪС СЕДЛОВА ТОЧКА

2.1. Долна и горна цена на играта

Да разгледаме една правоъгълна игра с матрица

$$U = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{Vmatrix}.$$

Ако играчът A в някоя партия играе първата си стратегия p_1, неговата печалба ще е най-малко равна на стойността на минималния елемент в първия ред, т. е. най-малкото, което ще получи, е

$$\alpha_1 = \min_j a_{1j}.$$

Изобщо, ако играчът A избере стратегия p_i, най-малкото, което ще получи, е

$$\alpha_i = \min_j a_{ij}.$$

Понеже той се стреми да получи максимална печалба, ще избере онази стратегия, за която се получава най-голяма стойност за минималната му печалба, т. е. ще избере такава стратегия, за която се получава

$$\max_i \alpha_i = \max_i \min_j a_{ij} = \alpha.$$

Числото α се нарича долна цена на играта и определя най-малката печалба на играча A.

Аналогично за играча B максималната загуба, която ще получи, ако играе q_j-тата си стратегия, е

$$\beta_j = \max_i a_{ij}.$$

Понеже той се стреми да играе така, че да получи минимална загуба, може да избере онази стратегия, за която се получава минимална стойност на максималната му загуба, т. е.

$$\min_j \beta_j = \min_j \max_i a_{ij} = \beta.$$

Числото β се нарича горна цена на играта и определя най-голямата печалба, която ще получи играчът A.

Играчът А се нарича максимизиращ, защото се стреми да максимизира своята печалба, а играчът В — минимизиращ, защото се стреми да минимизира загубата си.

За пример 2 от 1.3 с матрица

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \\ -2 & -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \alpha_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix};$$

$$\beta_j = (4\ 4\ 3\ 3);$$

$$\alpha = \max_i \alpha_i = 0; \quad \beta = \min_j \beta_j = 3.$$

За горната и долната цена на играта е в сила твърдението

$$\alpha \leq \beta, \text{ т. е. } \max_i \min_j a_{ij} \leq \min_j \max_i a_{ij},$$

верността на което ще получим като следствие от следната теорема.

Теорема 2.1. Нека $f(x, y)$ е реална функция, определена за $x \in A$ и $y \in B$, и съществуват

$$\max_{x \in A} \min_{y \in B} f(x, y) \text{ и } \min_{y \in B} \max_{x \in A} f(x, y).$$

Тогава е изпълнено неравенството

$$\max_{x \in A} \min_{y \in B} f(x, y) \leq \min_{y \in B} \max_{x \in A} f(x, y).$$

Доказателство. За произволни фиксирани x и y е в сила

$$\min_{y \in B} f(x, y) \leq f(x, y) \text{ и } \max_{x \in A} f(x, y) \geq f(x, y),$$

следователно

$$\min_{y \in B} f(x, y) \leq \max_{x \in A} f(x, y).$$

Тъй като лявата страна на неравенството не зависи от избора на y, то

$$\min_{y \in B} f(x, y) \leq \min_{y \in B} \max_{x \in A} f(x, y).$$

В новото неравенство дясната страна не зависи от x, тогава е изпълнено и неравенството

$$\max_{x \in A} \min_{y \in B} f(x, y) \leq \min_{y \in B} \max_{x \in A} f(x, y).$$

Всяка платежна матрица $U = (a_{ij})$ може да се разглежда като функция на две променливи $f(i, j)$, дефинирана за $i \in A = \{1, 2, \ldots, m\}$, $j \in B = \{1, 2, \ldots, n\}$, с равенството $f(i, j) = a_{ij}$.

От теорема 2.1. непосредствено следва

$$\max_i \min_j a_{ij} \leq \min_j \max_i a_{ij}.$$

2.2. Правоъгълни игри със седлова точка

Ако долната цена на играта е равна на горната, играта се нарича правоъгълна със седлова точка, а тяхната обща стойност $v = \alpha = \beta$ — цена на играта.

Точката (i_0, j_0) се нарича седлова точка на матрицата (a_{ij}), ако елементът $a_{i_0 j_0}$ е най-голям във своя стълб и най-малък в своя ред, т. е.

$$a_{ij_0} \leq a_{i_0 j_0} \leq a_{i_0 j} \text{ за всяко } i \text{ и } j.$$

Стратегиите с номера i_0 и j_0 се наричат оптимални, чисти стратегии на играчите А и В. Оптималните стратегии имат следните свойства:

а) ако играчът A играе оптималната си стратегия p_{i_0}, то независимо от това, как ще играе играчът B, играчът A ще получи най-малко толкова, колкото е цената на играта v;

б) ако играчът B играе оптималната си стратегия q_{j_0}, то каквато и стратегия да избере играчът A, той ще получи най-малко v;

в) ако играчът A обяви, че ще играе p_0-тата си стратегия, тази информация не може да се използува от играча B, т. е. той не ще може да попречи на играча A да получи по-малко от цената на играта v.

Пример 1. Играта с матрица

$$U=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \alpha_i=\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\beta_j=(2\ \ 5\ \ 3),$$

$$\alpha=2,\ \beta=2,\ v=\alpha=\beta=2$$

е игра със седлова точка (2.1), а цената ѝ е 2. Стратегиите p_2 и q_1 са оптималните стратегии на A и B.

Пример 2. Играта с матрица

$$\begin{pmatrix} 12 & 13 & 12 \\ 10 & 31 & 9 \end{pmatrix}$$

има две седлови точки (1,1) и (1,3). Цената ѝ е 12. Оптималната стратегия за A е p_1, а B има две оптимални стратегии q_1 и q_3.

Пример 3. Страната A („червените“) организира въздушно нападение на обект, отбраняван от страната B („сините“). „Червените“ привличат два самолета, а „сините“ разполагат с три зенитно-ракетни установки. Всеки самолет е носител на ядрени средства за поразяване и за унищожаване на обекта достатъчно е до целта да достигне поне един от тях. Самолетите на „червените“ могат да подходят към целта от три направления (фиг.2.8.1). „Червените“ могат да изпратят и двата самолета по едно или по различни направления. „Сините“ могат да разположат своите зенитно-ракетни установки на всяко от направленията, като всяка установка е в състояние да обстрелва само областта от пространството в направлението, за което е разположена, да води огън само по един самолет и да го порази с вероятност 1.

„Червените“ не знаят на кои направления са разположени зенитните установки, а „сините“ не знаят от кое направление ще подходят самолетите.

Задачата на „червените“ е да организират нападението по такъв начин, че вероятността за поразяване на обекта да е най-голяма, а на „сините“ — да организират отбраната така, че вероятността за поразяване на обекта да е най-малка.

Стратегиите на „червените“ са две:

p_1 — изпращане на самолетите по две различни направления;

p_2 — изпращане на самолетите по едно направление.

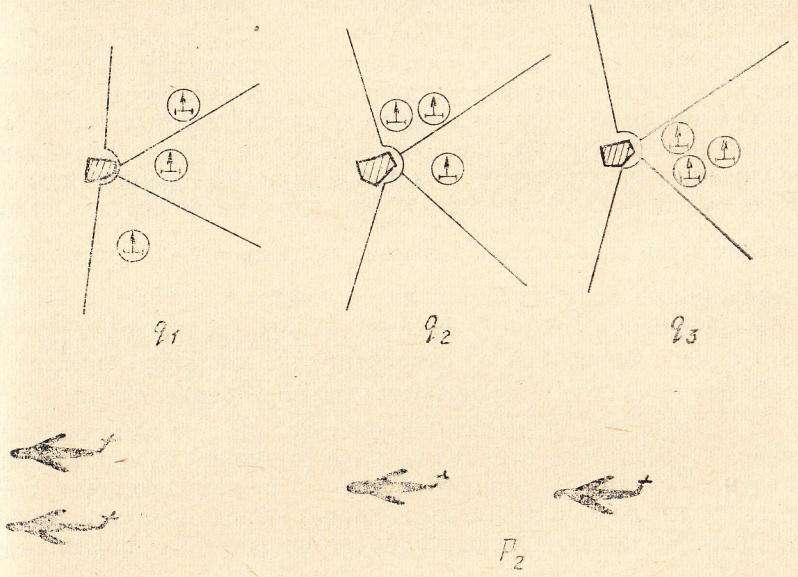
Стратегиите на „сините“ са три:

q_1 — разполагане на всяко направление по една зенитно-ракетна установка;

q_2 — разполагане на две установки на едно направление, на една установка на друго направление, като едно от направленията остава незащитено;

q_3 — разполагане на трите зенитно-ракетни установки на едно от направленията.

Стратегия p_1 има три реализации. Ако с (1, 1,0) означим тази реализация, при която единият самолет се изпраща по направлението, което условно сме означили за първо, а другият — по второто, останалите реализации ще бъдат (1 , 0,1) и (0,1,1).



Фиг. 2.8.1

Стратегия p_2 също има три реализации: (2,0,0), (0,2,0) и (0,0,2). Стратегия q_1 има само една реализация (1,1,1), стратегия q_2 — шест реализации (2,1,0), (2,0,1), (1,2,0), (1,0,2),

(0,1,2) и (0,2,1) и стратегия q_3 — три реализации (3,0,0), (0,3,0) и (0,0,3).

За да съставим платежната матрица на играта, трябва да пресметнем вероятностите за поразяване на обекта за всички възможни комбинации от стратегиите на „червените“ и „сините“. Те са:

(p_1, q_1), (p_1, q_2), (p_1, q_3), (p_2, q_1), (p_2, q_2), (p_2, q_3).

Ако „червените“ използуват стратегията p_1, а „сините“ стратегията q_1, вероятността за достигане на целта е $a_{11}=0$, тъй като и двата самолета, летящи по различни направления, ще бъдат свалени от зенитно-ракетните установки, разположени по една на всяко направление.

В случая (p_1,q_2) самолетите летят по различни направления, а зенитно-ракетните установки са разположени две на едно направление, една на друго направление, при което има и едно незащитено направление. В две от трите възможни реализации на стратегия p_1 и при всички реализации на стратегия q_2 единият от самолетите ще достигне до целта. Следователно вероятността за поразяване ще е $a_{12}=\frac{2}{3}$ (от трите възможни имаме два благоприятни случая).

В случая (p_1, q_3) вероятността за поразяване $a_{13}=1$, тъй като винаги поне един от самолетите ще достигне до целта.

В случая (p_2, q_1) вероятността за поразяване $a_{21}=1$.

В случая (p_2, q_2), когато самолетите летят по едно направление, а обектът се отбранява с две установки на едното направление, с една на другото и третото е незащитено, в две от трите възможни реализации на p_2 поне един от самолетите ще достигне целта. Следователно вероятността за поразяване $a_{22}=\frac{2}{3}$.

В случая (p_2, q_3) вероятността за поразяване $a_{23}=\frac{2}{3}$, защото от трите възможни случая за нападение на двойката самолети от трите направления в два от тях ще се достигне до целта и само когато самолетите попаднат на направлението, на което са разположени и трите установки, ще бъдат поразени. Следователно платежната матрица на играта е:

„Червени“ \ „Сини“	q_1	q_2	q_3
p_1	$a_{11}=0$	$a_{12}=\frac{2}{3}$	$a_{13}=1$
p_2	$a_{22}=1$	$a_{22}=\frac{2}{3}$	$a_{23}=\frac{2}{3}$

Горната цена на играта $\beta=\frac{2}{3}$. Тъй като $\alpha=\beta=\frac{2}{3}$, тази игра е със седлова точка. Елементът $a_{22}=\frac{2}{3}$ е най-голям в своя стълб и най-малък в своя ред. Оптималните чисти стратегии за „червените“ и „сините“ са p_2 и q_2, а цената на играта $v=\frac{2}{3}$.

При организиране на нападението „червените“ трябва винаги да изпращат и двата самолета по едно направление. Тогава най-малко в два от трите случая обектът ще бъде поразен. За „сините“ е най-добре при организиране на отбраната да разположат на едно от направленията две установки, на другото една, като едно оставят незащитено. Тогава най-много в два от трите случая обектът ще бъде поразен.

Изборът на направлението, по което ще бъдат изпратени самолетите, т. е. реализация на стратегия p_2, трябва да става с помощта на случаен механизъм. Същото се отнася и за разположението на зенитно-ракетните установки по направленията при реализация на стратегия q_2.

Ако многократно се извършва нападение и отбрана на обекта, тогава може да се твърди, че вероятността за поразяването му при нападение е $^2/_3$.

3. ПРАВОЪГЪЛНИ ИГРИ СЪС СМЕСЕНИ СТРАТЕГИИ

3.1 Понятие за смесена стратегия

Да разгледаме следния опростен пример:

Страната A изпраща на територията на страната B двойка бомбардировачи от един и същи тип. Единият от тях но-

си ядрени боеприпаси, а другият го придружава. За страната B възниква въпросът кой от двата самолета да бъде атакуван с изстребител, за да се порази носителят на ядрено оръжие, а за страната A — кой от самолетите да бъде носител?

Страната A има две стратегии: p_1 — носител да бъде първият, а придружител — вторият и p_2 — носител — вторият, а придружител — първият. Стратегиите на страната B също са две: q_1 да атакува първия самолет и q_2 да атакува втория.

Вероятността изтребителят да порази атакуваният от него самолет е 0,7, а вероятността той да бъде унищожен, ако атакува първия самолет, е 0,6 и, ако атакува втория самолет — 0,4. (Вероятността да бъде поразен, ако атакува първия самолет, е по-голяма, защото може да бъде обстрелван и от втория самолет.)

Платежната матрица на играта се определя от вероятността носителят да не бъде унищожен.

Ако страната A играе стратегия p_1, а страната B — q_1, вероятността носителят да бъде унищожен е равна на вероятността изтребителят да не бъде унищожен, умножена по вероятността той да унищожи целта $p_{11}=0{,}4.0{,}7=0{,}28$. Вероятността в този случай носителят да не бъде унищожен е $a_{11}=1-0{,}28=0{,}72$. Вероятността носителят да не бъде унищожен, когато е втори самолет и е атакуван, т.е. A играе p_2 и B — q_2, е равна на $a_{22}=1-p_{22}=1-0{,}6.0{,}7=1-0{,}42=0{,}58$. В останалите случаи (когато носителят не е атакуван) вероятностите за непоразяване на носителя са равни на 1.

Следователно платежната матрица на играта е:

	q_1	q_2
p_1	0,72	1
p_2	1	0,58

В тази игра долната ѝ цена е 0,72, а горната — 1. Матрицата на играта няма седлова точка.

В този случай не съществуват оптимални чисти стратегии и играчите са принудени да използуват и двете си стратегии. Ако страната B реши да атакува винаги само първия или

само втория самолет, страната A, установявайки това, ще използува за носител само втория или само първия самолет и той винаги ще остава непоразен. Аналогично, ако страната A реши да използува само едната си стратегия, например първата, страната B ще атакува винаги само първия самолет, което явно не е изгодно за страната A. При такива ситуации се налага да се използуват и двата начина за действие както от едната, така и от другата страна. В случая страната A ще трябва в едни случаи да използува първата си стратегия, а в други — втората. Страната B — също.

За разгледаната игра се оказва, че ако в 6 от 10 случая A използува за носител първия самолет, най-голямата вероятност за постигане на целите ще бъде равна $p=0{,}832$. Страната B ще нанесе максимално поражение на противника, ако по-често атакува първия самолет (в 6 от десетте случая).

В такива случаи изборът на стратегията може да се предостави на случаен механизъм, чрез който може да се получат вероятностите за използуване на отделните стратегии. Например страната A може да използува урна с 10 топки, от които 6 бели и 4 черни, като при изтегляне на бяла топка изпраща самолетите така, че носител да е първият самолет, а при изтегляне на черна топка — носител да е вторият самолет. Аналогично страната B може да използува урна с 10 топки (6 бели и 4 черни), като при изтегляне на бяла топка атакува първия самолет, а при черна — втория.

Вероятностите, с които всяка от страните използува своите стратегии, определят техните смесени стратегии.

Смесена стратегия на играча A се нарича всяка наредена система от m реални неотрицателни числа $X=(x_1, x_2,\ldots, x_m)$, удовлетворяващи условието $\sum_{i=1}^{m} x_i=1$, където x_i е вероятността играчът A да избере стратегия p_i. Смесената стратегия е един m—мерен вектор. Множеството от смесени стратегии се означава с S_m.

Аналогично смесена стратегия на играча B се нарича елемент от множеството S_n, т. е. всяка наредена система от n реални неотрицателни числа $Y=(y_1, y_2,\ldots, y_n)$, които удовлетворяват условието $\sum_{j=1}^{n} y_j=1$.

Смесена стратегия, при която играчите играят дадена стратегия с вероятност 1, а всички останали стратегии са с вероятност 0, се нарича чиста стратегия. Например стратегиите $p_1, p_2, \ldots, p_m$ са чисти за играча A, а стратегиите $q_1, q_2, \ldots, q_n$ са чисти за играча B.

За разглеждания случай със самолетите една двойка смесени стратегии на страните A и B е $X=(x_1, x_2)$ и $Y=(y_1, y_2)$, където:

$$x_1=0{,}6;\ x_2=0{,}4\ \ y_1=0{,}6;\ y_2=0{,}4;$$
$$x_1+x_2=0{,}6+0{,}4=1;\ y_1+y_2=0{,}6+0{,}4=1.$$

3.2. Оптимални смесени стратегии

Да разгледаме правоъгълната игра с матрици

$$\begin{pmatrix} a_{11}\, a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22} \ldots a_{2n} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m1}\, a_{m2} \ldots a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Ако играчът A използува смесената си стратегия $X=(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, а играчът B — смесената си стратегия $Y=(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, математическото очакване за печалбата на играча A се определя от формула

$$M(X,Y)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_i\, y_j.$$

Ако играчът A избере една произволна своя смесена стратегия X, принадлежаща на множеството от смесените му стратегии S_m, най-малкото, което ще получи (гарантираната печалба), ще бъде равно:

$$\min_{Y\in S_m} M(X,Y)=\min_{j}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_i.$$

Играчът A (максимизиращ играч) се стреми да получи максимална печалба и затова избира от множеството смесени стратегии S_m онази, за която се получава най-голяма стойност на гарантираната му печалба, т. е.

$$\max_{Y\in S_m}\min_{Y\in S_n} M(X,Y)=v_1=\min_{X\in S_m}\max_{i}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\, x_i.$$

Числото v_1 се нарича максимин на играта и е стойността на най-голямата гарантирана печалба.

Аналогично се получава и числото v_2, т. е.

$$v_2=\min_{Y\in S_n}\max_{X\in S_m} M(X,Y)=\min_{Y\in S_n}\max_{i}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, y_j,$$

което се нарича минимакс на играта и е стойността на най-малката гарантирана загуба за играча B.

Долната и горната цена на играта α и β не съвпадат с числата v_1 и v_2. Между тях съществува следната зависимост:

$$\alpha\le v_1;\ \beta=v_2.$$

Нека докажем само първото неравенство. (Второто се доказва аналогично на първото).

$$v_1=\max_{X\in S_m}\min_{Y\in S_n} M(X,Y)=\max_{X\in S_m}\min_{j}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\, x_i;$$

$$\max_{X\in S_m}\min_{j}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\, x_i\ge\min_{j}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\, x_i.$$

Това неравенство е изпълнено за всяка стратегия $X=(x_1, x_2, \ldots, x_m)$. Следователно то е изпълнено и за стратегията X, в която $x_{i_0}=1$, а всички останали $x_i=0$. За тази стратегия $X=(0, 0, 0, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$ е изпълнено:

$$\min_{j}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\, x_i=\min_{j} a_{ij}=a_{i_0 j_0}.$$

Следователно доказахме, че $v_1\le\alpha$.

От теорема 2.1 следва, че $v_1\le\alpha_2$.

Ако се окаже, че за някоя смесена стратегия X^0, принадлежаща на множеството смесени стратегии S_m на играча A, и Y^0, принадлежаща на множеството смесени стратегии S_n на играча B, и за всички $X\in S_m$ $Y\in S_n$

$$M(X,Y)\le M(X^0,Y^0)\le M(X^0,Y),$$

казва се, че задачата има решение в смесени стратегии.

Стратегиите X^0 и Y^0 се наричат оптимални смесени стратегии на играчите A и B, а $M(X,Y)=v$ — цена на играта.

Наредената двойка (X^0, Y^0) се нарича *решение на играта* или *стратегическа седлова точка*.

Ако за смесените стратегии X^0 и Y^0 е изпълнено горното неравенство, то ако играчът A избере стратегия X^0, той ще получи не по-малко от $v=M(X^0,Y^0)$ независимо от това как ще постъпи играчът B. Ако B избере стратегията Y^0, той няма да позволи на играча A да получи повече от $v=M(X^0,Y^0)$.

3.3. Основна теорема на правоъгълните игри

Съществото на оптималните смесени стратегии X^0 и Y^0 за играчите A и B и цената на играта се дават от следната *основна теорема на правоъгълните игри*.

Теорема 3.1. За всяка правоъгълна игра с матрица $U=(a_{ij})_{m\times n}$ съществуват величините

$$V_1=\max_{X\in S_m}\min_{Y\in S_n} M(X,Y) \text{ и } V_2=\min_{Y\in S_n}\max_{X\in S_m} M(X,Y),$$

които са равни помежду си.

За да докажем теоремата, нека си послужим със следната лема.

Нека е дадена матрицата

$$U=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{Vmatrix}.$$

Тогава: 1) или съществува елемент $(x_1, x_2,\ldots, x_n)$ от S_n такъв, че $a_{1j}x_1+a_{2j}x_2+\ldots+a_{mj}x_n\geq 0$ за $j=1, 2,\ldots, n$, 2) или съществува елемент $(y_1,\ldots, y_n)$ от S_n такъв, че $a_{i1}.y_1+a_{i2}y_2+\ldots+a_{in}y_n\leq 0$ за $i=1, 2,\ldots, m$.

Доказателство. Да въведем символите на Кронекер по следния начин:

$$\delta_{ij}=\begin{cases} 0, \text{ ако } i\neq j, \\ 1, \text{ ако } i=j. \end{cases}$$

Да положим

$$\begin{aligned} \delta^{(1)}&=(\delta_{11}, \delta_{21},\ldots, \delta_{m1}),\\ \delta^{(2)}&=(\delta_{12}, \delta_{22},\ldots, \delta_{m2}),\\ &\vdots\\ \delta^{(m)}&=(\delta_{1m}, \delta_{2m},\ldots, \delta_{mm}), \end{aligned}$$

където под $\delta^{(i)}$, $i=1, 2,\ldots, m$, се разбира точка от E, i-тата координата на която е 1, а всички останали са нули.

Да означим

$$\begin{aligned} a^{(1)}&=(a_{11}, a_{21},\ldots, a_{m1}),\\ a^{(2)}&=(a_{12}, a_{22},\ldots, a_{m2}),\\ &\vdots\\ a^{(n)}&=(a_{1n}, a_{2n},\ldots, a_{mn}), \end{aligned}$$

т. е., $a^{(j)}$, $j=1, 2, \ldots, n$) е точка с кординати елементите на j-тия стълб на матрицата U. Нека C е изпъкналата обвивка на множеството от $m+n$ точки $\delta^{(1)}, \ldots, \delta^{(m)}, a^{(1)}, a^{(2)},\ldots, a^{(n)}$ и $z=(0,\ldots, 0)$ е началото на кординатната система на пространството E^{m+n}. Да разгледаме два случая: 1. $z\in C$. Тогава $z=u_1\delta^{(1)}+\ldots+u_m\delta^{(m)}+v_1a^{(1)}+\ldots+v_na^{(n)}$, където $(u_1,\ldots, u_m v_1,\ldots, v_n)\in S_{m+1}$, т. е. z е изпъкнала линейна комбинация на точките $\delta^{(i)}$, $a^{(j)}$ за $i=1, 2,\ldots, m$, $j=1, 2,\ldots, n$ или $u_1\delta_{i1}+\ldots+u_m\delta_{im}+v_1a_{i1}+\ldots+v_na_{in}=0$, за $i=1, 2,\ldots, n$, откъдето, като използуваме определението на δ-та символите, следва, че $u_1+v_1a_{i1}+\ldots+v_na_{in}=0$. Тъй като $u_1\geq 0$, от това равенство следва неравенството

$$v_1a_{i1}+\ldots+v_na_{in}\leq 0.$$

Можем да положим

$$y_j=\frac{v_j}{v_1+\ldots+v_n} \text{ за } j=1, 2,\ldots, n,$$

тъй като $v_1+\ldots+v_n>0$. Точката $(y_1,\ldots, y_n)$ принадлежи на S_n. Следователно, като разделим $v_1a_{i1}+\ldots+v_na_{in}\leq 0$ с $v_1+\ldots+v_n$, ще получим $y_1a_{i1}+\ldots+y_na_{in}\leq 0$, т. е. условието на лемата е изпълнено.

2. $z\bar{\in}C$. Тогава по теоремата за разделящата хиперравнина съществува хиперравнина, съдържаща такава z, че всичките точки на C се намират в едно от двете полупространства. Нека уравнението на тази хиперравнина е

$$b_1t_1+\ldots+b_mt_m=b_{m+1}.$$

Понеже z лежи на хиперравнината, то $b_{m+1}=0$, т. е.

$$b_1t_1+\ldots+b_mt_m=0.$$

Без да нарушаваме общността, можем да предположим, че всички точки на C удовлетворяват неравенството

$$b_1 t_1 + \ldots + b_m t_m > 0.$$

То е вярно и за точките $\delta^{(i)} \in C$, т. е. $b_1\delta_{1i} + \ldots + b_m b_{mi} > 0$, откъдето следва, че $b_i > 0$ за $i = 1, 2, \ldots, m$. Това неравенство трябва да е вярно и за точките $a^{(j)}$, т. е.

$$b_1 a_{1j} + \ldots + b_m a_{mj} > 0.$$

Да положим

$$x_i = \frac{b_i}{b_1 + \ldots + b_m},$$

където $b_1 + \ldots + b_m > 0$. Очевидно $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in S_m$.

Следователно $x_1 a_{1j} + \ldots + x_m a_{mj} > 0$ за $j = 1, 2, \ldots, n$, а още повече $x_1 a_{ij} + \ldots + x_m a_{mj} \geq 0$, което показва, че първото условие на лемата е изпълнено.

Да преминем сега към доказателство на основната теорема 3.1. За всяко $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $M(X, Y)$ е непрекъсната линейна функция от $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, определена в затвореното подмножество S_m на пространството E^m и следователно $\max M(X, Y)$ съществува за всяко $X \in S_m$. Тъй като S_n е затворено подмножество на E^n и $\max M(X, Y)$ е непрекъсната функция на $Y \in S^n$, $\min\limits_{Y \in S_n} \max\limits_{X \in S_m} M(X, Y)$ съществува.

Аналогично може да се покаже, че $\max\limits_{X \in S_m} \min\limits_{Y \in S_n} M(X, Y)$ съществува.

Ако първото условие на лемата е изпълнено, съществува такава точка $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, че $a_{1j} x_1 + \ldots + a_{mj} x_m \geq 0$ за $j = 1, 2, \ldots, n$ и следователно $M(X, Y) = \sum\limits_{j=1}^{n} (a_{ij} x_1 + \ldots + a_{mj} x_m) y_j \geq 0$.

Но това неравенство е вярно за всяко $Y \in S_n$. Оттук следва, че

$$\min_{Y \in S_n} M(X, Y) \geq 0 \text{ и } \max_{X \in S_m} \min_{Y \in S_n} M(X, Y) \geq 0. \qquad (2.8.1)$$

Аналогично, ако е изпълнено второто условие на лемата, може да се покаже, че

$$\min_{Y \in S_n} \max_{X \in S_m} M(X, Y) \leq 0. \qquad (2.8.2)$$

Понеже или първото, или второто условие на лемата трябва да бъде изпълнено, тогава или неравенството (2.8.1), или неравенството (2.8.2) ще бъде изпълнено и следователно неравенството

$$\max_{X \in S_m} \min_{Y \in S_n} M(X, Y) < 0 < \min_{Y \in S_n} \max_{X \in S_m} M(X, Y) \qquad (2.8.3)$$

не е вярно.

Нека означим с

$$U_k = \begin{pmatrix} a_{11} - k & \ldots & a_{1n} - k \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} - k & \ldots & a_{mn} - k \end{pmatrix}$$

матрицата, която се получава при изваждането на числото k от всеки елемент на матрицата U. Тогава

$$M_k(X, Y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} (a_{ij} - k) x_i y_i \qquad (2.8.4)$$

е математическото очакване на печалбата за U_k.

По същия начин, по който показахме, че неравенството (2.8.3) не е вярно, можем да покажем, че и неравенството

$$\max_{X \in S_m} \min_{Y \in S_n} M_k(X, Y) < 0 < \min_{Y \in S_n} \max_{X \in S_m} M_k(X, Y) \qquad (2.8.5)$$

не е вярно за U_k. Но от (2.8.4) се вижда, че

$$M_k(X, Y) = M(X, Y) - k, \qquad (2.8.6)$$

а от (2.8.4) и (2.8.5) може да се заключи, че неравенството

$$\max_{X \in S_m} \min_{Y \in S_n} M(x, y) - k < 0 < \min_{Y \in S_n} \max_{X \in S_m} M(X, Y) - k$$

не е вярно. Следователно не е вярно и неравенството

$$\max_{X \in S_m} \min_{Y \in S_n} M(X, Y) < k < \min_{Y \in S_n} \max_{X \in S_m} M(X, Y). \qquad (2.8.7)$$

Но тъй като (2.8.7) не е вярно за произволно k, заключаваме, че неравенството

$$\max_{X \in S_m} \min_{Y \in S_n} M(X, Y) < \min_{Y \in S_n} \max_{X \in S_m} M(X, Y)$$

не е вярно, т. е. изпълнено е неравенството

$$\max_{X \in S_m} \min_{Y \in S_n} M(X, Y) \leq \min_{Y \in S_n} \max_{X \in S_m} M(X, Y).$$

Но според теоремата (2.1) е изпълнено неравенството

$$\max_{X \in S_m} \min_{Y \in S_n} M(X, Y) \leq \min_{Y \in S_n} \max_{X \in S_m} M(X, Y).$$

Следователно

$$\max_{X\in S_m}\min_{Y\in S_n} M(X, Y)=\min_{Y\in S_n}\max_{X\in S_m} M(X, Y).$$

Теорема 3.1 може да бъде формулирана още така. Всяка правоъгълна игра има цена и решение.

4. СВОЙСТВА НА ОПТИМАЛНИТЕ СМЕСЕНИ СТРАТЕГИИ

Нека е дадена една правоъгълна игра с платежна матрица. $U=(a_{ij})_{m\times n}$ и $M(X, Y)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i y_i$ е математическото очакване за печалбата на играча A.

От основната теорема на правоъгълните игри следва, че всеки от играчите има оптимална смесена стратегия. За определянето на стратегиите е необходимо да се познават техните свойства, които се установяват с помощта на следните теореми.

Теорема 4.1. За да бъде $X\in S_m$ оптимална смесена стратегия на играча A, необходимо и достатъчно е за всяка смесена стратегия $Y\in S_n$ на играча B да е изпълнено неравенството

$$M(X^0, Y)\geq v.$$

За да бъде смесената стратегия $Y^0\in S_n$ оптимална за играча B, необходимо и достатъчно е за всяка смесена стратегия $X\in S_m$ на играча A да бъде изпълнено неравенството

$$M(X, Y^0)\leq v.$$

Доказателство. Ако X^0 е оптимална стратегия за играча A, то съществува такава стратегия Y^0 за играча B, че (X^0, Y^0) е решение на играта и за всяко $Y\in S_n$ е изпълнено неравенството $v=M(X^0, Y^0)\leq M(X^0, Y)$, с което е доказана достатъчността на условието.

Необходимостта се установява по следния начин:

Да допуснем, че

$$M(X^0, Y)\geq v. \qquad (2.8.8)$$

Основната теорема установява съществуването на стратегическа седлова точка (X', Y'), за която

$$M(X, Y')\leq M(X', Y')\leq M(X', Y), \qquad (2.8.9)$$

което неравенство е изпълнено за всяко $X\in S_m$ и $Y\in S_n$.

Следователно то е изпълнено и за $X=X^0$, $Y=Y^0$, т. е.

$$M(X^0, Y')\leq M(X', Y')\leq M(X', Y^0). \qquad (6.8.10)$$

Тъй като v е цена на играта, тогава

$$v=M(X', Y'). \qquad (2.8.11)$$

От (2.8.8) и (2.8.11) следва, че

$$M(X^0, Y)\geq M(X', Y'). \qquad (2.8.12)$$

Ако в последното неравенство заместим Y с Y', ще получим

$$M(X^0, Y')\geq M(X', Y'). \qquad (2.8.13$$

От неравенствата (2.8.10) и (2.8.13) следва, че

$$M(X^0, Y')=M(X', Y'). \qquad (2.8.14)$$

От неравенствата (2.8.9) и (2.8.14) следва, че

$$M(X' Y')\leq M(X^0, Y')\leq M(X^0, Y),$$

което, според определението за оптимални стратегии, показва, че (X^0, Y') е решение на играта и следователно X^0 е оптимална стратегия за играча A. Аналогично се доказва и второто твърдене от теоремата.

Преди да формулираме следващата теорема, нека въведем някои означения. С X_i означаваме смесената стратегия $X=(x_1, x_2,..., x_m)$, за която $x_i=1$, а всички останали $x_k=0$ за $k=1, 2,... i-1, i+1,... m$, т. е. $X_i=(0, 0,..., 0, 1, 0,... 0)$. Аналогично с Y_j означаваме стратегията $Y_j=(0, 0,..., 0, 1, 0,..., 0)$. Тогава

$$M(X_i, Y)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i y_j=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ y_j;$$

$$M(X, Y_j)=\sum_{j=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i y_j=\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\ x_i.$$

Следователно $M(X, Y)$ може да се изрази по следния начин

$$M(X, Y)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i y_j=\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ y_j\right)x_i=\sum_{i=1}^{m} M(X_i, Y)x_i,$$

т. е.

$$M(X, Y)=\sum_{j=1}^{n} M(X, Y_j)\, y_j.$$

Теорема 4.2. За да бъдат X^0 и Y^0 оптимални смесени стратегии за играчите A и B и v — цена на играта, необходимо и достатъчно е за всяко X_i и Y_j да бъде изпълнено неравенството

$$M(X_i,\ Y^0)\leq v\leq M(X^0,\ Y_j).$$

Доказателство: Необходимостта на условието следва от определението за оптимални стратегия и цена на играта, където X е заменено с X_i, Y с Y_j, а $M(X^0,\ Y^0)$ — с v.

Достатъчност. Нека е изпълнено неравенството $M(X_i,\ Y^0)\leq v\leq M(X^0,\ Y_j)$.

Тогава за всяко $X=(x_1,\ x_2,\ldots,\ x_m)\in S_m$ е изпълнено неравенството

$$\sum_{i=1}^{n} M(X_i,\ Y^0)x_i \leq \sum_{i=1}^{m} v\,.\,x_i, \text{ т. е.}$$

$$M(X,\ Y^0)\leq v. \tag{2.8.15}$$

Аналогично се доказва, че

$$M(X^0,\ Y)\geq v. \tag{2.8.16}$$

Ако в (2.8.15) и (2.8.16) заместим X с X^0 и Y с Y^0, ще получим

$$M(X^0,\ Y^0)\leq v \text{ и } M(X^0,\ Y^0)\geq v,$$

следователно

$$M(X^0,\ Y^0)=v. \tag{2.8.17}$$

От неравенствата (2.8.15) и (2.8.16) и равенството (2.8.17) получаваме

$$M(X,\ Y^0)\leq M(X^0,\ Y^0)\leq M(X^0,\ Y),$$

откъдето следва, че X^0 и Y^0 са оптимални стратегии за играчите A и B.

Ако използуваме, че

$$M(X_i,\ Y^0)=\sum_{j=i}^{n} a_{ij}\,y_j^0 \text{ и } M(X^0,\ Y_j)=\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_i^0,$$

ще получим

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\,x_i^0\geq v \text{ и} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,y_i^0\leq v. \tag{2.8.18}$$

Теорема 4.3. Ако X^0 и Y^0 са оптималните смесени стратегии на играчите, а V — цена на играта и ако за някое X_i, $(i=1,\ 2,\ldots,\ m)$ е изпълнено неравенството $M(X_i,\ Y^0)<v$ то $x_i^0=0$, т. е. $X^0=(x_1^0,\ x_2^0,\ldots,\ x_{i-1}^0,\ 0,\ x_{i+1}^0\ldots\ x_m^0)$, а ако за някое $y_j(j=1,\ 2,\ldots,\ n)$ е изпълнено неравенството $M(X^0,\ Y_j)>V$, тогава $y_j^0=0$, т. е. $Y^0=(y_1^0,\ y_2^0,\ldots,\ y_{j-1}^0,\ 0,\ y_{j+1}^0\ldots\ y_n^0)$.

Доказателство: Нека за някое i

$$M(X_i,\ Y^0)<v. \tag{2.8.19}$$

Трябва да докажем, че $x_i^0=0$. Да допуснем, че $x_i^0\neq 0$. Тогава, ако умножим двете части на последното неравенство с x_i^0, ще получим

$$M(X_i,\ Y^0)x_i^0<v\,x_i^0. \tag{2.8.20}$$

От теорема (4.2.) знаем, че

$$M(X_k,\ Y^0)\leq v \text{ за } k=1,\ 2\ldots\ i-1,\ i+1,\ldots\ m.$$

Умножаваме двете страни на това неравенство с x_k^0 и като сумираме по k от 1 до m, получаваме

$$\sum_{k=1}^{m} M(X_k,\ Y^0)x_k^0 \leq \sum_{k=1}^{m} v\,x_k^0 \text{ за } \kappa\neq i.$$

Прибавяме към полученото неравенство старото неравенство (2.8.20) и получаваме

$$\sum_{i=1}^{m} M(X_i,\ Y^0)x_i^0< \sum_{i=1}^{m} v x_i^0=v.$$

Следователно

$$M(X^0,\ Y^0)<v,$$

което противоречи на условието, че v е цена на играта. С това първата част от теоремата е доказана. Втората се доказва аналогично.

Чиста стратегия, която влиза в оптималната стратегия с вероятност 0, се нарича неполезна (лоша). От предната теорема следва, че ако е изпълнено неравенството

$$M(X_i,\ Y^0)<v,$$

то $x_i^0=0$ и следователно чистата стратегия p_i е неполезна.

Следствие 4.1. При правоъгълни игри с матрици 2×2 за оптималните стратегии X^0 и Y^0 и цената на играта v са изпълнени равенствата

$$\sum_{i=1}^{2} a_{ij}\, x_i^0 = v = \sum_{j=1}^{2} a_{ij}\, y_j^0,$$

т. е. неравенствата (2.8.18) се изпълняват като равенства.

Доказателство: Нека $X^0=(x_1^0,\ x_2^0)$ и $Y^0=(y_1^0,\ y_2^0)$ са оптималните стратегии на играчите A и B за играта с матрица

$$U=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

От теорема 4.3. следва, че

$$M(X^0,\ Y_1)=a_{11}x_1^0+a_{21}x_2^0\geq v;\quad M(X_1,\ Y^0)=a_{11}y_1^0+a_{12}y_2^0\leq v; \tag{2.8.21}$$

$$M(X^0,\ Y_2)=a_{12}x_1^0+a_{22}x_2^0\geq v;\quad M(X_2,\ Y^0)=a_{21}y_1^0+a_{22}y_2^0\leq v.$$

Да допуснем, че

$$M(X^0,\ Y_1)>v \text{ и } M(X^0,\ Y_2)>v.$$

Тогава по теорема 4.3. следва, че $y_1^0=0$, а тъй като $y_1^0+y_2^0=1$, следва, че $y_2^0=1$, т. е.

$$Y^0=(y_1^0,\ y_2^0)=(0,\ 1)=Y_2.$$

Това означава, че играчът B винаги използува втората си стратегия. Ако използуваме второто неравенство и това, че $Y_2=Y^0$, ще получим

$$M(X^0,\ Y^0)>v,$$

което противоречи на определението за цена на играта. Следователно неравенствата (2.8.21) се изпълняват като равенства, т. е. за правоъгълни игри с размери 2×2 са изпълнени следните системи уравнения:

$$\left|\begin{array}{l} x_1^0+x_2^0=1 \\ a_{11}x_1^0+a_{21}x_2^0=v \\ a_{12}x_1^0+a_{22}x_2^0=v \end{array}\right. \qquad \left|\begin{array}{l} y_1^0+y_2^0=1 \\ a_{11}y_1^0+a_{12}y_2^0=v \\ a_{21}y_1^0+a_{22}y_2^0=v. \end{array}\right. \tag{2.8.22}$$

Те ни дават възможност да решим всяка правоъгълна игра с размери 2×2.

Пример 1. Да се реши правоъгълната игра с матрица

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

За оптималните смесени стратегии $X^0=(x_1^0,\ x_2^0)$ и $Y^0=(y_1^0,\ y_2^0)$ и цената на играта са изпълнени равенствата

$$\left|\begin{array}{l} x_1^0+x_2^0=1 \\ 3x_1^0-2x_2^0=v \\ -x_1^0+4x_2^0=v \end{array}\right. \qquad \left|\begin{array}{l} y_1^0+y_2^0=1 \\ 3y_1^0+y_2^0=v \\ -2y_1^0+4y_2^0=v. \end{array}\right.$$

Решаваме тези системи:

$$\left|\begin{array}{l} x_1^0=1-x_2^0 \\ 3(1-x_2^0)-2x_2^0=-(1-x_2^0)+4x_2^0 \\ 3-3x_2^0-2x_2^0=-1+x_2^0+4x_2^0 \end{array}\right. \qquad \left|\begin{array}{l} y_1^0=1-y_2^0 \\ 3(1-y_2^0)-y_2^0=-2(1-y_2^0)+4y_2^0 \\ 3-3y_2^0-y_2^0=2+2y_2^0+4y_2^0 \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{l} 3-5x_2^0=5x_2^0-1 \\ 4=10x_2^0 \end{array}\right. \qquad \left|\begin{array}{l} 3-4y_2^0=-2+6y_2^0 \\ 5=10y_2^0. \end{array}\right.$$

Получаваме

$$x_2^0=\frac{4}{10}=0{,}4, \qquad y_2^0=\frac{5}{10}=0{,}5.$$

Следователно $x_1^0=0{,}6$, $X^0=(0{,}6;\ 0{,}4)$, $y_1^0=0{,}5$ или още

$$X^0=\left(\frac{3}{5},\ \frac{2}{5}\right),\quad Y^0=\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right),\ \text{т. е. } Y^0=(0{,}5;\ 0{,}5).$$

Цената на играта може да се определи от всяко уравнение, в което тя участвува

$$v=3x_1^0-2x_2^0=3.0{,}6-2.0{,}4=1{,}8-0{,}8=1.$$

Пример 2. Да се реши правоъгълната игра с матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$$

Решение:

$$\left|\begin{array}{l} x_1^0+x_2^0=1 \\ x_1^0+2x_2^0=-4x_1^0+6x_2^0 \end{array}\right. \qquad \left|\begin{array}{l} y_1^0+y_2^0=1 \\ y_1^0-4y_2^0=-2y_1^0+6y_2^0 \end{array}\right.$$

$$x_1^0=\frac{8}{13},\quad x_2^0=\frac{5}{13},\qquad y_1^0=\frac{10}{13},\quad y_2^0=\frac{3}{13},$$

$$X^0=\left(\frac{8}{13},\ \frac{5}{13}\right),\ v=-\frac{2}{13},\qquad Y^0=\left(\frac{10}{13},\ \frac{3}{13}\right).$$

Теорема 4.4. Ако всички елементи на платежната матрица $(a_{ij})_{m\times n}$ на игра с цена v и оптимални стратегии X^0 и Y^0 прибавим едно и също число k, за новата игра с матрица

$(a_{ij}+k)$ оптималните смесени стратегии няма да се изменят, а цената на играта ще бъде $v+\kappa$.

Доказателство: Математическата надежда за печалбата на новата игра ще бъде

$$\overline{M}(X,Y)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}+k)x_iy_i=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_iy_j+k\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x_iy_j, \text{ т.е.}$$

$$\overline{M}(X,Y)=M(X,Y)+k \qquad (2.8.23)$$

За оптималните смесени стратегии X и Y са изпълнени неравенствата

$$M(X,Y^0)\leq M(X^0,Y^0)\leq M(X^0,Y).$$

Прибавяме към всички части на неравенството k и получаваме

$$M(X,Y^0)+k\leq M(X^0,Y^0)+k\leq M(X^0,Y)+k.$$

Като използуваме равенството (2.8.23), получаваме

$$\overline{M}(X,Y^0)\leq\overline{M}(X^0,Y^0)\leq\overline{M}(X^0,Y).$$

От това следва, че X^0 и Y^0 са оптимални стратегии за новата игра и $\overline{M}(X^0,Y^0)=v+k$ е цената, т.е. $\overline{v}=v+k$.

Пример 3. Играта е зададена с матрица 3×3; т.е.

$$\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&-1&3\\-1&2&-1\end{pmatrix}.$$

Да се намерят v и X^0, Y^0. Играта няма седлова точка, защото $v_1=-1$, $v_2=1$. Въз основа на теоремата 4.1 е достатъчно да се намерят числата x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 и v, удоволетворяващи следните условия:

$$\begin{aligned}
x_1+x_2+x_3&=1, & y_1+y_2+y_3&=1,\\
0\leq x_i&\leq1, & 0\leq y_j&\leq1,\\
i&=1,2,3, & j&=1,2,3,\\
x_1-x_2-x_3&\geq v, & y_1-y_2-y_3&\leq v,\\
-x_1-x_2+2x_3&\geq v, & -y_1-y_2+3y_3&\leq v,\\
-x_1+3x_2-x_3&\geq v, & -y_1+2y_2-y_3&\leq v.
\end{aligned}$$

От теорема 3.1 знаем, че тази система от равенства и неравенства има решения. Ще заменим шестте неравенства с равенствата:

$$\begin{aligned}
x_1-x_2-x_3&=v, & y_1-y_2-y_3&=v,\\
-x_1-x_2+2x_3&=v, & -y_1-y_2+3y_3&=v,\\
-x_1+3x_2-x_3&=v, & -y_1+2y_2-y_3&=v,\\
x_1+x_2+x_3&=1, & y_1+y_2+y_3&=1.
\end{aligned}$$

Като решим системата от уравнения, ще получим

$$x_1=\frac{6}{13},\quad x_2=\frac{3}{13},\ x_3=\frac{4}{13};\ y_1=\frac{6}{13},\ y_2=\frac{4}{13},\ y_3=\frac{3}{13};\ v=-\frac{1}{13}$$

Тъй като решенията са неотрицателни, те са търсените стойности за компонентите на X^0 и Y^0, т.е.

$$X^0=\left(\frac{6}{13},\frac{3}{13},\frac{4}{13}\right),$$

$$Y^0=\left(\frac{6}{13},\frac{4}{13},\frac{3}{13}\right).$$

Да разгледаме един пример, в който ще покажем как се постъпва, когато получените уравнения са несъвместими или пък имат решения вън от интервала $(0,1)$.

Пример 4. Нека е зададена играта с матрица 3×3

$$U=\begin{pmatrix}3&-2&4\\-1&4&2\\2&2&6\end{pmatrix}.$$

Да се намерят v и X^0, Y^0. Няма седлова точка $v_1=2$, $v_2=3$. Трябва да намерим числа x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 и v, удовлетворяващи условията:

$$\begin{aligned}
x_1+x_2+x_3&=1, & y_1+y_2+y_3&=1,\\
0\leq x_i&\leq1, & 0\leq y_j&\leq1,\\
3x_1-x_2+2x_3&\geq v, & 3y_1-2y_2+4y_3&\leq v,\\
-2x_1+4x_2+2x_3&\geq v, & -y_1+4y_2+2y_3&\leq v,\\
4x_1+2x_2+6x_3&\geq v, & 2y_1+2y_2+6y_3&\leq v.
\end{aligned}$$

Да разгледаме първо случая, когато шестте неравенства са заменени с равенствата:

$$\begin{aligned}
3x_1-x_2+2x_3&=v, & 3y_1-2y_2+4y_3&=v,\\
-2x_1+4x_2+2x_3&=v, & -y_1+4y_2+2y_3&=v,\\
4x_1+2x_2+6x_3&=v, & 2y_1+2y_2+6y_3&=v,\\
x_1+x_2+x_3&=1, & y_1+y_2+y_3&=1.
\end{aligned}$$

Лесно може да се докаже, че тази система от уравнения няма такова решение, че всички числа x_i и y_j да бъдат неотрицателни. Ясно е, че не трябва да заменяме всички не-

равенства с равенства. Да запазим само в първото неравенство знака за строго неравенство, т.е.

$$3x_1 - x_2 + x_3 > v.$$

Но тогава въз основа на теорема 4.3 следва, че $y=0$ и като заместим y_1 с 0 в горните равенства, получаваме система уравнения, която обаче е несъвместима. Затова продължаваме да комбинираме по този начин заместването на знака за неравенство със знаци за строго неравенство и равенство и стигаме до следния удобен случай:

$$\begin{aligned} -3x_1 - x_2 + 2x_3 &= v, & 3y_1 - 2y_2 + 4y_3 &< v, \\ -2x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= v, & -y_1 + 4y_2 + 2y_3 &= v, \\ 4x_1 + 2x_2 + 6x_3 &> v, & 2y_1 + 2y_2 + 6y_3 &= v, \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 1, & y_1 + y_2 + y_3 &= 1. \end{aligned}$$

От $4x_1+2x_2+6x_3>v$ въз основа на теорема 4.3 следва, че $y_3=0$, а от $3y_1-2y_2+4y_3<v$, че $x_1=0$. Като заместим тези стойности и решим системата, получаваме:

$$x_2=0,\ x_3=1;\ y_1=\frac{2}{5},\ y_2=\frac{3}{5};\ v=2.$$

Като заместим получените стойности в първоначалните неравенства, ще видим, че те ги удовлетворяват. Следователно

$X^0=(0,0,1)$ и $Y^0=\left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, 0\right)$ са оптималните стратегии за играчите A и B, а цената на играта е 2.

5. СЪОТНОШЕНИЕ НА ПРЕВЪЗХОДСТВО НА ЕДНА СТРАТЕГИЯ НАД ДРУГА

Както установихме, когато са изпълнени неравенствата

$$M(X_i, Y^0) < v \text{ или } M(X^0, Y_j) > v,$$

чистите стратегии p_i и q_j участвуват в оптималните смесени стратегии X^0 и Y^0 с нулеви вероятности и се наричат лоши (неполезни) стратегии за играчите A и B. Използуването на тези стратегии е нецелесъобразно и те трябва да се премахнат. За тази цел въвеждаме понятията подчинена и доминираща стратегия.

Да разгледаме правоъгълната игра с матрица

$$\begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ -3 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$
$$q_1 \quad q_2 \quad q_3$$

Стратегията p_3 осигурява на играча A във всички случаи по-малка печалба от стратегията p_1. Той ще предпочете да играе първата си стратегия пред третата, защото ако играчът B играе първата си стратегия, играчът A ще получи печалба 2, ако играе първата си стратегия, и 1, ако играе третата си стратегия. Ако играчът B играе втората си стратегия, играчът A ще получи печалба 4, ако играе първата си стратегия, и 3, ако играе третата си стратегия. И накрая, ако играчът B играе третата си стратегия, играчът A ще получи 1 за първата си стратегия и 2— за третата си стратегия.

За играча B аналогично може да се установи, че третата стратегия му носи по-малко загуби от втората, защото $-1<4$, $4<6$ и $-2<3$. Следователно не е целесъобразно той да използува втората си стратегия. Оказва се, че за да намерим оптималното решение на началната игра, достатъчно е да намерим решението на играта с матрица

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Оптималните смесени стратегии за тази игра са $X^0=(0{,}97;0{,}3)$, $Y^0=(0{,}5;\ 0{,}5)$, а цената на играта е 0,5. Оптималните смесени стратегии за първоначалната игра са $X^0=(0{,}7;\ 0{,}3;0)$ и $Y^0=(0{,}5;0;\ 0{,}5)$, а цената на играта е 0,5, което може лесно да се установи, ако използуваме свойствата на оптималните смесени стратегии. В случая казваме, че третата стратегия на играча A е подчинена на първата или се превъзхожда от нея. Аналогично втората стратегия на играча B е подчинена на третата му стратегия.

Ако елементите на k-тия ред (съответно стълб) на платежната матрица на една игра са по-големи (по-малки) от елементите на i-тия ред (стълб), казваме, че *i-тата стратегия е подчинена на k-тата стратегия или че k-тата стратегия доминира над i-тата.*

Теорема 5.1. Ако за правоъгълна игра с матрица (a_{ij}) някоя стратегия на играча A или B е подчинена, тя е неполезна (лоша) стратегия.

Доказателство. Да докажем, че ако стратегията p_i е подчинена на стратегията p_k, стратегията p_i е неполезна стратегия за играча A, т.е. участвува с нулева честота в оптималната му смесена стратегия.

Тъй като p_i е подчинена на p_k, то

$$a_{ij}<a_{kj}, \quad j=1,2,\ldots,n.$$

Тогава за оптималната стратегия Y^0 са изпълнени

$$M(X_i,Y^0)=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j^0<\sum_{j=1}^{n}a_{kj}y_j^0=M(X_k,Y^0)\leq v.$$

Следователно

$$M(X_i,Y^0)<v,$$

т.е. p_i е неполезна стратегия на играча A.
Оптималната смесена стратегия на играча A е

$$X^0=(x_1^0,x_2^0,\ldots x_{i-1}^0,0,x_{i+1}^0,\ldots x_m^0).$$

Аналогично се доказва и за играча B.

Да разгледаме правоъгълна игра с матрица

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & -10 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

В този случай нито един ред или стълб не се превъзхожда от друг, но съществува линейна комбинация на втория и третия стълб, която превъзхожда първия стълб. Например:

$$-2<\frac{9}{10}\cdot 0-\frac{1}{10}\cdot 10;\ \text{т.е.}-2<-1$$

и

$$1<\frac{9}{10}\cdot 5+\frac{1}{10}\cdot 0,\ \text{т.е.}\ 1<4{,}5.$$

Следователно първата стратегия на играча B не е изгодна и той ще предпочете да играе втората си и третата стратегия. В случая се казва, че първата стратегия е подчинена на изпъкнала линейна комбинация на втората и третата стратегия.

Теорема 5.2. Ако някоя стратегия е подчинена на изпъкнала линейна комбинация от стратегии, подчинената стратегия е неполезна.

Доказателство. Нека k-тата стратегия е подчинена на изпъкналата линейна комбинация на s-тата и r-тата, т. е.

$$a_{kj}<\lambda a_{sj}+(1-\lambda)a_{rj} \text{ за } j=1,2,\ldots,n.$$

Тогава са изпълнени неравенствата

$$M(X_k,Y^0)=\sum_{i=1}^{n} a_{kj}y_j^0<\lambda\sum_{j=1}^{n} a_{sj}y_j+(1-r)\sum a_{rj}y_j^0=$$

$$=\lambda M(X_s,Y^0)+(1-\lambda)M(X_r,Y^0)\leq \lambda v+(1-r)v=v.$$

Следователно

$$M(X_k,Y^0)<v$$

и стратегията p_k е лоша за играча A.
Оптималната смесена стратегия на играча A ще има вида

$$X^0=(x_1^0,x_2^0,\ldots,x_{k-1}^0,0,x_{k+1}^0,\ldots,x_m^0).$$

Аналогично се доказва и за играча B. Както видяхме, в разгледаните примери редовете и стълбовете, които съответствуват на подчинените стратегии, може да се зачертаят и да се реши играта с новата матрица. Следната теорема дава връзка между решението на началната игра и играта с намалената матрица.

Теорема 5.3. Ако i-тата стратегия на една правоъгълна игра с матрица U е подчинена на някоя друга стратегия или на изпъкнала линейна комбинация на други стратегии, правоъгълната игра с матрица U', получена от U чрез зачертаване на i-тия ред или i-тия стълб, има същата цена и

а) ако i-тата стратегия е на играча A и $\widetilde{X}^0=(x_1^0,x_2^0,\ldots,x_{n-1}^0)$ е оптималната му стратегия за играта с матрица U', оптималната му стратегия за играта с матрица U ще бъде

$$X^0=(x_1^0,x_2^0,\ldots,x_{i-1}^0,0,x_{i+1}^0,\ldots,x_{m-1}^0);$$

б) ако i-тата стратегия е на играча B и $Y^0=(y_1^0,y_2^0,\ldots,y_{n-1}^0$ е оптималната му стратегия за играта с матрица U', оптималната му стратегия за играта с матрица U ще бъде

$$Y^0=(y_1^0,y_2^0,\ldots,y_{i-1}^0,0,y_{n+1}^0,\ldots,y_{m-1}^0).$$

Тази теорема е следствие на теореми 5.2 и 5.1 и позволява, ако е възможно да се намалява размерността на платежната матрица на правоъгълните игри, което от своя страна води до по-лесното им решаване.

Например нека имаме правоъгълната игра с матрица

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

В нея можем да зачертаем втория стълб, понеже третият го превъзхожда, и получаваме матрицата

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

В нея третият стълб може да се представи като изпъкнала линейна комбинация на първия и втория, т.е.

$$2=\frac{1}{2}.3+\frac{1}{2},\ 3=\frac{1}{2}.1+\frac{1}{2}.5,\ -1<\frac{1}{2}.2+\frac{1}{2}.2.$$

Тъй като имаме строго неравенство, третият стълб се превъзхожда от линейната комбинация на първия и втория.

За новата матрица

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 5 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

третият ред се представя като линейна комбинация на първия и втория, т.е.

$$2=\frac{1}{2}.3+\frac{1}{2},\ 2<\frac{1}{2}.1+\frac{1}{2}.5.$$

Следователно се получава матрицата

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Оптималните стратегии за тази игра са $X^0=\left(\frac{2}{3},\ \frac{1}{3}\right)$, $Y^0=\left(\frac{2}{3},\ \frac{1}{3}\right)$, а цената на играта $v=2\frac{1}{3}$. Следователно решението на първоначалната правоъгълна игра е следното:

$$X^0=\left(\frac{2}{3},0,\frac{1}{3},0\right),$$

тъй като сме зачертали само третия ред,

$$Y^0=\left(\frac{2}{3},0,\frac{1}{3},0\right),$$

тъй като сме зачертали втория и четвъртия стълб, и $v=2\frac{1}{3}$.

6. МЕТОДИ ЗА РЕШАВАНЕ НА ПРАВОЪГЪЛНИ ИГРИ

Както установихме, при правоъгълните игри с матрица 2×2 са изпълнени равенствата

$$\sum_{i=1}^{2}a_{ij}x_i^0=v \text{ и } \sum_{j=1}^{2}a_{ij}y_j^0=v,$$

от които се получават две системи уравнения:

$$\left|\begin{array}{r} x_1^0+x_2^0=1, \\ a_{11}x_1^0+a_{21}x_2^0=v, \\ a_{21}x_1^0+a_{22}x_2^0=v, \end{array}\right| \qquad \left|\begin{array}{r} y_1^0+y_2^0=1, \\ a_{11}y_1^0+a_{12}y_2^0=v, \\ a_{21}y_1^0+a_{22}y_2^0=v. \end{array}\right|$$

Решаването им води до намиране на оптималните стратегии и цената на играта, т.е. до решаването на игрите.

За правоъгълни игри с матрици с размери, по-големи от 2×2, тези равенства не са изпълнени и в общия случай се получават системи линейни неравенства, които не може да се решат със способите на елементарната алгебра. За решаването на тези игри са създадени някои итеративни методи или се използува възможността да се сведе всяка задача от теорията на игрите към задача на линейното програмиране.

Игри с матрици $2\times n$ или $m\times2$ може да се решават графично, а като се използуват съотношенията на превъзходства, много правоъгълни игри може да бъдат сведени към задачи с такива матрици.

6.1. Графичен метод за решаване на правоъгълни игри с матрици $2\times n$ или $m\times2$

Нека илюстрираме метода с един пример за правоъгълна игра с матрица 2×3, т.е.

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Нека смесената стратегия на играч A е $X=(x,1-x)$. Тогава, ако играчът B използува първата си чиста стратегия q_1, ще бъде изпълнено неравенството

$$2x+3(1-x)=3-x\geq v, \qquad (2.8.24)$$

ако използува втората си чиста стратегия q_2 — неравенството

$$4x+2(1-x)=2+2x\geq v \qquad (2.8.25)$$

и третата си чиста стратегия q_3 — неравенството

$$x+5(1-x)=5-4x\geq v. \qquad (2.8.26)$$

Неравенствата (2.8.24), (2.8.25), (2.8.26) и неравенствата

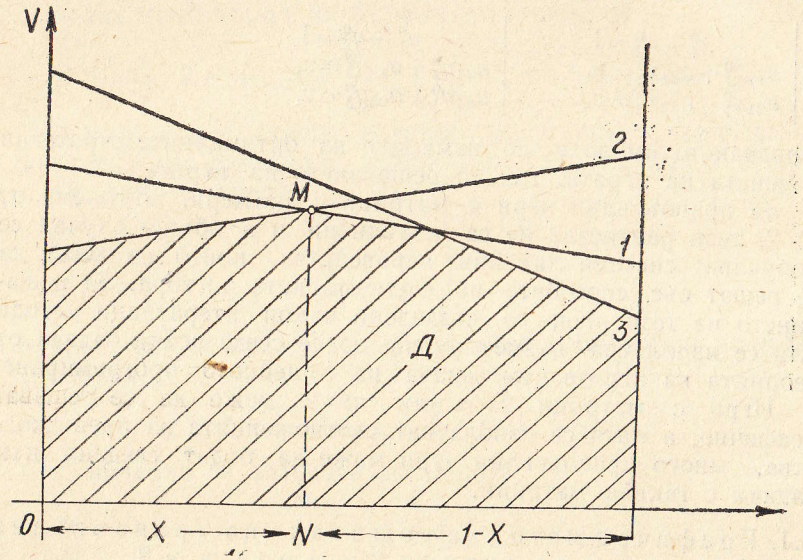
$$x\geq 0,\ x\leq 1$$

определят една област в равнината xOv (фиг. 2.8.2).

Прекарваме трите прави

$$v=3-x,\ v=2+2x \text{ и } v=5-4x$$

в интервала [0, 1]. По този начин се получава областта D.



Фиг. 2.8.2

При всеки избор на стратегия $(x,\ 1-x)$ играчът A ще получи най-малко толкова, колкото е ординатата на правата, ограничаваща множеството D, която съответствува на това x. Играчът A се стреми да избере онова X, за което се получава максимална стойност на тези ординати, т.е. на цената v.

В случая при $x=ON$ се получава максимална стойност на цената на играта $v=NM$. Оптималните стратегии за A се получават чрез съвместно решаване на уравненията

$$v=3-x$$

и

$$v=2-2x.$$

След решаването им получаваме $x=(^1/_3,\ ^2/_3)$, а цената на играта $v=^8/_3$. От фиг. 2.8.2 се вижда, че третата чиста стратегия не влиза в оптималната смесена стратегия на играча B, т.е. по този начин се получава матрица с размери 2×2, т.е.

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Оптималната стратегия на играча B $Y^0=(y_1^0,y_2^0,0)$ се получава от системата

$$\begin{cases} y_1^0+y_2^0=1 \\ 2y_1^0+4y_2^0=3y_1^0+2y_2^0. \end{cases}$$

След решаването ѝ намираме, че $Y^0=\left(\frac{2}{3},\ \frac{1}{3},\ 0\right)$.

По същия начин се решават и игрите с матрици $2\times n$, като най-голямата ордината на граничните точки на областта дава цената на играта, а абсцисата на тези точки — стойността на X^0.

След това матрицата на играта се трансформира в матрици с размери 2×2, откъдето се намират честотите на активните чисти стратегии на играча. Останалите чисти стратегии са лоши, т.е. участвуват с нулеви честоти в оптималните смесени стратегии.

Игри с размери на матриците $m\times 2$ се решават по аналогичен начин, като цената на играта е равна на стойността на най-малката ордината на точките от множеството.

Пример: Да се реши правоъгълната игра с матрица

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение:

Неравенствата

$$1+3y\leq v,\ 2+y\leq v,\ 4-2y\leq v,\ y>0 \text{ и } y<1$$

определят областта D в равнината yOv (фиг. 2.8.3).

Точката M лежи на правите с уравнения

$$1+3y=v \text{ и } 4-2y=v.$$

Следователно $Y^0=\left(\frac{3}{5},\ \frac{2}{5}\right)$, а $v=2\frac{4}{5}$.

От матрицата

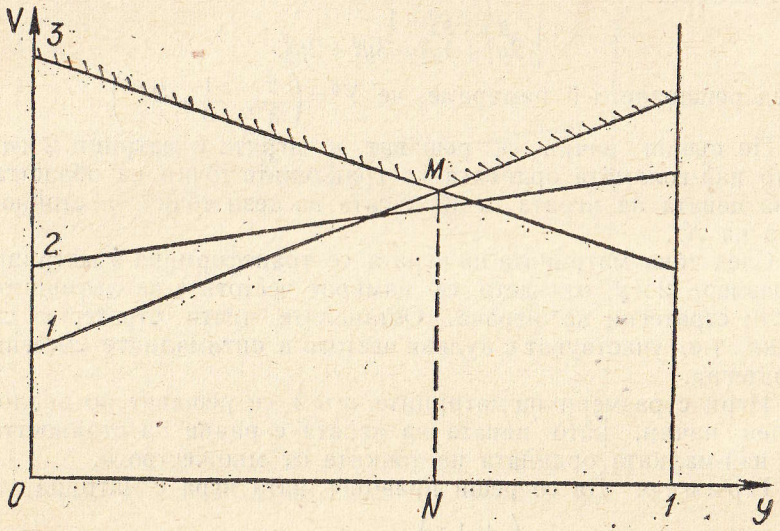
$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

определяме $X^0=(x_1^0,0,x_3^0)$, като решим системата

$$\begin{cases} 4x_1^0+2x_3^0=x_1^0+4x_3^0 \\ x_1^0+x_3^0=1. \end{cases}$$

Следователно $X^0=\left(\frac{2}{5},0,\frac{3}{5}\right)$.

Графичният метод се прилага и за игри с матрици $3\times n$ или $n\times 3$, като се използува пространствена координатна



Фиг. 2.8.3

система, но самото построяване е трудно и се допускат грешки. В общия случай, когато $m>3$ и $n>3$, графичният метод за решаване на задачите е неприложим. В този случай се прилагат аналитични методи, които дават точни решения, но са доста обемисти, особено когато размерите на матрицата са по-големи. Върху тях няма да се спираме, а ще разгледаме метода, който ни позволява да намерим цената на играта и оптималните стратегии с каквато точност желаем.

Да разгледаме един пример на военна игра, като съставим за нея матрица, и я решим по графичния метод.

Пример. Една подводница трябва да премине през пролив, без да бъде открита от два патрулни самолета, които пре-

литат над пролива всеки ден. За удобство проливът е разделен на три квадрата A, B и C. Подводницата трябва да използува два различни квадрата. Всеки самолет може да патрулира само в един квадрат, като вероятността да открие подводницата в различните квадрати е, както следва: $P_a=0{,}20$, $P_в=0{,}40$ и $P_с=0{,}80$.

За подводницата са възможни следните стратегии:

— AB — да се появи в квадратите A и B;

— AC — да се появи в квадратите A и C;

— BC — да се появи в квадратите B и C.

За самолетите са възможни следните стратегии:

— AA — двата самолета патрулират в един и същ квадрат A;

— AB — двата самолета патрулират в квадратите A и B;

— AC — двата самолета патрулират в квадратите A и C;

— BB — двата самолета патрулират в квадрат B;

— BC — двата самолета патрулират в квадратите B и C;

— CC — двата самолета патрулират в квадрат C.

Вероятностите за откриване на подводницата са следните:

— за случая (AA,AB), $P(AA,AB)=P(A)-P(AA)=0{,}36$, т.е. събитията да бъде открита тя от единия или от другия самолет са съвместими събития;

— за случая (AA,AC) вероятността е също 0,36;

— за случая (AA,BC) вероятността е 0;

— за случая (AB,AB) $P(AB,AB)=P(A)+P(B)-P(AB)=0{,}52$;

— за случая (AB,AC) вероятността е 0,20 и т.н.

Ако в квадрата, в който изплува подводницата, няма патрулиращи самолети, вероятността да бъде открита тя е 0. Ако в този квадрат патрулира един самолет, вероятността е равна съответно на 0,20, 0,40 и 0,80. И накрая, ако във всеки квадрат, в който изплува подводницата, патрулира един самолет, вероятността се изчислява по формулата за събиране на вероятности на съвместими събития. Следователно платежната матрица на тази игра е:

$$\begin{Bmatrix} 0{,}36 & 0{,}36 & 0 \\ 0{,}52 & 0{,}20 & 0{,}40 \\ 0{,}20 & 0{,}84 & 0{,}80 \\ 0{,}64 & 0 & 0{,}64 \\ 0{,}40 & 0{,}80 & 0{,}88 \\ 0 & 0{,}96 & 0{,}96 \end{Bmatrix}.$$

Нека преработим тази матрица. Първият ред се превъзхожда от петия ред. Зачертаваме го и получаваме матрицата

$$\begin{pmatrix} 0{,}52 & 0{,}20 & 0{,}40 \\ 0{,}20 & 0{,}84 & 0{,}80 \\ 0{,}64 & 0 & 0{,}64 \\ 0{,}40 & 0{,}80 & 0{,}88 \\ 0 & 0{,}96 & 0{,}96 \end{pmatrix}.$$

Третият стълб се превъзхожда от изпъкнала линейна комбинация на елементите от първия и втория стълб с коефициенти 1/2, 1/2. Зачертаваме го и получаваме матрицата

$$\begin{pmatrix} 0{,}52 & 0{,}20 \\ 0{,}20 & 0{,}84 \\ 0{,}64 & 0 \\ 0{,}40 & 0{,}80 \\ 0 & 0{,}96 \end{pmatrix}.$$

В тази матрица първият ред се превъзхожда от изпъкнала линейна комбинация на елементите на останалите редове с коефициенти 0,1/2,1/2,0.

В получената нова матрица първият ред се превъзхожда от изпъкнала линейна комбинация на останалите редове с коефициенти 0, 1/2, 1/2.

Така окончателно получаваме матрицата

$$\begin{pmatrix} 0{,}64 & 0 \\ 0{,}40 & 0{,}80 \\ 0 & 0{,}96 \end{pmatrix}.$$

Като решим графично правоъгълна игра с размери 3×2, получаваме: $\widetilde{Y}^0=\left(\frac{10}{10}, \frac{3}{10}\right)$, $\widetilde{X}^0=\left(\frac{5}{13}, \frac{8}{13}, 0\right)$, $v=\frac{32}{65}$.

Следователно оптималните стратегии и цената на играта за правоъгълната игра са

$$X^0=\left(0,0,0,\frac{5}{13}, \frac{8}{13}, 0\right), \quad Y^0=\left(\frac{10}{10}, \frac{3}{13}, 0\right), \quad v=\frac{32}{65}.$$

6.2. Методи за приближено решаване на правоъгълни игри

Нека разгледаме итеративния метод на Браун, чрез който може да се намерят оптималните стратегии и цената на играта с желаната от нас точност.

Същността на метода се състои в следното. Мислено се разиграват редица партии от играта между двама играчи A и B.

Играчът A избира една от своите чисти стратегии, например p_i. Играчът B отговаря с такава стратегия, която носи минимална печалба на играча A, например q_j. В следващата партия играчът A избира своята стратегия p_r, която му носи максимална печалба при използуване на стратегията q_j от играча B. Играчът B след това играе стратегията q_s, за която играчът A получава минимална печалба при последователното използуване на стратегиите p_i и p_r и т.н. След всяка партия се пресмятат най-малката и най-голямата печалба на играча A, $\underline{v}$ и $\overline{v}$ и средната цена на играта

$$v^*=\frac{\underline{v}+\overline{v}}{2}.$$

Може да се докаже, че като продължава този процес, средната цена на играта v се доближава до цената на играта v^0, а честотите $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_m^*$ и $y_1^*, y_2^*, \ldots, y_n^*$, с които се използуват отделните чисти стратегии в това разиграване, се доближават до оптималните честоти, т.е. до оптималното решение.

Да илюстрираме метода с един пример. Нека е дадена правоъгълната игра с матрица

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Резултатите от отделните партии се нанасят в таблици от разгледания по-долу вид (таблица 2.8.1). В първия стълб се нанася номерът на партията, във втория — номерът i на избраната p_i стратегия от играча A, в следващите стълбове — $v_1, v_2, \ldots, v_n$ — печалбата на играча A, получена от първите n партии на играта при използуване на стратегии $q_1, q_2, \ldots, q_n$ от играча B. В следващия стълб стои номерът j на стратегията q_j, с която играе играчът B, и се определя така, че за нея играчът A да получи най-малка печалба. След това следват стълбовете $u_1, u_2, \ldots, u_m$, в които се нанася печалбата на играча

A при използуване на стратегиите $p_1, p_2, \ldots, p_m$. В следващите стълбове се нанасят: $\underline{v}$ — най-малката печалба на A след n партии, $\overline{v}$ — най-голямата печалба на A след n партии и $v^* = \frac{\underline{v} + \overline{v}}{2}$. Нека играчът A избере за първата партия първата си стратегия $p_1 = (2,0,4)$. Тогава играчът B ще му отговори със стратегия $q_2 = (0,2,1)$, тъй като за нея играчът A ще получи минимална печалба, равна на нула. Най-малкото, което ще получи играчът A, е $\underline{v} = 0$. В следващата партия играчът A играе стратегия $p_2 = (1,2,2)$, понеже тя му носи най-голяма печалба $\overline{v} = 2$, когато играчът B играе втората си стратегия. На тази стратегия играчът B отговаря със стратегия $q_2 = (2, -1, 2)$, тъй като за нея се получава минимална средна печалба за играча A. Тогава $\underline{v} = 0{,}5$ при последователно използуване на стратегиите p_1 и p_2 от A и т. н. В таблица 2.8.1. са приведени резултатите, получени от първите 15 партии на играта.

Таблица 2. 8. 1

n	i	v_1	v_2	v_3	j	u_1	u_2	u_3	$\underline{v}$	$\overline{v}$	v^*
1	1	22	0	4	2	0	2	1	0	2	1
2	2	1	2	2	1	2	1	3	0,5	1,5	1
3	3	3	3	2	3	6	—1	3	0,66	2	1,33
4	1	5	3	6	2	6	1	4	0,75	1,5	1,12
5	1	7	3	10	2	6	3	5	0,6	1,2	0,9
6	1	9	3	14	2	6	5	6	0,5	1	0,75
7	3	11	4	14	2	6	7	7	0,57	1	0,78
8	2	10	6	12	2	6	9	8	0,75	1,12	0,94
9	2	9	6	10	2	6	11	9	0,88	1,12	1,05
10	2	8	10	8	1	8	10	11	0,8	1,1	0,95
11	3	10	11	8	3	12	8	11	0,78	1	0,87
12	1	12	11	12	1	14	9	13	1	1,17	1,08
13	1	14	11	16	2	14	11	14	0,84	1,08	0,96
14	3	16	12	16	2	14	13	13	0,85	1,07	0,96
15	3	18	12	16	2	14	15	16	0,86	1,06	0,96

Получиха се следните честоти за смесените стратегии на играчите A и B:

$$X^* = \left(\frac{6}{15}, \frac{4}{15}, \frac{5}{15}\right); \quad Y^* = \left(\frac{3}{15}, \frac{10}{15}, \frac{2}{15}\right).$$

Те са близки до оптималните смесени стратегии X^0 и Y^0, а цената на играта v^* е приблизително равна на 0,96. Разбира се, ако се направят повече итерации (например за тази игра около 100), ще се получат много по-точни резултати.

Този метод е особено удобен при решаване на задачи от теория на игрите чрез ЕИМ.

6.3. Решаване на правоъгълни игри чрез методите на линейното програмиране

Нека е дадена правоъгълната игра с платежна матрица

$$U = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{Vmatrix}.$$

За нея може да се предполагат всички $a_{ij} \geq 0$ за $i = 1,2,\ldots,m$; $j = 1,2,\ldots,n$, тъй като съгласно теорема 4.4 към всички елементи на матрицата може да се прибави едно и също положително число κ, при което всички членове на матрицата стават неотрицателни.

Решението на играта се състои в намиране на оптималните смесени стратегии

$$X^0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0, \ldots, x_m^0),$$

$$Y^0 = (y_1^0, y_2^0, y_3^0, \ldots, y_n^0)$$

и цената на играта v, за които съгласно теорема 4.2 са изпълнени неравенствата:

а) за оптималната стратегия X^0 на играча A

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1^0 + a_{21}x_2^0 + \ldots + a_{m1}x_m^0 \geq v, \\ &a_{12}x_1^0 + a_{22}x_2^0 + \ldots + a_{m2}x_m^0 \geq v, \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &a_{1n}x_1^0 + a_{2n}x_2^0 + \ldots + a_{mn}x_m^0 \geq v, \\ &x_1^0 + x_2^0 + \ldots + x_m^0 = 1, \\ &x_i^0 \geq 0 \text{ за } i = 1,2,\ldots,m. \end{aligned} \qquad (2.8.27)$$

б) за оптималната стратегия Y^0 на играча B

$$\begin{aligned} &a_{11}y_1^0+a_{12}y_2^0+\ \ldots\ +a_{1n}y_n^0\le v,\\ &a_{21}y_1^0+a_{22}y_2^0+\ \ldots\ +a_{2n}y_n^0\le v,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &a_{m1}y_1^0+a_{m2}y_2^0+\ \ldots\ +a_{mn}y_n^0\le v,\\ &y_1^0+y_2^0+\ \ldots\ +y_n^0=1,\\ &y_j^0\ge 0 \text{ за } j=1,2,\ldots,n. \end{aligned} \tag{2.8.28}$$

Тъй като всички $a_{ij}\ge 0$, то от неравенствата $a_{i1}y_1^0+a_{i2}y_2^0+\ \ldots\ +a_{in}y_n^0\ge 0$, $i=1,2,\ldots,m$, следва, че и $v>0$.

Да разделим неравенствата в (2.8.27) и (2.8.28) на положителното число v и да въведем означенията

$$\frac{x_i^0}{v}=x_i,\quad \frac{y_j^0}{v}=y_j.$$

Тогава

$$\sum_{i=1}^{m}x_i=\sum_{i=1}^{m}\frac{x_i^0}{v}=\frac{1}{v}\sum_{i=1}^{m}x_i^0=\frac{1}{v},$$

$$\sum_{j=1}^{n}y_j=\sum_{j=1}^{n}\frac{y_j^0}{v}=\frac{1}{v}\sum_{j=1}^{n}y_j^0=\frac{1}{v}.$$

Играчът A се стреми да максимизира печалбата си v или, което е все същото, да минимизира стойността на величината $\frac{1}{v}$, т.е. да намери вектор $X=(x_1,x_2,\ldots,x_m)$, който минимизира стойността на линейната функция

$$L(X)=x_1+x_2+\ \ldots\ +x_m$$

при следните условия:

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1+a_{21}x_2+\ \ldots\ +a_{m1}x_m\ge 1,\\ &a_{12}x_1+a_{22}x_2+\ \ldots\ +a_{m2}x_m\ge 1\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &a_{1n}x_1+a_{2n}x_2+\ \ldots\ +a_{mn}x_m\ge 1,\\ &x_j\ge 0 \text{ за } i=1,2,\ldots,m, \end{aligned}$$

което представлява задача на линейното програмиране.

Аналогично задачата на играча B се състои в намиране на вектор $Y=(y_1,y_2,\ \ldots,y_n)$, който максимизира стойността на линейната функция

$$L(Y)=y_1+y_2+\ \ldots\ +y_n$$

при следните условия:

$$\begin{aligned} &a_{11}y_1+a_{12}y_2+\ \ldots\ +a_{1n}y_n\le 1,\\ &a_{21}y_1+a_{22}y_2+\ \ldots\ +a_{2n}y_n\le 1,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &a_{m1}y_1+a_{m2}y_2+\ \ldots\ +a_{mn}y_n\le 1,\\ &y_j\ge 1 \text{ за } j=1,2,\ \ldots,n. \end{aligned}$$

За двете задачи на линейното програмиране е изпълнено равенството

$$\min\sum_{i=1}^{m}x_i=\max\sum_{j=1}^{n}y_j=\frac{1}{v}.$$

Те са двойнствени задачи на линейното програмиране. За тях е характерно, че ако първата има решение, втората също има решение и то се намира в индексния ред $\Delta_j=z_j-c_j$ под съответните допълнителни променливи. Поради това съставянето и решаването на втората задача не е необходимо.

Пример 1. Дадена е правоъгълна игра с матрицата

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 4\\ -1 & 5 & -2\\ -4 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

Тъй като долната цена на играта $\alpha=-2$, а горната цена на играта $\beta=6$, матрицата няма седлова точка. Следователно трябва да намерим оптималните смесени стратегии $X^0=(x_1^0,x_2^0,x_3^0)$ и $Y^0=(y_1^0,y_2^0,y_3^0)$ и цената на играта v.

Прибавяме към всички елементи на матрицата числото $\kappa=4$, с което оптималните стратегии X^0 и Y^0 няма да се изменят, а цената на играта v ще се увеличи с 4.

Новата матрица е

$$\begin{pmatrix} 7 & 2 & 8\\ 3 & 9 & 2\\ 0 & 10 & 6 \end{pmatrix}.$$

Ако означим с

$$x_i=\frac{x_i^0}{v},\ i=1,2,\ \ldots,m,$$

задачата на линейното програмиране за играча A ще бъде:

Да се намери вектор $X=(x_1,x_2,x_3)$, който минимизира стойността на линейната функция

$$L(X)=x_1+x_2+x_3$$

при следните условия:

$$\begin{aligned}
&7x_1+3x_2+\ \ 0x_3\geq 1;\\
&2x_1+9x_2+10x_3\geq 1;\\
&8x_1+2x_2+\ \ 6x_3\geq 1;\\
&x_1\geq 0,\ x_2\geq 0,\ x_3\geq 0.
\end{aligned}$$

Като решим тази задача, намираме стойността на $L(X)$ и стойностите на x_1,x_2 и x_3, а в индексния ред — стойностите на y_1,y_2,y_3.

Тъй като

$$\sum_{i=1}^{3} x_i=\frac{1}{v'},\ \text{тогава}\ v'=\frac{1}{L(X)}.$$

Изваждаме от стойността на v' числото 4 и получаваме цената v на началната игра, а оптималните стратегии $X^0=(x_1^0,\ x_2^0)$ и $Y^0=(y_1^0,\ y_2^0)$ получаваме от равенствата:

$$x_1^0=v'x_1,\ x_2^0=vx_2,\ x_3^0=v'x_3;$$
$$y_1^0=v'y_1,\ y_2^0=vy_2,\ y_3^0=v'y_3.$$

За разгледания пример се получава:

$$L(X)=0{,}193;$$
$$x_1=0{,}105,\ x_2=0{,}088,\ x_3=0;$$
$$y_1=0{,}123,\ y_2=0{,}070,\ y_3=0.$$

Следователно

$$v'=\frac{1}{L(X)}=5{,}18,\ v=v'-4=1{,}18;$$

$$x_1^0=0{,}544,\ x_2^0=0{,}456,\ x_3^0=0;$$

$$y_1^0=0{,}637,\ y_2^0=0{,}363,\ y_3^0=0;$$

Оттук $X^0=(0{,}544;\ 0{,}456;\ 0)$; $Y^0=(0{,}637;\ 0{,}363;\ 0)$.

Задачите от теориите на игрите може да се свеждат към задачи на линейното програмиране още по следния начин. Да разгледаме само задачата за играча A. От неравенствата (2.8.27) получаваме следната система равенства:

$$\left|\begin{array}{l}
a_{11}\ x_1^0+a_{21}x_2^0+\ldots+a_{m1}x_m^0-x_{m+1}^0=v,\\
a_{12}\ x_1^0+a_{22}x_2^0+\ldots+a_{m2}x_m^0-x_{m+2}^0=v,\\
\cdot\qquad\cdot\qquad\qquad\cdot\qquad\qquad\cdot\\
\cdot\qquad\cdot\qquad\qquad\cdot\qquad\qquad\cdot\\
\cdot\qquad\cdot\qquad\qquad\cdot\qquad\qquad\cdot\\
a_{1n}\ x_1^0+a_{2n}x_2^0+\ldots+a_{mn}x_m^0-x_{m+n}^0=v,
\end{array}\right.$$

$$x_1^0+x_2^0+\ldots+x_m^0=1.$$

$$x_i^0\geq 0\ \text{за}\ i=1,\ 2,\ldots,\ m,\ m+1\ldots+m+n.$$

Изваждаме първото уравнение от следващите $n-1$ уравнения и получаваме следната задача на линейното програмиране: Да се намери максималната стойност на функцията

$$v=a_{11}x_1^0+a_{21}x_2^0+\ldots+a_{m1}x_m^0-x_{m+1}^0$$

при следните условия:

$$\begin{array}{l}
(a_{12}-a_{11})x_1^0+(a_{13}-a_{21})x_2^0+\ldots+(a_{m2}-a_{m1})x_m^0+x_{m+1}^0-x_{m+2}^0=0,\\
(a_{13}-a_{11})x_1^0+(a_{23}-a_{21})x_2^0+\ldots+(a_{m3}-a_{m1})x_m^0+x_{m+1}^0-x_{m+3}^0=0,\\
\cdot\qquad\cdot\qquad\qquad\cdot\qquad\qquad\cdot\\
\cdot\qquad\cdot\qquad\qquad\cdot\qquad\qquad\cdot\\
\cdot\qquad\cdot\qquad\qquad\cdot\qquad\qquad\cdot\\
(a_{1m}-a_{11})x_1^0+(a_{m}-a_{21})x_2^0+\ldots+(a_{mn}-a_{m1})x_m^0+x_{m+1}^0-x_{m+n}^0=0,
\end{array}$$

$$x_1^0+x_2^0+\ldots+x_m^0=1,$$

$$x_i\geq 0\ \text{за}\ i=1,\ 2,\ldots\ m+n.$$

Да отбележим, че в случая не е необходимо условието $a_{ij}\geq 0$, тъй като не се налага цената на играта $v>0$.

Аналогично се формулира и задачата на играча B.

Пример 2. Дадена е правоъгълна игра с матрица

$$\begin{pmatrix}
-1 & 6 & -4\\
2 & 1 & -1\\
3 & -5 & 2
\end{pmatrix}.$$

Изходната система неравенства за играча A е

$$\left|\begin{array}{l}
-x_1^0+2x_2^0+3x_3^0\geq v.\\
6x_1^0+x_2^0-5x_3^0\geq v.\\
-4x_1^0-x_2^0+2x_3^0\geq v.\\
x_1^0+x_2^0+x_3^0=1.\\
x_1^0\geq 0,\ x_2^0\geq 0,\ x_3^0\geq 0.
\end{array}\right.$$

Въвеждаме допълнителните неизвестни x_4^0 x_5^0 и x_6^0, които изваждаме от първите три неравенства. По този начин получаваме системата

$$\begin{cases} -x_1^0+2x_2^0+3x_3^0-x_4^0=v. \\ 6x_1^0+x_2-5x_3^0-x_5^0=v. \\ -4x_1^0-x_2^0+2x_3^0-x_6^0=v \\ x_1^0+x_2^0+x_3^0=1 \\ x_i^0\geq 0,\ i=1,\ 2,\ldots,\ 6. \end{cases}$$

Като извадим първото уравнение от следващите две, получаваме следната задача на линейното програмиране:

Да се намери максималната стойност на линейната функция

$$V=-x_1^0+2x_2^0+3x_3^0-x_4^0$$

при следните условия:

$$\begin{gathered} 7x_1^0-x_2^0-8x_3^0+x_4^0-x_5^0=0; \\ -3x_1^0-3x_2^0-x_3+x_4^0-x_6^0=0; \\ x_1^0+x_2^0+x_3^0=1; \\ x_j^0\geq 0 \text{ за } j=1,\ 2,\ldots,\ 6. \end{gathered}$$

Като решим тази задача по симплексния метод, получаваме

$$x_1^0=0,\ x_2^0=0{,}875,\ x_3^0=0{,}125,$$
$$v=-0{,}625.$$

Изходната система неравенства за играча B е:

$$\begin{cases} -y_1+6y_2^0-4y_3^0\leq v. \\ 2y_1^0+y_2^0-y_3^0\leq v. \\ 3y_1^0-5y_2^0+2y_3^0\leq v. \\ y_1+y_2+y_3=1. \\ y_1^0\geq 0,\ y_2^0\geq 0,\ y_3^0\geq 0. \end{cases}$$

Прибавяме допълнителните неизвестни y_4^0, y_5^0, y_6^0 към първите три неравенства. Така те се превръщат в равенства. След това изваждаме първото уравнение от следващите го две и получаваме следната задача на линейното програмиране:

Да се намери минималната стойност на линейната функция

$$v=-y_1^0+6y_2^0-4y_3^0+y_4$$

при следните условия

$$\begin{gathered} 3y_1^0-5y_2^0+3y_3^0-y_4+y_5=0; \\ 4y_1^0-11y_2^0+6y_3^0-y_4+y_6=0; \\ y_1^0+y_2^0+y_3^0=1; \\ y_j^0\geq 0 \text{ за } j=1,\ 2,..,\ 6. \end{gathered}$$

След решаването ѝ получаваме:

$$y_1^0=0{,}857,\ y_2^0=0{,}143,\ y_3^0=0,$$
$$v=-0{,}625.$$

Следователно цената на играта е — 0,625, а оптималните смесени стратегии за играчите A и B са

$$X^0=(0;\ 0{,}875;\ 0{,}125) \text{ или } X^0=\left(0,\ \frac{7}{8},\ \frac{1}{8}\right);$$

$$Y^0=(0{,}875;\ 0{,}143;\ 0) \text{ или } Y^0=\left(\frac{6}{7},\ \frac{1}{7},\ 0\right).$$

Като решим по този начин пример 2 от 1.3, получаваме:

$$X^0=\left(\frac{4}{9},\ \frac{4}{9},\ 0,\ 0,\ \frac{1}{9}\right);\quad Y^0=\left(\frac{1}{18},\ \frac{1}{18},\ \frac{4}{9},\ \frac{4}{9}\right);\ V=\frac{14}{9}.$$

7. ПРИЛОЖЕНИЕ НА ТЕОРИЯТА НА ИГРИТЕ ВЪВ ВОЕННОТО ДЕЛО

Теорията на игрите намира най-широко приложение при решаване на задачи по разпределение на силите за участието им в активни бойни действия и като резерв при определяне на групировките на войските и начините за действия, при определяне на бойната ефективност на въоръжението, а също и при решаване на много други задачи.

В зависимост от създалата се ситуация в едни случаи приложението на теорията на игрите препоръчва да се използува само един начин за действие, а в други — препоръките се свеждат към посочване на съотношението, с което следва да се редуват възможните начини за действия, за да се получи най-изгодният възможен резултат.

Като цяло количествените оценки, които се получават в резултат от прилагането на математическите методи, облекчават командуването при вземането на обосновани, твърди и своевременни решения.

Едновременно с това трябва да се изтъкне, че доколкото тези методи дават възможност за получаване само на количествена оценка, тяхното прилагане във военното дело в известна степен има помощен характер. Получените резултати от разчетите при вземане на решение винаги трябва да се

съчетават с логиката, опита, волята и интуицията на военачалника.

Нека разгледаме някои примери, които илюстрират приложението на теорията на игрите във военното дело.

Пример 1.

Предполага се, че системата на противовъздушната отбрана на страната се състои от няколко типа зенитни батареи или управляеми ракети. Оперативните възможности на нападащата страна във всяка операция се характеризират с големината на усилията M при бомбардировката на даден обект. Тези усилия може да се реализират посредством m вида бомбардировки, които се различават една от друга по стойността на една атакуваща единица, по разрушителния потенциал, който притежава атакуващата единица, и по нейната уязвимост отстрана на всяка отбранителна единица. В рамките на една операция може да се използува само един вид бомбардировка. Да означим с C_i стойността на една атакуваща единица в i-тия вид бомбардировка, с M_i — броя на всички участвуващи единици в i-тия вид бомбардировка. Очевидно $M_i = \frac{M_0}{C_i}$ ($i = 1, 2, \ldots, m$). С l_i означаваме разрушителния потенциал на една атакуваща единица. Общият разрушителен потенциал на i-тия вид бомбардировка (без да се вземат под внимание загубите, нанесени от ПВО) е равен на

$$l_i M_i = l_i \frac{M_0}{C_i}.$$

Уязвимостта на определен вид атака се изразява с математическото очакване K_{ij} на броя на атакуващите единици, унищожени при i-тия вид бомбардировка от противовъздушна отбрана, снабдена с оръжие от j-ти вид ($j = 1, 2, \ldots, n$).

Да означим с C_0 общата стойност за създаване и експлоатация на една ПВО с N_j броя на единиците, снабдени с j-ти вид отбранително оръжие, и с C_j — стойността на една отбраняваща единица. Очевидно

$$\sum_{j=1}^{n} C_j N_j = C_0.$$

За да опростим пресмятанията, предполагаме още, че отбранителното оръжие от j-ти вид е равномерно разположено по окръжност с радиус R_j и център — отбранявания обект. Разбира се, на практика разпределението може да стане по

много начини, но много често се възприема кръговият начин на отбрана, понеже се предполага, че самолетите (ракетите) могат да стигнат до обекта с равна вероятност от всички страни.

Ефективността на една отбранителна единица от j-ти вид, разположена на окръжност с радиус R_j, против i-тата бомбардировка се характеризира с математическото очакване $K_{ij}(R_j)$ на броя на целите, поразени от тази единица, докато атакуващите единици достигнат рубежа за бомбомятане. $K_{ij}(R_j)$ е функция на характеристиките на целта (скорост, височина, отразяваща повърхност и др.) и на характеристиките на отбранителната единица (работно време, далечина на действие и др). Задачата за определяне на $K_{ij}(R_j)$ се решава с помощта на теорията на вероятностите и теорията на стрелбата и върху нея няма да се спираме, а ще считаме $K_{ij}(R_j)$ дадена величина.

Критерий за ефективността както на нападението, така и на ПВО ще считаме броя на бомбите (ракетите), преминали през системата на отбраната.

Да формулираме сега задачата. Атакуващата страна трябва да избере един от i-те вида бомбардировки. ПВО трябва да избере: 1. Една комбинация от j вида отбранително оръжие. 2. Разпределението на това оръжие по окръжности с различни радиуси. И двете страни имат пълна информация за стойностите и параметрите на задачите. За да съставим платежната матрица, трябва да определим количеството бомби, преминали през отбраната при различните комбинации на нападателното и отбранителното оръжие, и бойните редове.

Ако противникът е избрал i-тия вид атака, отбраната действува против M_i атакуващи единици, всяка от които носи бомби. Ако отбраняващата се страна е избрала k-тата възможна комбинация на бойните средства ($k = 1, 2, \ldots, s$), тогава ПВО трябва да се състои от $N_j^{(k)}$ поделения (единици) от j-тия вид. Ние сме приели, че броят на вариантите за разпределение на тези средства върху местността е краен. Така y-тия вариант означава, че всички средства от j-тия вид са разпределени в окръжност с радиус $R_j^{(y)}$.

Математическото очакване Q_{kyi} на броя на поразените цели, ако ПВО е избрала k-тата комбинация и y-тия вариант, е

$$Q_{kyi} = \sum_{j=1}^{n} N_j^{(k)} K_{ij}(R_j^{(y)}).$$

Математическото очакване за целите, преминали през отбраната, е

$$M_i = Q_{куi}.$$

И на края математическото очакване за броя на бомбите, преминали през системата на отбраната, е

$$B_{куi} = l_i(M_i - Q_{куi}).$$

Следователно платежната матрица на играта при фиксирано k е

$$(l_i(M_i - Q_{куi})),$$

която има решение според теорема 3.1.

Да вземем един конкретен числен пример.

Дадени са два типа атакуващи самолета: летящи на малки височини и летящи на големи височини. Първият вариант за атака е по-скъп поради по-голямата сложност на управлението и навигацията. Затова нападащата страна отделя само 14 самолета за атака на малка височина ($M_0 = M_1 = 14$, $C_1 = 1$), а за втория вариант отделя 20 самолета ($M_2 = 20$, $C_2 = 0{,}5$). Ефективността на атаката обаче е по-висока при първия вариант, защото $e_1 = 1$, а $e_2 = 0{,}5$.

ПВО има две системи зенитни управляеми ракети: А1 — особено ефективна против високо летящи цели и А2 — ефективна срещу ниско летящи цели.

Задачата се състои в определянето на броя на ракетите А1 и А2, който би осигурил минимално математическо очакване на броя на пропуснатите самолети (бомби) при $C_0 = 100$. Оръжието А1 струва 50 единици, а оръжието А2 — 25 единици от отбранителния бюджет.

Решение: 1. Възможните комбинации на бойните средства са дадени в таблица 2.8.2.

2. $K_{ij}(R_j)$ е зададена чрез таблица 2.8.3.

3. Тактическата игра се характеризира с матриците

$$(B_{куi}) = (l_i[M_i - N_A^{(k)} K_{iA}(R_A^{(y)}) - N_B^{(k)} K_{iB}^{(y)}(R_B^{(y)})]) \text{ при}$$

$k = 1, 2, 3$. Елементите на матрицата се пресмятат лесно, като се имат пред вид следните възможности:

1. А1 се разполага на окръжност с $R = 0$;
   А2 се разполага на окръжност с $R = 10$;
2. А1 се разполага на окръжност с $R = 10$;
   А2 се разполага на окръжност с $R = 20$.
3. А1 се разполага на окръжност с $R = 0$;
   А2 се разполага за окръжност с $R = 20$.

Таблица 2. 8. 2

k	Брой на ракетите А1	Брой на ракетите А2
1	2	0
2	1	2
3	0	4

Таблица 2. 8. 3

R_j	Ракети А1		Ракети 2А	
	атака на малка височина	атака на голяма височина	атака на малка височина	атака на голяма височина
0	0	6	0	0
10	1	2	3	1
20	0,5	1	0,5	0

4. А1 се разполага на окръжност с $R = 10$;
   А2 се разполага на окръжност с $R = 0$.
5. А1 се разполага на окръжност с $R = 20$;
   А2 се разполага на окръжност с $R = 10$.
6. А1 се разполага на окръжност с $R = 20$;
   А2 се разполага на окръжност с $R = 0$.

Съответно за $k = 1$ имаме матрицата

$$\begin{pmatrix} 14 & 12 & 14 & 12 & 13 & 13 \\ 4 & 8 & 4 & 8 & 9 & 9 \end{pmatrix},$$

която се редуцира на

$$\begin{pmatrix} 14 & 12 \\ 4 & 8 \end{pmatrix},$$

имаща седлова точка, т. е. $v = 125$; $X^0 = (1, 0)$ $Y^0 = (0, 1)$. За $\kappa = 2$ матрицата

$$\begin{pmatrix} 8 & 7 & 13 & 13 & 7{,}5 & 13{,}5 \\ 6 & 8 & 7 & 9 & 8{,}5 & 9{,}5 \end{pmatrix}$$

се редуцира съответно в матрицата

$$\begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

Съставяме системите:

$$\begin{array}{l|l} 8x_1^0+6x_2^0=v & 8y_1^0+7y_2^0=v \\ x7\,{}^0_1+8x_2^0=v & 6y_1^0+8y_2^0=v \\ x_1^0+x_2^0=1 & y_1^0+y_2^0=1 \end{array}$$

Като ги решим, получаваме

$$v=\frac{22}{3};\quad X^0=\left(\frac{2}{3},\ \frac{1}{3}\right);\quad Y^0=\left(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right).$$

За $k=3$ матрицата

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 10 & 14 & 2 & 14 \\ 8 & 8 & 8 & 10 & 8 & 10 \end{pmatrix},$$

се редуцира в матрицата

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 8 & 8 \end{pmatrix},$$

която има седлова точка, т. е. $v=8$; $X^0=(0,\ 1)$; $Y^0=(1,\ 0)$ или $(0,\ 1)$.

При сравняване на трите комбинации се вижда, че най-малка е цената на играта при $k=2$ $\left(v=\frac{22}{3}\right)$. Следователно ПВО трябва да се състои от едно поделение, снабдено с ракети А1, и две поделения, снабдени с ракети А2.

Пример 2. Щабът на ВВС разполага с три типа химически авиационни бомби. При използуване на химическото оръжие живата сила на противника се разполага, както следва: една част — в открити щели, втора част — в покрити щели и трета част — в бойна техника, като по сигнала „Газ“ може да използува само индивидуалните си средства за защита.

Данните за загубите на противника в жива сила (в проценти) в зависимост от типа на използуваните химически авиационни бомби и типа на убежищата са дадени в таблица 2.8.4.

Таблица 2. 8. 4

Типове използувани ХАБ	Типове убежища		
	1	2	3
1	25	40	30
2	40	20	30
3	30	35	35

Да се определи съотношението на ХАБ, при което ще се нанесе максимално поражение на противника.

Решение. Платежната матрица на играта е

$$U=\begin{pmatrix} 25 & 40 & 30 \\ 40 & 20 & 30 \\ 30 & 35 & 35 \end{pmatrix}.$$

Долната цена на играта е $\alpha=30$, а горната цена на играта $\beta=35$. Следователно играта няма седлова точка.

Решаваме тази задача, като я свеждаме към еквивалентна задача на линейното програмиране. Оптималната стратегия за нападащата страна е $X^0=\left(0,\frac{2}{10},\frac{8}{10}\right)$, а цената на играта $v=32$. Следователно $^2/_{10}$ от ХАБ трябва да бъдат от втори тип и $^8/_{10}$ — от третия тип. При това положение 32% от личния състав ще бъде поразен.

Пример 3. В щаба на едно съединение се планира прегрупиране на войските в нов район по три маршрута.

По време на движението противникът може да нанесе ядрени удари по четири обекта. Маршрутите за движение пресичат следите на областите от радиоактивното заразяване.

Известна е оценката на вероятните медицински загуби в личен състав, отчетени за трите маршрута при четирите възможни начина за действия на противника, които са дадени в таблица 2.8.5.

Таблица 2.8.5

Маршрути \ Обекти	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4
№ 1	4	10	14	25
№ 2	24	4	8	3
№ 3	3	17	15	2

Загубите са дадени в таблицата при условие, че се нанася удар с всички ядрени средства само по един обект и се приема, че те са пропорционални на количеството ядрено оръжие.

Войските трябва да се разпределят по маршрутите за движение така, че независимо от действията на противника личният състав да понесе минимални загуби.

Решение. Платежната матрица на играта е:

$$U=\begin{pmatrix} 96 & 90 & 86 & 75 \\ 76 & 96 & 92 & 97 \\ 97 & 87 & 95 & 98 \end{pmatrix}.$$

Долната цена на играта $\alpha=87$, а горната цена $\beta=95$. Следователно играта няма седлова точка.

След като решим задачата, получаваме, че оптималната стратегия за страната, планираща прегрупирането, е $X^0=(0{,}31;\ 0{,}29;\ 0{,}40)$, а цената на играта $v=91$.

Следователно 31% от личния състав трябва да премине по маршрут 1, 29% — по маршрут 2 и 40% — по маршрут 3. При това положение 91% от личния състав ще пристигне в новия район.

Раздел III

ВЕРОЯТНОСТНИ МЕТОДИ

ВЪВЕДЕНИЕ

1. СЛУЧАЙНИ СЪБИТИЯ. ВЕРОЯТНОСТ

Въз основа на много наблюдения и опити науката е формулирала закономерностите, на които се подчиняват изучаваните от нея обществени и природни явления. Установено е, че съществуват особен вид закономерности (вероятностни, стохастически), за които при многократно повтаряне на комплекс от условия определено събитие се среща с дадена честота. Тяхното изучаване е предмет на теорията на вероятностите.

Понеже при изследването на операциите много често се налага да се проучват явления, които са подчинени на стохастически закони, необходимо е, макар и накратко, да разгледаме основните понятия на теорията на вероятностите.

Случайно събитие се нарича всеки факт, който в резултат на опита може да настъпи или не. Например при изстрел от оръдие снарядът може или да попадне в целта, или не.

Вероятност на събитието се нарича числената характеристика на обективната възможност за появяване на това събитие. Вероятността на събитието A се означава с $P\{A\}$.

Достоверно се нарича събитие V, което в резултат от опита непременно трябва да настъпи. То има вероятност $P(U)=1$.

Невъзможно се нарича събитие V, което в резултат от опита не може да се сбъдне. Вероятността на невъзможното събитие е нула. Вероятността на произволно събитие A е число между нула и единица

$$0\leq P\{A\}\leq 1.$$

Пълна група от събития се нарича тази, при която в резултат от опита непременно се сбъдва поне едно от тях.

Няколко събития в даден опит се наричат **несъвместими**, ако които и да са две от тях не могат да се появят заедно.

Няколко събития в даден опит се наричат **равно възможни**, ако по симетрия няма причина да се смята, че което и да е от тях е по-възможно от друго. Ако няколко събития образуват пълна група и са несъвместими и равно възможни, казва се, че те са случай. Един случай се нарича благоприятен за събитието A, ако появяването му предизвиква сбъдване на събитието A.

Ако резултатите от опита се свеждат до схема на случаите, вероятността на събитието A се пресмята по формулата

$$P\{A\}=\frac{m}{n},$$

където:

m — брой на благоприятните за A случаи;

n — брой на всички случаи.

Сума на две събития A и B се нарича събитието C, при което се появява поне едно от събитията A и B. Сума от няколко събития се нарича събитие, което се състои в появяването на поне едно от тях.

Произведение на две събития A и B се нарича събитието C, при което съвместно се появяват събитията A и B. Произведение на няколко събития е събитие, състоящо се в съвместното им появяване.

Вероятността на сума на две несъвместими събития е равна на сумата от техните вероятности, т. е.

$$P\{A+B\}=P\{A\}+P\{B\}.$$

При съвместими събития вероятността на сумите им се определя по формулата

$$P\{A+B\}=P\{A\}+P\{B\}-P\{AB\}.$$

Ако събитията $A_1, A_2, \ldots, A_n$ са несъвместими и образуват пълна група, сумата от техните вероятности е равна на единица.

$$\sum_{i=1}^{n} P\{A\}=1.$$

Събитието $\bar{A}$ (не A) се нарича противоположно на събитието A, ако се сбъдва тогава и само тогава, когато събитието A не се сбъдва. Сумата от вероятностите на противоположните събития е равна на единица, т. е.

$$P\{A\}+P\{\bar{A}\}=1.$$

Условна вероятност на събитието A при осъществяване на събитието B се нарича вероятността, пресметната при условие, че събитието B се е сбъднало. Тя се означава с $P\{A/B\}$.

Събитията A и B се наричат независими, ако появяването на едното не изменя вероятността за появяване на другото, т. е.

$$P\{A/B\}=P\{A\};\ P\{B/A\}=P\{B\}.$$

Вероятността на произведението на две събития се дава от формулите:

— за независими събития:

$$P\{AB\}=P\{A\}\,.\,P\{B\};$$

— за зависими събития:

$$P\{AB\}=P\{A\}\,.\,P\{B/A\}=P\{B\}\,.\,P\{A/B\}.$$

2. СЛУЧАЙНИ ВЕЛИЧИНИ

2.1. Случайни величини

Случайна величина се нарича величината, която може да приема една или друга стойност, неизвестна предварително (например броят на попаденията в целта при десет изстрела, броят на парчетата при взривяване на снаряд и др.).

Дискретна случайна величина е тази, чиито стойности запълват непрекъснато някакъв интервал.

Закон за разпределение на случайна величина се нарича всяка връзка между нейните възможни стойности и съответните вероятности.

Броят на парчетата при взривяване на снаряд е дискретна случайна величина, а мястото (точката) на падането им е непрекъсната случайна величина.

Законът за разпределение може да има различни форми:

1. Ред за разпределение на дискретната случайна величина X се нарича таблицата, в която са изброени възможните й стойности $x_1, x_2, \ldots, x_n$ със съответните им вероятности $P_1, P_2, \ldots, P_n$, т. е.

x_i	x_1	x_2	x_3	. . .	. . .	. . .	. . .	x_n
P_i	P_1	P_2	P_3	. . .	. . .	. . .	. . .	P_n

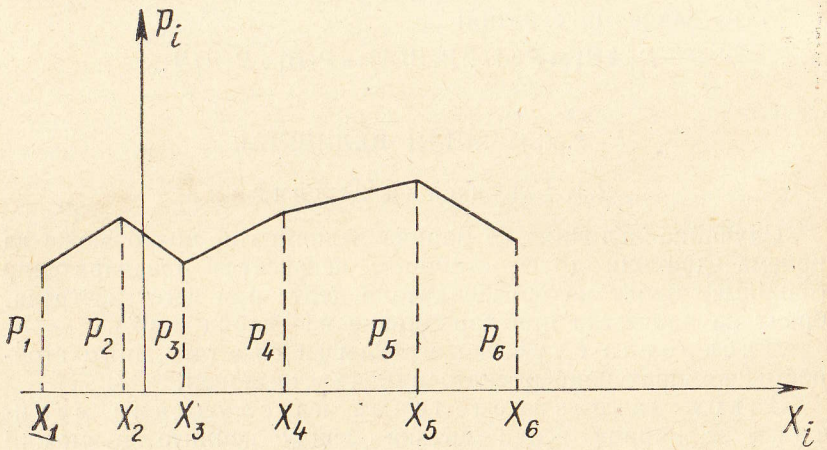
Тук $P_i=P\{X=x_i\}$;

$$\sum_{i=1}^{n} P_i=1.$$

Графичното изобразяване на реда се нарича многоъгълник (полигон) на разпределението (фиг. 3.0.1).

2. Функция на разпределението на случайната величина X се нарича тази, която е равна на вероятността случайната величина X да приеме стойности, по-малки от x, т. е.

$$F(x)=P\{X<x\}.$$



Фиг. 3.0.1

За всяко x от интервала $(-\infty, +\infty)$ тя е монотонно ненамаляваща, т. е.

$$F(-\infty)=0,\quad F(\infty)=1.$$

3. Плътност на разпределение на абсолютно непрекъсната случайна величина се нарича функцията $f(x)=F'(x)$. Очевидно

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} xf(n)dn.$$

Вероятността за попадане на случайната величина X в интервала (a,b) се задава с формулата

$$P\{a\leq x\leq b\}=F(b)-F(a).$$

2.2. Характеристики на случайните величини

Математическа надежда (очакване, средна стойност) на случайната величина X се нарича число, пресметнато по формулите:

— за дискретна случайна величина

$$m_x=M[x]=\sum_{i=1}^{n} x_i P_i;$$

— за смесена случайна величина

$$m_x=M[X]=\sum x_i P_i+\int_{(n)} xF'(x)dx;$$

— за прекъсната случайна величина

$$m_x=M[X]=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx,$$

където сумата се разпространява върху всички точки на прекъсване, а интервалът — върху всички интервали на непрекъснатост.

Центрирана случайна величина се нарича разликата между случайната величина X и нейната математическа надежда, т. е.

$$\widetilde{X}=X-m_x.$$

Дисперсия на случайната величина X се нарича математическата надежда на квадрата на центрираната случайна величина $\widetilde{X}$, т. е.

$$D[X]=M[\widetilde{X}^2].$$

Тя се пресмята по формулите:

— за дискретна случайна величина

$$D[X]=\sum_{i=1}^{n}(x_i-m_x)^2 P_i;$$

— за непрекъсната случайна величина

$$D[X]=\int_{-\infty}^{\infty}(x-m_x)^2 f(x)dx;$$

— за смесена случайна величина

$$D[X]=\sum_i (x_i-m_x)^2 P_i+\int_{(н)}=(x-m_x)\,F'(x)dx.$$

Средно квадратично отклонение се нарича квадратният корен от дисперсията, т. е.

$$\sigma_x=\sqrt{D[X]}=\sqrt{D_x}.$$

Начален момент от k-ти ред на случайната величина X се нарича математическата надежда на k-тата ѝ степен

$$a_k[X]=M[X^k]=a_k.$$

Централен момент от k-ти ред на случайната величина X се нарича математическата надежда на k-тата степен на центрираната случайна величина X, т. е.

$$M_k[X]=M[\widetilde{X^k}]=M[(x-m_x)^k]=m_k.$$

2.3. Закони за разпределение

Дискретната случайна величина се нарича разпределена по биномиален закон, ако приема стойности 0, 1, 2, ..., m с вероятности

$$P\{X=k\}=C_m^k P^k q^{m-k},$$

където $0<P<P;\ q=1-P.$

Математическата надежда на тази величина е $m_x=mP$, а дисперсията $D_x=mPq$.

Дискретната случайна величина е разпределена по закона на Поасон, ако приема само цели неотрицателни стойности $0,1,2,\ldots,m,\ldots$ с вероятност

$$P(x=k)=P_k=\frac{a_k}{k!}e^{-a},$$

където $a<0$ е параметър на закона на Поасон. Математическата надежда и дисперсията на тази случайна величина са равни помежду си и равни на параметъра a, т. е.

$$m_x=P_x=a.$$

Непрекъсната случайна величина X се нарича равномерно разпределена в интернала (a,b), ако нейната плътност на разпределение е константа, т. е.

$$f(a)=\begin{cases}\frac{1}{b-a} & \text{при } x\in[a,b]\\ 0 & \text{при } x\notin[a,b]\end{cases},$$

където $x\in(a,b)$ означава, че X лежи в интервала (a,b), а $x\notin(a,b)$, че X не лежи в него. Математическата надежда на тази величина е $m_x=(a+b):2$, а дисперсията $D_x=(b-a)^2:12$.

Непрекъсната случайна величина X се нарича нормално разпределена, ако нейната плътност на разпределение е

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}exp\left\{-(x-m)^2:2\sigma^2\right\}.$$

Математическата надежда на нормално разпределената случайна величина е равна на m, т. е. $m_x=m$, а дисперсията $D_x=\sigma^2$.

3. СЛУЧАЙНИ ВЕКТОРИ. ФУНКЦИИ НА СЛУЧАЙНА ВЕЛИЧИНА

3.1. Случаен вектор

Съвкупност (наречена двойка) от две случайни величини (X,Y), разгледани съвместно, се нарича система от две случайни величини. Тя се интерпретира като случайна точка с координати (X,Y) или като случаен вектор.

Аналогично се определя случаен вектор в тримерното и n-мерното пространство.

Функция на разпределение на случайния вектор X,Y се нарича вероятността за съвместно използуване на двете неравенства $X<x$ и $Y<y$, т. е.

$$F(x,y)=P\left\{(X<x)\,1\,(Y<y)\right\};$$

$$F(-\infty;-\infty)=F(-\infty;y)=F(x;-\infty)=0.$$

Очевидно

$$F(+\infty; +\infty)=1,$$

$$F(x_1 +\infty)=F_1(x),\ F(+\infty, y)=F_2(y),$$

където $F_1(x)$ и $F_2(y)$ са функции на разпределение съответно на величините X и Y и се наричат маргинални разпределения; $F(x, y)$ е ненамаляваща по X и Y функция.

Плътност на разпределение $f(x, y)$ на случайния вектор е границата на отношението на вероятността за попадение на случайната точка в елементарен участък с връх (x, y) към неговото лице, когато размерите му клонят към нула. Верни са следните съотношения:

$$f(x, y)\geq 0,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dxdy=1.$$

Може да се докаже, че

$$F(x, y(=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(x, y)dxdy.$$

Вероятността за попадение на случайната точка X, Y в произволна област D се определя чрез формулата

$$P\Big(\ (X,Y)\in D\ \Big)=\int_{P}\int (x, y)\,dxdy.$$

Условен закон за разпределение на случайна величина X, влизаща в системата (X, Y), се нарича пресмятаният закон при условие, че случайната величина Y приема определена стойност y. Аналогично се определя условният закон за разпределение на случайната величина Y. Условните функции за разпределение означаваме с $F_1(x/y)$ и $F_2(y/x)$, а съответните плътности с $f_1(x/y)$ и $f_2(y/x)$.

Случайните величини X, Y се наричат независими, ако условният закон за разпределение на едната не зависи от това, каква стойност приема другата, т. е. ако $f_1(x/y)=$ $=f_1(x)$ или $f_2(y/x)=f_2(x)$.

3.2. Числови характеристики на случаен вектор

Начален момент от $k+l$ ред на случайния вектор (X, Y) се нарича математическата надежда на k-тата степен на величината X и l-та степен на величината Y, т. е.

$$\alpha_{k,l}[X,Y]=[X^kY^l].$$

За дискретна случайна величина

$$\alpha_{k,l}[X,Y]=\sum_i\sum_j x_i^k y_j^l P_{ij},$$

където

$$P_{ij}=P\Big[(X=x_i)\wedge(Y=y_j)\Big].$$

За непрекъснати случайни величини

$$\alpha_{k,l}[X,Y]=\int_{-\infty}^{\infty}\int x^k y^l f(x, y)\,dxdy,$$

където $f(x, y)$ — плътност на разпределение на системата.

Централен момент от $k+l$ ред на случайния вектор (X,Y) се нарича величината

$$M_{k,l}(X,Y)=M\Big[(X-m_x)^k\wedge(Y-m_y)^l\Big].$$

За дискретни случайни величини тя се пресмята по формулата

$$M_{k,l}[X,Y]=\sum_i\sum_j(x_i-m_x)^k(y_j-m_y)^l P_{ij},$$

където $P_{ij}=P\Big[(X=x_i)(Y=y_j)\Big]$, а за непрекъснати случайни величини

$$M_{k,l}[X, Y]=\int_{-}^{+}\int_{\infty}^{\infty}(x-m_x)^k(y-m_y)^l f(x,y)\,dxdy.$$

Корелационен момент K_{xy} на случайния вектор (X,Y) наричаме втория смесен момент, т. е. централния момент от ред $1+1$ $M_{11}(X, Y)$.

$$K_{xy}=M_{11}(X, Y)=M\Big[(X-m_x)(Y-m_y)\Big].$$

За независимите случайни величини корелационният момент е равен на нула.

Коефициент на корелация σ_{xy} на случайния вектор (X,Y) се нарича величината

$$\sigma_{xy}=\frac{K_{xy}}{\sigma_x\sigma_y},$$

където $\sigma_x=\sqrt{D_x}=\sqrt{M_{2,0}(X,Y)}$; $\sigma_y=\sqrt{D_y}=\sqrt{M_{0,2}(X,Y)}$.

за всеки две величини $|\sigma_{xy}|=1$.

Ако за случайните величини (X,Y) $\sigma_{xy}=0$, казваме, че случайните величини са **некорелирани**.

Глава първа

ТЕОРИЯ НА ИНФОРМАЦИЯТА

1. ПРЕДМЕТ И ОСНОВНИ ПОНЯТИЯ

1.1. Предмет и задачи

Теорията на информацията е наука, която изучава количествените закономерности, свързани с получаването, предаването, обработването и запазването на информацията. Необходимо условие за работата на всяка управляваща система е получаването, обработването и предаването на различен вид информация. При това тя винаги се обменя и между самите звена на системата. Управлението на войските например е непрестанна циркулация на информация в системата командир (щаб)—войски, където циклично се повтарят процесите събиране, предаване и обработване на информация, вземане на решение и поставяне на задачи на войските.

За да се предаде по свързочните направления, всяка информация трябва да се кодира по някакъв начин, т.е. да се преведе на език, състоящ се от специални символи или сигнали.

Една от основните задачи на теорията на информация е да се намерят най-икономични методи за кодиране, които позволяват да се предава информацията чрез минимален брой елементарни символи. Подобна задача може да се реши както при шумове, така и когато няма шумове в свързочния канал.

Друга основна задача е определянето на такава пропускателна способност на свързочния канал, че той да може да предава цялата информация без задръжки и изкривявания.

Теорията на информацията се занимава и с обема на паметта на ЕИМ и начините за въвеждане и извеждане на информацията от нея.

1.2. Ентропия

Всяко съобщение е съвкупност от сведения за състоянието на дадена физическа система. Очевидно, ако нейното състояние е вече известно, ценността на съобщението е равна на

нула. Съобщението има смисъл само тогава, когато то не е известно предварително. Затова ще разглеждаме физическа система X, която случайно може да се окаже в едно или друго състояние, т.е. има някаква степен на неопределеност. Колкото е по-голяма тази неопределеност до получаването на съобщението, толкова по ценни ще са сведенията за системата.

Нека физическата система X взема стойностите $x_1, x_2, \ldots, x_n$ съответно с вероятности $P_1, P_2, \ldots, P_n$. В бъдеще ще отъждествяваме физическата система със случайна величина, зададена с посочения по-долу ред на разпределение:

x_i	x_1	x_2	. . .	x_n
P_i	P_1	P_2	. . .	P_n

За мярка на априорната неопределеност на случайната величина X в теорията на информацията се приема специална характеристика, наречена ентропия, т.е.

$$H(x)=-\sum_{i=1}^{n}P_i \log P_i. \qquad (3.1.1)$$

Тя притежава редица свойства, които оправдават нейния избор за характеристика на степента на неопределеност:

1. Ентропията на случайна величина, приемаща равновероятни стойности, е равна на логаритъма на броя на стойностите.

Действително, ако е зададена X с посочения по-долу ред на разпределение

x_i	x_1	x_2	. . .	x_n
P_i	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	. . .	$\frac{1}{n}$

,

то

$$H(x)=-n\frac{1}{n}\log\frac{1}{n}=-\log 1+\log n=\log n.$$

2. Ентропията е равна на нула, когато стойността, приемана от случайната величина X, е известна преди опита.

Действително тогава всички $P_1=P_2=\ldots=P_n=0$, освен $P_k=1$.

Но $$P_k\log P_k=0 \text{ и } \lim_{P_i=0} P_i\log P_i=0.$$

Следователно $H(x)=0$.

3. Ентропията на случайна величина X достига максимум, когато стойностите, които приема тя, са равновероятни.

Да разгледаме $H(x)$ като функция на променливите $P_1, P_2, \ldots, P_n$ и да приложим метода на неопределените множители на Лагранж. Търсим екстремум на функцията

$$f=-\sum_{i=1}^{n}P_i\log P_i+\lambda\sum P_i.$$

Като диференцираме f по $P_1, \ldots, P_n$ и приравним съответните производни на нула, получаваме системата:

$$\begin{cases} \log P_1+\log e+\lambda=0 \\ \log P_2+\log e+\lambda=0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \log P_n+\log e+\lambda=0 \end{cases}$$

или

$$\log P_i=-\lambda-\log e \text{ при } i=1,2,\ldots,n.$$

От нея се вижда, че екстремумът (в дадения случай максимумът) се получава за равни стойности на P_i. Но от условието $\sum_{i=1}^{n} P_i=1$ следва, че

$$P_1=P_2=\ldots=P_n=\frac{1}{n}.$$

Максималната ентропия на системата е $H_{\max}(x)=\log n$.

Изборът на основа на логаритъма във формула (3.1.1) съответствува на избора на единица за измерване на ентропията. Ако за основа вземем числото 10, имаме десетични единици, а ако е 2 — двоични единици или бита. На практика е по-удобно ентропията да се измерва в двоични единици. Всъщност за единица (при избиране на числото 2 за основа) се приема ентропията на случайна величина с две равновероятностни състояния, т.е.

x_i	x_1	x_2
P_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$$H(x)=-\left(\frac{1}{2}\log\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\log\frac{1}{2}\right)=1 \text{ бит.}$$

В бъдеще ще измерваме ентропията само с двоични единици.

Пресмятането ѝ по формула (3.1.1) се опростява, ако се въведе специалната функция $\eta(P)=-P\log P$ (таблица 2 в приложение).

Формула (3.1.1) добива вида

$$H(x)=\sum_{i=1}^{n}\eta(P_i). \qquad (3.1.2)$$

При непосредствено заместване или алгебрично преобразуване на ентропията е удобно да се използува формулата

$$H(x)=M\left[-\log P(x)\right], \qquad (3.1.3)$$

т.е. ентропията се представя като математическа надежда.

Пример 1. Провежда се стрелба по две мишени. По първата са дадени два изстрела, а по втората — 3. Вероятността за попадение при един изстрел за първата мишена е $^1/_2$, а за втората — $^1/_3$. Да се сравнят ентропиите на двете системи.

Решение. Случайната величина X (броят на попаденията в първата мишена) и случайната величина Y (броят на попаденията във втората мишена) се подчиняват на биноминалния закон $P_{(m)}=C_n^m P^n q^{n-m}$. Съответно за X имаме $n=2$

$P=\frac{1}{2}$, $q=\frac{1}{2}$ и

m	0	1	2
$P(m)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

$$H(x)=-\left(\frac{1}{4}\log\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\log\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\log\frac{1}{4}\right)=1{,}5 \text{ бит.}$$

а за Y $n=3$, $P=\frac{1}{3}$, $q=\frac{2}{3}$ и

m	0	1	2	3
P(m)	$\frac{1}{27}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{8}{27}$

$$H(x)=-\left(\frac{1}{27}\log\frac{1}{27}+\frac{2}{9}\log\frac{2}{9}+\frac{4}{9}\log\frac{4}{9}+\frac{8}{27}\log\frac{8}{27}\right)\approx 1{,}688 \text{ бита.}$$

Следователно ентропията на втората система е по-голяма.

Пример 2. Да се определи максималната ентропия на съобщение от 5 букви, като се знае, че общият брой на буквите е 30.

Решение. Броят на възможните състояния на случайната величина X е $n=30^5$. $H(x)=\log 30^5\approx 24{,}5$ бита.

1.3. Ентропия на сложни системи. Условна ентропия

Обединение на две системи X и Y с възможни състояния $x_1,x_2,\ldots x_n;y_1,y_2,\ldots y_n$ наричаме сложна система (X,Y), чиито състояния са всички възможни комбинации на състоянията на X и Y. Броят на възможните състояния на сложната система е $n\times m$ и като означим с P_{ij} вероятността, че системата (X,Y) ще приеме стойност (x_i,y_j), можем да напишем матрицата за разпределение на вероятностите

$$\begin{pmatrix} P_{11}P_{12}\ldots P_{1m} \\ P_{21}P_{22}\ldots P_{2m} \\ \ldots\ldots\ldots \\ P_{n1}P_{n2}\ldots P_{nm} \end{pmatrix}.$$

Ентропията на сложна система се изчислява по формулите:

$$H(X,Y)=-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}P_{ij}\log P_{ij}; \qquad (3.1.4)$$

$$H(X,Y)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\eta(P_{ij}) \qquad (3.1.5)$$

$$H(X,Y)=M\left[-\log(X,Y)\right]. \qquad (3.1.6)$$

За сложните системи е в сила следната теорема.

Теорема 1. При обединяване на независими системи техните ентропии се събират.

Доказателство. Да предположим, че системите X и Y са независими. По теоремата за умножение на вероятностите на независими събития

$$P(X,Y)=P(X).P(Y).$$

Или $\log P(X,Y)=\log P(X)+\log P(Y)$.

Като заместим в (3.1.6), получаваме

$$H(X,Y)=M\left[-\log P(X)-\log P(Y)\right]$$

или

$$H(X,Y)=H(X)+H(Y).$$

Когато системите са зависими, простото събиране на ентропиите е неприложимо. При този случай ентропията на сложната система е по-малка, отколкото сумата на ентропиите на съставните ѝ части. За да я намерим, въвеждаме понятието условна ентропия.

Нека имаме две зависими системи X и Y. Да означим с $P(y_j/x_i)$ условната вероятност, че Y ще приеме състояние y_j при условие, че X е приела x_i. Да определим условната ентропия $H(Y/x_i)$ на Y, ако X се намира в състояние x_i. Както преди, тя може да се запише в три вида:

$$H(Y/x_i)=\sum_{j=1}^{m}P(y_j/x_i)\log P(y_j/x_i); \qquad (3.1.7)$$

$$H(Y/x_i)=\sum_{j=1}^{m}\eta\left[P(y_j/x_i)\right]; \qquad (3.1.8)$$

$$H(Y/x_i)=M\left[-\log P(Y/x_i)\right]. \qquad (3.1.9)$$

Условната ентропия зависи от приетото състояние за X. Да определим средната (пълната) ентропия на Y, като имаме

пред вид, че X може да приема различни състояния. За целта е достатъчно да решим (3.1.7) с вероятностите на съответното състояние на X и получените произведения да съберем. Така получаваме:

$$H(Y/X)=\sum_{i=1}^{n}P_iH(Y/x_i),$$

$$H(Y/X)=-\sum_{i=1}^{n}P_i\sum_{j=1}^{m}P(y_j/x_i)\log P(y_j/x_i);$$

$$H(Y/X)=-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}P_iP(y_j/x_i)\log P(y_j/x_i); \qquad (3.1.10)$$

$$H(Y/X)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}P_i\eta\left[P(y_j/x_i)\right]. \qquad (3.1.11)$$

Но по теоремата за умножение на вероятности на зависими събития $P_iP(y_j/x_i)=P_{ij}$. Следователно

$$H(Y/X)=-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}P_{ij}\log P(y_j/x_i);$$

$$H(Y/X)=M\left[-\log P(Y/X)\right]. \qquad (3.1.12)$$

Величината $H(Y/X)$ характеризира степента на неопределеност на системата Y, останала след като състоянието на системата X е напълно определено. $H(Y/X)$ **се нарича пълна условна** ентропия на Y относно X.

Теорема 2. Ентропията на обединена система е равна на ентропията на една от нейните съставни части плюс условната ентропия на втората част относно първата, т.е.

$$H(XY)=H(X)+H(Y).$$

Доказателство. По теоремата за умножение на вероятности

$$P(XY)=P(X)P(Y/X).$$

Следователно

$$\log P(XY)=\log P(X)+\log P)Y/X),$$

откъдето

$$H(XY)=M\left[-\log P(X)\right]+M\left[-\log P(Y/X)\right]$$

и

$$H(XY)=H(X)+H(Y/X).$$

Пример 1. Известно е, че от някаква болест боледуват средно по 2 души на всеки 100. За установяване на болестта се използува определена реакция, която е винаги положителна, когато човекът е здрав. Да означим X (резултата от посочената реакция) с две състояния: x_1 — положителна реакция и x_2 — отрицателна, а Y (състоянието на човека) също с две състояния: y_1 — човекът е здрав и y_2 — човекът е болен. Да се намерят $H(X)$ и $H(Y/X)$.

Решение. Леко се намират редовете на разпределение на X, Y, т.е.

X	x_1	x_2
$P\ (X=x_i)$	0,98	0,02

Y	y_1	y_2
$P\ (Y=y_j)$	0,51	0,49

Следователно

$$H(X)=0,1414 \text{ бита.}$$

Условните вероятности са:

$$P(y_1/x_1)=\frac{49}{51};\quad P(y_2/x_1)=\frac{2}{51};\quad P(y_1/x_2)=1;\quad P(y_2/x_2)=0;$$

$$H(Y/x_1)=0,2423 \text{ бита};\quad H(Y/x_2)=0 \text{ бита}.$$

Пълната условна ентропия

$$H(Y/X)=0,51.0,2423=0,1136 \text{ бита}.$$

1.4. Информация

По-горе определихме ентропията като мярка за степента на неопределеност на една система. Очевидно е, че с получаването на сведенията за системата неопределеността ѝ може да се намали или дори да остане равна на 0.

Да разгледаме системата X, върху която е направен опит (наблюдение), и да оценим информацията, получена в резултат на това, че състоянието ѝ е напълно определено, т. е. ентропията е станала равна на 0. Да означим с I_X информацията, получена чрез изясняване на състоянието на системата X. Тя е равна на намалената ентропия на системата

$$I_X=H(X)-1$$

или

$$I_X=H(X),$$

т.е. информацията, получена при пълно изясняване на състоянието на една система, е равна на нейната ентропия.

Тогава формули (3.1.1), (3.1.2) и (3.1.3) са в сила за I_X, т.е.

$$I_X=-\sum_{i=1}^{n} P_i\log P_i; \tag{3.1.13}$$

$$I_X=\sum_{i=1}^{n} \eta(P_i); \tag{3.1.14}$$

$$I_X=M\left[-\log P(X)\right]. \tag{3.1.15}$$

Пример 1. По цел може да бъдат произведени независими изстрели, като вероятността за поразяване при всеки от тях е $P=0,2$. След κ-тия изстрел $(1\leq\kappa<n)$ се изпраща разузнавателна група, която съобщава дали е поразена целта или не. Ако е поразена, стрелбата по нея се прекратява. Да се определи κ така, че количеството информация, получено от съобщението, да е максимално.

Решение. Да разгледаме системата X (целта след κ-тия изстрел). Възможните ѝ състояния са: x_1 — целта е поразена; x_2 — целта не е поразена. Редът за разпределение на вероятностите на X е следният:

x_i	x_1	x_2
P_i	$1-(1-P)^\kappa$	$(1-P)^\kappa$

Съгласно свойства (3) от 1.2

$$1-(1-P)^\kappa=(1-P)^\kappa,$$

откъдето

$$\kappa=\frac{-1}{\log(1-P)}.$$

При $P=0,2$ получаваме $\kappa=\frac{1}{0,3219}\approx 3.$

Често на практика се случва така, че системата X е недостъпна за наблюдение, а се наблюдава някаква друга система, непосредствено свързана с нея. Например, вместо непосредствено наблюдение на въздушните цели, те се наблюдават върху екрана на радиолокатора или на планшет в пункта за управление на ПВО.

Информацията за системата X, получена от системата Y, се нарича пълна (средна) информация за X, съдържаща се в Y. Нейното количество е равно на разликата между априорната и опостериорната ентропия, т.е.

$$I_{Y\to X}=H(X)-H(X/Y).$$

Просто се доказва, че $I_{Y\to X}=I_{X\to Y}$.

Наистина

$$H(XY)=H(X)+H(Y/X);$$
$$H(XY)=H(Y)+H(X/Y);$$

$$H(X)-H(X/Y)=H(Y)-H(Y/X);$$
$$I_{Y\to X}=I_{X\to Y}.$$

В бъдеще ще използуваме означението $I_{X\leftrightarrow Y}$ и ще го наричаме пълна взаимна информация.

Пример 2. Неизправна електронна уредба се намира в едно от петте различни състояния, които съответствуват на 5 вида неизправности. За намиране на вида на неизправността може да се направят няколко от седем възможни проверки, които при различни състояния на уредбата водят до запалване или незапалване на контролната лампа. В таблица 3.1.1 това е означено съответно с 1 (запалване) и 0 (незапалване).

Таблица 3.1.1

№ на проверката	№ на състоянието				
	1	2	3	4	5
1	0	0	0	0	1
2	0	0	0	1	1
3	0	1	1	0	0
4	1	0	1	0	0
5	1	0	1	0	1
6	1	1	1	0	0
7	1	1	1	1	0

Да се намери оптимален план от минимален брой проверки, които позволяват да се определи вида на неизправността на уредбата, и да се състави дърво на решението.

Решение. Означаваме с X системата, която има за възможни състояния 5-те неизправности на уредбата. Очевидно:

x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
P_i	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

Да означим с Y_j при $j=1,2,\ldots,7$ системите, които имат две състояния (y_1 — лампата свети и y_2 — лампата не свети) и отговарят на различните проверки. Очевидно:

V_j \ Y_j	Y_1	Y_2
Y_1	1/5	4/5
Y_2	2/5	3/5
Y_3	2/5	3/5
Y_4	2/5	3/5
Y_5	3/5	2/5
Y_6	3/5	2/5
Y_7	3/5	1/5

За да намерим пълната взаимна информация, необходимо е да знаем условната ентропия, а затова трябва да намерим условните вероятности за всяка проверка. Ще разгледаме подробно само първите две проверки, а пълната взаимна информация на останалите ще дадем направо.

За системата Y_1 имаме следните условни вероятности:

$P(x_i/y_j)$	y_1	y_2
x_1	0	1/4
x_2	0	1/4
x_3	0	1/4
x_4	0	1/4
x_5	1	0

$$H(X/Y_1)=-\frac{1}{5}1\log 1-\frac{4}{5}\left(\frac{1}{4}\log\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\log\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\log\frac{1}{4}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{4}\log\frac{1}{4}\right)=1{,}6 \text{ бита};$$

$$I_{X\leftarrow\rightarrow Y}=\log 5-1{,}6=2{,}32-1{,}6=0{,}72 \text{ бита}.$$

За системата Y_2 имаме следните условни вероятности:

$P(X_i/Y_j)$	Y_1	Y_2
X_1	0	1/3
X_2	0	1/3
X_3	0	1/3
X_4	1/2	0
X_5	1/2	0

$$H(X/Y_2)=-\frac{2}{5}\left(\frac{1}{2}\log\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\log\frac{1}{2}\right)-\frac{3}{5}\left(\frac{1}{3}\log\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\log\frac{1}{3}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{3}\log\frac{1}{3}\right)=1{,}35 \text{ бита};$$

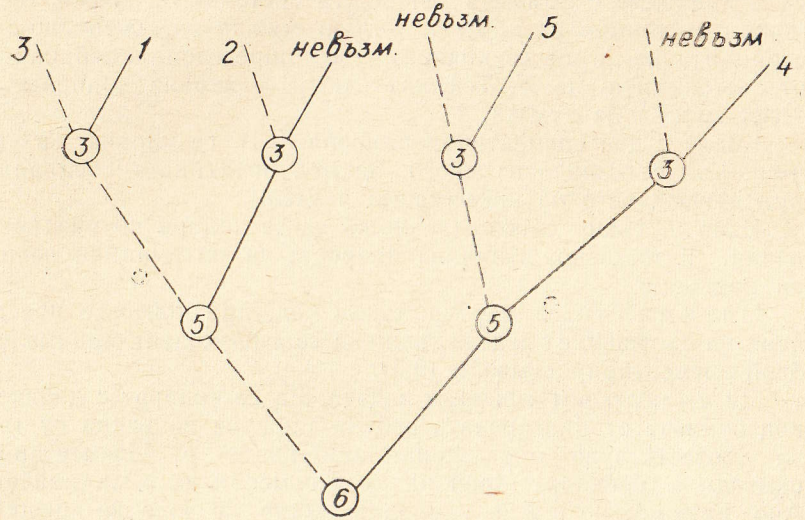
$$I_{X\leftarrow\rightarrow Y_2}=0{,}97 \text{ бита}.$$

За останалите системи имаме съответно:
$I_{X\leftarrow\rightarrow Y_3}=I_{X\leftarrow\rightarrow Y_4}=I_{X\leftarrow\rightarrow Y_5}=I_{X\leftarrow\rightarrow Y_6}=0{,}97$ бита; $I_{X\leftarrow\rightarrow Y_7}=0{,}72$ бита.

Тъй като $3.0{,}97>\log 5$, три от проверките 2,3,4,5 и 6 са оптимално решение. Например за проверките 6, 5 и 3 можем да съставим следното дърво (фиг. 3.1.1).

В разклоненията са поставени номерата на проверките. Ръбовете с пунктир отговарят на светене на лампата, а с

непрекъсната линия — на несветене. Всеки път от корена до окончателния връх дава един възможен вариант на проверка. Числата на последните върхове са номерата на съответната неизправност, отговаряща на този вариант.



Фиг. 3.1.1

2. ПРИЛОЖЕНИЕ НА ТЕОРИЯ НА ИНФОРМАЦИЯТА ПРИ ПРЕДАВАНЕ СЪОБЩЕНИЯ ПО СВЪРЗОЧНИТЕ КАНАЛИ

2.1. Икономичност на кода

Да разгледаме общата схема за предаване на съобщенията по свързочните линии (за конкретност ще говорим за телеграфията). На единия край на линията предавателят предава някакво съобщение, записано с 30 букви от българската азбука (без й, но с един допълнителен знак — паузата между думите), с 10 цифри или с букви и цифри.

При предаване на съобщенията по свързочните направления винаги трябва да се използува един или друг код, т.е. да се представи съобщението в някаква комбинация от сигнали (например азбуката на Морз).

Кодиране се нарича изобразяването на състоянията на една физическа система със състоянията на друга.

Най-простият случай на кодиране е, когато две системи X и Y имат краен брой състояния. Да вземем една система X (например буквите от българската азбука), която случайно приема едно от състоянията $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Искаме да да я кодираме с помощта на друга система Y, чиито възможни състояния са $y_1, y_2, \ldots, y_m$. Ако $m<n$, очевидно състоянията на X ще се кодират чрез определени комбинации от състоянията на Y. Техният избор се нарича кодиране в тесен смисъл на думата.

Кодът с два елементарни символа (0,1) се нарича д в о и ч е н. Той се използува много често в практиката (специално при въвеждането на информация в ЕИМ).

Едно и също съобщение може да се кодира по различен начин. Естествено, възниква въпросът за оптималния начин на кодиране.

О п т и м а л е н се нарича такъв код, при който за предаване на съобщение с дадена дължина се изразходват минимален брой елементарни символи (0,1).

Да си поставим следната задача: Да се кодират с двоичен код буквите от българската азбука така, че на всяка от тях да съответствува определена комбинация от елементарни символи и средният брой на тези символи да е минимален. Ако приемем, че *и* и *й* съвпадат, което не води до грешки, имаме 29 букви и интервал между думите, който означаваме с „—“.

Така можем да извършим кодиране по следния начин: номерираме буквите от 1 до 30 и написваме съответните номера в двоична система. Тогава всяка буква получава петзначен двоичен код, т.е.

$$а = 00000$$
$$б = 00001$$
$$в = 00010$$
$$\vdots$$
$$я = 11101$$
$$— = 11110$$

В нашия код обаче за често срещаните букви (*а*,*о*,*е*) и за рядко срещаните (*щ*,*ц*,*ъ*) се изразходват еднакъв брой символи. Очевидно по-разумно е по-често срещаните букви да се кодират с по-малък брой символи, а по-рядко срещаните — с по-голям брой. За съставянето на такъв код обаче е необходимо да се знае честотата на употреба на буквите от българската азбука.

2.2. К о д Ш е н о н-Ф а н о

Да допуснем, че буквите в българската азбука имат следните честоти (верните честоти са плод на голям брой изследвания и обикновено се държат в тайна):

буква	честота	буква	честота
—	0,145	у	0,018
а	0,11	я	0,17
и	0,085	з	0,13
о	0,07	б	0,15
т	0,061	г	0,14
е	0,05	ч	0,14
н	0,05	х	0,133
в	0,049	ж	0,133
р	0,03	ю	0,132
д	0,027	ъ	0,131
с	0,026	ш	0,13
к	0,025	ц	0,125
л	0,025	щ	0,123
м	0,021	ф	0,112
п	0,019	ь	0,10

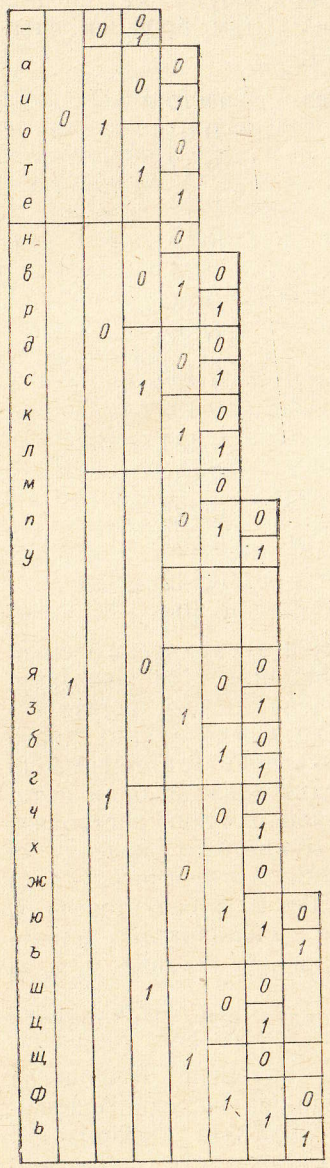
Очевидно кодът ще бъде най-икономичен, когато всеки елементарен символ предава максимална информация. Ние доказахме, че максимална информация се получава тогава, когато състоянията на системата са равновероятни. Следователно основа на оптималното кодиране е изискването елементарните символи в кодирания текст да се срещат средно еднакъв брой пъти.

Въз основа на това изискване Шенон и Фано построяват оптимален код по следния начин. Буквите се разделят на две приблизително равновероятни групи: в първата група на първо място в комбинацията се поставя 0, а във втората 1. След това всяка група се дели на две приблизително равновероятни групи: за първата подгрупа се поставя 0, а за втората 1 и т.н.

Кодът на Шенон-Фано за българската азбука е показан на таблица 3.1.2.

За да проверим дали нашият код е оптимален, трябва да изчислим средната информация, отговаряща на един елементарен символ, и да я сравним с максималната информация, която дава една система с две равновъзможни състояния, т.е.

Таблица 3.1.2



$$I_x = -\sum_1^{30} P_i \log P_i = \sum_1^{30} \eta(P_i) = 4{,}16$$

бита.

По формулата $M(x) = \sum_1^{30} X_i P_i$ определяме средния брой елементарни символи, отговарящи на една буква. В случая той е равен на 4,24.

Средната информация на един елементарен символ е

$$I_{ср} = \frac{4{,}16}{4{,}24} \approx 0{,}97.$$

Ако изберем петзначния двоичен код, ще получим

$$I_{ср} = \frac{4{,}16}{5} = 0{,}832.$$

Кодирането по букви обаче не е много икономично, тъй като между отделните букви има зависимости (например 4 съгласни не може да стоят на едно място и т.н.). В много случаи е по-удобно да се кодират често употребявани срички, а даже и често употребявани текстове. Принципът на оптималното кодиране обаче остава същия.

Пример 1. Едно съобщение се състои от последователност на две букви A и B, чиито вероятности на появяване са независими и са равни на 0,8 и 0,2. Да се кодират по метода на Шенон-Фано:

— отделните букви;

— блоковете от двубуквени съчетания;

— блоковете от трибуквени съчетания.

Да се сравнят кодовете по тяхната икономичност.

Решението е дадено в таблици 3.1.3—3.1.5.

Средната информация на един елементарен символ за трите кода е 0,722; 0,926; 0,992.

Таблица 3.1.3

Буква	A	B
Честота	0,8	0,2
Кодов знак	0	1

Таблица 3.1.4

Буквени съчетания	AA	AB	BA	BB
Честоти	0,64	0,16	0,16	0,04
Кодов знак	0	10	110	111

Таблица 3.1.5

Буквени съчетания	AAA	AAB	ABA	BAA	ABB	BAB	BBA	BBB
Честоти	0,512	0,128	0,128	0,128	0,032	0,032	0,031	0,008
Кодов знак	0	100	101	110	11100	11101	11110	11111

Глава втора

ТЕОРИЯ НА НАДЕЖДНОСТТА

1. ПРЕДМЕТ НА ТЕОРИЯТА НА НАДЕЖДНОСТТА

Създаването на научната дисциплина, наречена „Теория на надеждността“, обикновено се свързва със стремителния технически прогрес в края на четиридесетте и началото на петдесетте години на нашето столетие. Именно през този период на промишлената арена се появиха нови средства и технологични методи, които създадоха предпоставки за развитието на изчислителната техника и построяването на системи за автоматично управление. Сложността на повдигнатите от времето технически задачи, за чието решаване трябваше да се създадат и по-сложни системи, наложи да се започнат дълбоки изследвания и в областта на надеждността. През последните години осигуряването на надеждността стана предмет на много интензивно обсъждане и е един от ключовите проблеми при разработването, производството и експлоатацията на техническите устройства от най-различен тип и назначение. Това е напълно естествено. Непрекъснато протича процес на дълбоко внедряване на техниката във всички отрасли от дейността на човека. И една повреда в техническите устройства влече след себе си редица трудности и неудобства, свързани с големи технически и икономически загуби. В някои случаи това може да доведе и до извънредни произшествия, поставящи под заплаха целостта на крупни съоръжения, изпълнението на важни и отговорни задачи и дори безопасността на хората. Във връзка с това надеждността обикновено се разглежда като една от основните характеристики на съвременните технически устройства, а в някои случаи дори като главна. Особено значение има тя при бойната техника, която е с голям брой компоненти, често работи при високи температури, скорости, механични и електрични напрежения или мощни радиационни

излъчвания. При това своевременното отстраняване на възникналите неизправности често е невъзможно. Затова осигуряването на необходимата надеждност при нея е важно условие за по-нататъшния прогрес на науката и техниката.

В проблема за надеждността може да се отделят следните основни въпроси, които представляват непосредствен интерес за нейното изучаване:

— математически апарат на теорията на надеждността;

— количествени критерии (параметри) за надеждността на елементите и системите;

— методи за инженерен разчет и оценка на надеждността на апаратурата;

— методика за обосноваване изискванията към надеждността;

— анализ на факторите, които влияят върху надеждността;

— методи за повишаването ѝ;

— организационно-технически въпроси на надеждността.

Съвкупността от тези въпроси е предмет на теорията на надеждността.

Математическият апарат на теорията на надеждността се основава главно на теоретико-вероятностните методи. За изучаване на теорията на надеждността преди всичко е необходимо да се знаят основните положения от теорията на вероятностите: понятие за случайно събитие и случайни величини и техните характеристики, закони за разпределение на случайните величини, действия със случайните величини. При експериментално определяне на числените характеристики на надеждността е необходимо да се знаят правилата за статистическа обработка на опитни данни, т.е. да се владеят основите на математическата статистика. В редица теоретични изследвания по проблемите на надеждността успешно се използува апаратът от теория на масовото обслужване и теорията на случайните процеси. В последно време се използуват и апаратът на математическата логика, матричните методи и методите на статистическото моделиране на ЕИМ.

При изучаване на проблемите на надеждността на първо място възниква въпросът за определяне и избиране на количествените показатели, т.е. критериите на надеждността. Изборът зависи от типа на апаратурата и от характера на изпълняваните от нея функции. Известни са много критерии, характеризиращи различните страни на надеждността.

Важно място заема разработването на методи за инженерно разчитане на надеждността на апаратурата. Приблизителна

оценка за нея може да се получи въз основа на инженерните методи за разчитане на надеждността на сложни системи и устройства по изходните статистически данни за надеждността на елементите. Основно достойнство на такива разчети е възможността да се оцени очакваната надеждност, преди да се произведе дадена апаратура. Въз основа на тази оценка може да се избере най-оптималният вариант за техническо решение, което максимално задоволява изискванията на надеждността.

При разработване на методиката за обосноваване на изискванията към надеждността е важно да се отчита в каква степен влияе тя върху ефективността на изпълняваните от системата практически задачи. Съществени са също така икономическите съображения и възможностите на производството.

Трябва да съществуват удобни за практиката методи за оценка на фактическата надеждност на вече създадената апаратура при нейната експлоатация. Задачата в това отношение се решава с методите на математическата статистика.

За да се набележат правилно пътищата за повишаване на надеждността на елементите и системите, трябва да се знаят факторите, които ѝ влияят, и причините за появяването на откази. Надеждността на апаратурата зависи от много външни и вътрешни въздействия, към които се отнасят: режимът на работа, високата и ниската температура, повишената влажност, намаленото атмосферно налягане, различните метеофактори, ударите, вибрациите и т.н. Задачата е да се сведе до минимум тяхното влияние и да се разработят способи за защита на апаратурата от тях.

Определящ в проблема за надеждността е въпросът за ефективните методи за повишаването ѝ. Тя се осигурява от цял ред дейности на всички етапи, като се започне от създаването на апаратурата и се завърши с нейното практическо използуване. Всички способи за повишаването ѝ може да се разделят на две групи. Към първата се отнасят способите, насочени към увеличаване на средното време за работа на апаратурата между отказите, т.е. за повишаване на безотказността на работата. Втората група включва способите за намаляване на времето за възстановяване на апаратурата след отказ.

За решаване на проблема за надеждността важна роля играят организационно-техническите въпроси. Те са свързани с координацията на усилията за повишаване на надеждността, статистичния контрол за надеждността на устройствата, събирането и обработването на статистически данни за отказите,

установяването на връзката между сферите за производство и експлоатация с редица други дейности.

Теорията на надеждността се развива непрекъснато и интензивно, като си поставя за решаване все нови и нови задачи. Например в последно време голямо внимание се отделя на анализа на надеждността и ефективността на сложни системи за управление.

2. ОСНОВНИ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Теорията на надеждността се базира на редица основни понятия и определения. При разглеждане на въпросите, свързани с нея, е важно да се разграничи в какви състояния може да се намират изделията при експлоатация. Към тях впоследствие ще отнасяме системите и техните елементи, в частност апаратури, прибори и техните части, възли, блокове и детайли.

Под *система* се разбира съвкупност от съвместно действуващи обекти, напълно осигуряващи изпълнението на определени практически задачи. Обекти в общия случай може да са не само техническите устройства, но и средата, и обслужващия ги персонал.

В системата за автоматично управление на даден процес може да се включи човекът оператор, контролиращ и вземащ решения за изменяне на режима на работата. Пилотът, който управлява самолета, също е едно от звената на системата за осигуряване на полета.

Елементът е част от системата, изпълняваща отделна функция.

Необходимо е да отбележим, че отнасянето на дадено изделие към система или елемент е условна процедура и зависи от конкретните условия, при които се разглежда надеждносттав Например при анализиране на надеждността на свръзката а определено звено на управлението всеки вид, дори сложна апаратура, обикновено се разглежда като елемент на системата, осигуряваща управлението на войските. Когато се изслед ва надеждността на конкретна апаратура, тя вече се разглежда като система, а нейни елементи може да са функционални възли, блокове и други.

Системите може да бъдат *възстановими* и *невъзстановими*.

Възстановимата система след откази се ремонтира и продължава да изпълнява своите функции. По-голямата част от използуваните системи се отнасят към възстановимите.

Невъзстановимата система при отказ не подлежи или не се поддава на възстановяване по икономически или технически съображения.

По характер на обслужването системите се делят на *обслужвани* и *необслужвани*.

В зависимост от влиянието на отказите на елементите на системите върху изходните им параметри те се делят на *прости* и *сложни*.

Едни от най-важните понятия в теорията на надеждността са „надеждност“ и „отказ“. Надеждността е само едно от свойствата на всяко изделие, отличаващо се от всички други по това, че се проявява само в процеса на експлоатацията. С други думи, надеждност е качество на изделието, развърнато по време. Оттук произтича и основното определение на понятието: „*Надеждността е свойство на изделията да изпълняват определени дейности, като запазват своите експлоатационни показатели в дадени граници в течение на определен период от време.*“ Експлоатационните показатели зависят от предназначението на изделието, производителността, икономичността, рентабилността и други.

С други думи, надеждността като общо свойство на изделия може да се детайлизира и представи като съвкупност от свойства, всяко от които се определя по следния начин:

— *безотказност* — свойство на изделието да запазва работоспособността си в продължение на дадено време при определени условия на експлоатация;

— *ремонтопригодност* — приспособеност към откриване и отстраняване на отказите и неизправностите чрез техническо обслужване и ремонт;

— *дълготрайност* — свойство на изделието да запазва своята работоспособност до пределно състояние, когато неговото по-нататъшно използуване става невъзможно или нецелесъобразно.

Друго важно понятие в теорията на надеждността е *отказът*. Той се определя като събитие, заключаващо се в пълното нарушаване на работоспособността на изделието или продължаване на функционирането, но с влошено качество. В редица случаи теорията на надеждността се разглежда като научна дисциплина, изучаваща закономерностите за възникване на отказите в техническите устройства. Тези закономерности зависят от вида на отказите, затова за удобство на

анализа може да се класифицират по редица признаци в съответствие с таблица 3.2.1.

В редица случаи в апаратурите може да възникнат кратковременни самоотстраняващи се откази, които са характерни за системите за обработване и предаване на информацията, електронноизчислителната техника и друга аналогична апаратура.

Таблица 3.2.1

Класификационни признаци	Видове откази
Характер на възникване	внезапни
	постепенни
Възможности за използуване след възникване на отказа	пълни
	частични
Връзка с другите откази	независими
	зависими
Наличие на външни проявления	очевидни (явни)
	скрити (неявни)
Причини за възникването	конструкционни
	технологически
	експлоатационни
По продължителност	устойчиви
	временни
	смесени

Обаче каквито и видове откази и причини за тяхното възникване да съществуват, неизменно ги обединява общ признак: случайност на възникването дори при постепенно натрупване на физическите изменения. Това позволява отказът на елемента или системата да се трактува като случайно събитие.

3. КОЛИЧЕСТВЕНИ ПОКАЗАТЕЛИ НА НАДЕЖДНОСТТА

Определението на понятието „надеждност“ има качествен характер. Необходимо е да се въведат количествени показатели за оценка на това свойство, за да бъде възможно към него

да се поставят конкретни изисквания, както към другите технически параметри, и обосновано да се решават техническите и организационните задачи по разработването, производството и експлоатацията на изделията.

При експлоатацията на техниката е много важно да се знае колко време тя ще функционира нормално (до появяване на първия отказ или между два последователни отказа), какво време е необходимо за възстановяване на нейната работоспособност при възникване на отказ, кога ще настъпят в нея такива изменения, при които по-нататъшното използуване става невъзможно или нецелесъобразно.

Ако тези величини са известни, надеждността на техниката е зададена напълно. При теоретичния анализ на надеждността се използуват вероятностните характеристики на случайните величини или техните числови параметри (математическо очакване, дисперсия и др.). Експерименталното определяне на количествените показатели на надеждността и на характеристиките на всяка случайна величина е възможно само в резултат на статистически данни.

3.1. Показатели за надеждността на невъзстановимите изделия

Безотказността и дълготрайността на невъзстановимите изделия се установяват количествено въз основа на случайната величина време за работа (наработка) до отказа T. Показатели за надеждността на невъзстановимите изделия са въвежданите въз основа на законите за разпределение на случайната величина T характеристики: вероятност за безотказна работа $P(t)$, вероятност за отказа $Q(t)$, честота на отказите $f(t)$ и интензивност на отказите $\lambda(t)$. Като числова характеристика на тази случайна величина се въвежда параметърът на надеждността — средното време на работа до отказа $\overline{T}$.

Вероятност за безотказна работа $P(t)$ се нарича вероятността, че в даден интервал от време или в пределите на дадено време за работа няма да възникне отказ. С други думи, тя представлява заеманите от случайната величина T значения, които не са по-малки от зададеното текущо време t за функциониране на системата, т.е.

$$P(t)=P(T\geq t). \tag{3.2.1}$$

При експериментално определяне на вероятността за безотказна работа през времето t са необходими достатъчно много

изделия N_0 от даден тип, които работят при еднакви условия. Ако в момента t са отказали n изделия и са останали работоспособни $N_n=N_0-n$, статистическото значение на вероятността за безотказна работа $P^*(t)$ се определя от израза

$$P^*(t)=\frac{N_n}{N_0}. \tag{3.2.2}$$

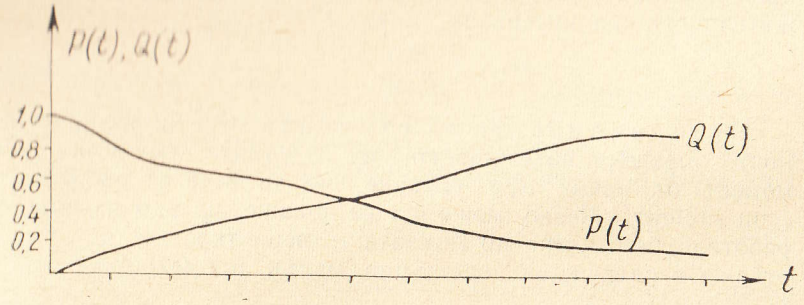
Вероятността за отказ $Q(t)$ се определя като вероятност за възникване на отказ в определен интервал от време за работа. За дадено изделие отказът и липсата на отказ в едно и също време са несъвместими събития, затова за всеки момент от време на работата

$$P(t)+Q(t)=1, \tag{3.2.3}$$

откъдето

$$Q(t)=1-P(t)=P(T\leq t). \tag{3.2.4}$$

Характерът на изменение на функциите $P(t)$ и $Q(t)$ при положение, че в момент от време $t=0$ се включва изправно изделие, е показан на фиг. 3.2.1.



Фиг. 3.2.1

Честота на отказите $f(t)$ се нарича плътността на разпределение на вероятностите за отказ на изделието. Следователно тази характеристика се определя като производна от вероятността за отказ, т. е.

$$f(t)=\frac{dQ(t)}{dt}. \tag{3.2.5}$$

Като отчетем съотношението (3.2.4), можем да изразим честотата на отказите чрез вероятността за безотказна работа, т. е.

$$f(t) = -\frac{dP(t)}{dt} \tag{3.2.6}$$

Между честотата на отказите, вероятността за безотказна работа и вероятността за отказ при непрекъснат закон на разпределение съществува зависимостта, изразена в (3.2.5) и (3.2.6) и произтичащите от тях зависимости

$$Q(t) = \int_0^t f(t)dt$$

$$P(t) = 1 - \int_0^t tf(t)dt. \tag{3.2.7}$$

Стойностите на честотата на отказите $f^*(t)$ се определят статистически като отношение на броя на изделията $n(\Delta t)$, които са отказали в някакъв интервал от време Δt, към произведението на техния първоначален брой N_0 по продължителността на интервала, т. е.

$$f^*(t) = \frac{n(\Delta t)}{N_0.\Delta t}. \tag{3.2.8}$$

Интензивността на отказите $\lambda(t)$ е характеристика, която определя надеждността на изделията във всеки даден момент от време при условие, че те вече са работили до този момент. Лесно може да се докаже, че ако изделието е работило безотказно до момента t, вероятността, че няма да откаже в следващия достатъчно малък промеждутък от t до $t+\Delta t$ е

$$P(t, t+\Delta t) = \frac{P(t+\Delta t)}{P(t)}. \tag{3.2.9}$$

Тогава вероятността за отказ на изделието в промеждутъка от t до $t+\Delta t$ се определя в съответствие с (3.2.4), т. е.

$$Q(t+\Delta t) = 1 - P(t, t+\Delta t) = \frac{P(t) - P(t+\Delta t)}{P(t)}. \tag{3.2.10}$$

Като разделим и умножим дясната част на уравнение (3.2.10) с Δt, получаваме

$$Q(t+\Delta t) = -\left[\frac{P(t+\Delta t) - P(t)}{\Delta t}\right]\frac{\Delta t}{P(t)},$$

откъдето

$$Q(t+\Delta t) \approx -\frac{P'(t)}{P(t)}\Delta t. \tag{3.2.11}$$

Отношението $\frac{P'(t)}{P(t)}$ е аналогичен израз за интензинността на отказите, т. е.

$$\lambda(t) = -\frac{P'(t)}{P(t)}. \tag{3.2.12}$$

Като използуваме (3.2.6), заменяме израза (3.2.12), т. е.

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{P(t)}. \tag{3.2.13}$$

Оттук следва, че интензивността на отказите е условна плътност на разпределение на вероятността за отказ във всеки момент от време t.

Уравнение (3.2.12) може да се реши относно вероятността за безотказна работа $P(t)$, при което се получава

$$P(t) = e^{-\int_0^t \lambda(t)dt} \tag{3.2.14}$$

Този израз се използува широко при разчетите и често се нарича основна формула на надеждността.

Значението на интензивността на отказите $\lambda^*(t)$ за даден интервал от време Δt се определя статистически по формулата

$$\lambda^*(t) = \frac{f^*(t)}{P^*(t)} = \frac{n(\Delta t)}{N_{\text{п}}.\Delta t}. \tag{3.2.15}$$

Типична крива за интензивността на отказите е представена на фиг. 3.2.2.

За участък II, наричан период на нормална експлоатация, съответствува постоянно значение на интензивността на отказите, т. е. за този период тя не зависи от времето

$$\lambda(t) = \lambda.$$

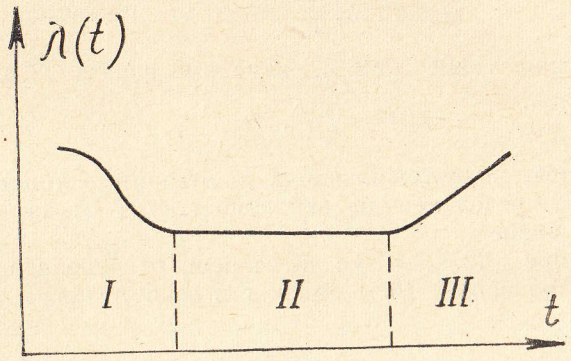
Ако това условие се изпълнява, от формула (3.2.14) следва, че случайната величина T се подчинява на експоненциалния закон с функция на разпределението

$$P(t) = e^{-\lambda t} \tag{3.2.16}$$

и функция на плътността на разпределението

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}. \tag{3.2.17}$$

Експоненциалният закон на разпределението е един от основните в теорията на надеждността. Необходимо е да се обърне внимание на неговото важно свойство: вероятността за безотказна работа на изделието в интервал от време на работа от t до $t+\tau$ не зависи от времето на предшествуваща-



Фиг. 3.2.2

та работа, а се определя само от дължината на интервала τ. В това можем лесно да се убедим, ако използуваме (3.2.9), като заменим Δt с τ при експоненциално разпределение, получаваме

$$P(t,t+\tau)=\frac{P(t+\tau)}{P(t)}=\frac{e^{-\lambda(t+\tau)}}{e^{-\lambda t}}=e^{-\lambda\tau}.$$

Това означава, че вероятността за безотказна работа не зависи от избора на момента t, а се определя от продължителността на интервала τ. На това свойство съответствува липсата на стареене и износване на апаратурата или елементите. Затова, ако е известно, че в даден интервал от време на работата този процес може да не се отчита, съществуват всички основания да се приложи за анализа експоненциалният закон на разпределение.

Средното време за работа до отказа $\overline{T}$ е един от най-простите и нагледни показатели на надеждността. Този параметър установява средно след колко време може да се очаква отказ в невъзстановимите изделия, т. е. той е математическото очакване на случайната величина T.

Като математическо очакване на непрекъсната случайна величина средното време за работа до отказ се изразява чрез плътността на разпределение по известната зависимост, т. е.

$$\overline{T}=\int_0^\infty tf(t)dt. \qquad (3.2.18)$$

Може да се получи връзка между него и другите показатели на надеждността, като се постави значението на $f(t)$ от уравнение (3.2.6) и се интегрира по части.

При експоненциален закон на разпределение получаваме

$$\overline{T}=\frac{1}{\lambda}, \qquad (3.2.19)$$

т. е. средното време за работа до отказ числено е равно на величина, обратна на интензивността на отказа.

Опитно това време се определя като средно аритметично значение на получените реализации на случайната величина T. Ако за всички N_0 изделия при работа или изпитания са фиксирани значения за него $t_1,t_2,\ .\ .\ .,t_i,\ .\ .\ .,t_{N_0}$,

$$\overline{T}^*=\frac{\sum_{i=1}^{N_0}t_i}{N_0}. \qquad (3.2.20)$$

Параметърът $\overline{T}$ се нарича средно време за работа до първия отказ, ако се използува при разглеждане на надеждността на възстановими изделия до появяване на първия отказ.

3.2. Показатели за надеждността на възстановимите изделия

Възстановимите изделия се характеризират с две основни случайни величини: време за работа между два последователни отказа $T_р$ и време за възстановяване след отказа $T_в$. Тези величини са непрекъснати и в общия случай могат да заемат значения от нула до безкрайност.

При анализиране на надеждността на тези изделия в много случаи е по-удобно вместо временните критерии да се използуват отказите n и възстановяванията m в някой интервал от времето на експлоатация. Тези величини също са случайни,

но дискретни и могат да приемат само неотрицателни целочислени значения 0, 1, 2, 3, . . .

Количествени показатели за надеждността на възстановимите изделия са законите за разпределение и числените характеристики на случайните величини $T_р, T_в$, n и m. Но при оценка на безотказността на възстановимите изделия не са достатъчни само показателите, които характеризират тяхната надеждност до първия отказ, а се налага да се въвеждат и някои допълнителни. При това е удобно процесът за възстановяване на отказите да се разглежда като поток от случайни събития и да се използуват количествените характеристики на такива потоци, разработени в теорията на масовото обслужване.

Параметърът на потока на отказите $\lambda(t)$ определя средния брой на отказите на възстановимите изделия в единица време за всеки момент от експлоатацията и математически може да се представи с израза

$$\lambda(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\sum_{n=1}^{\infty} nP_n(t,t+\Delta t)}{\Delta t}, \qquad (3.2.21)$$

където $P_n(t,t+\Delta t)$ е вероятността за появяване на n отказа в интервал от t до $t+\Delta t$.

Значението на параметъра на потока на отказите в някакъв интервал от време Δt се определя опитно по съотношението

$$\lambda^*(t)=\frac{n_0\Delta(t)}{\Delta t}, \qquad (3.2.22)$$

където $n_0(\Delta t)$ е числото на отказите в интервала Δt.

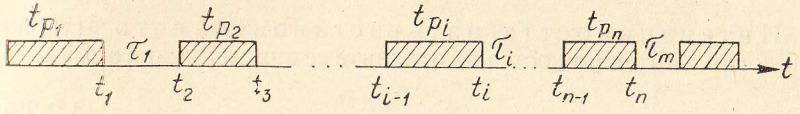
Независимо от закона за разпределение на отказите параметърът на техния поток за дадена система при неограничено време на експлоатация се стреми към стационарно значение, т. е.

$$\lim\lambda(t)=\frac{1}{\overline{T}_р}. \qquad (3.2.23)$$

Статистическото значение на средното време за работа до отказ се определя като средно аритметично от всички инервали от време на нормална работа на изделието в течение на някакъв срок на експлоатация.

Ако при експлоатация на изделието са фиксирани n отказа и продължителностите на интервалите за нормална работа между тях съставляват $t_{р_1}, t_{р_2}, \ldots, t_{р_i}, \ldots, t_{р_n}$ (фиг.3.2.3),

$$\overline{T}_р{}^* = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_{р_i}}{n}. \qquad (3.2.24)$$



Фиг. 3.2.3

При експоненциален закон на разпределение на отказите в елементите стационарното значение на параметъра на техния поток при сложно възтановимо изделие за всеки момент от експлоатацията е

$$\lambda(t)=\lambda=\frac{1}{\overline{T}_р}. \qquad (3.2.25)$$

Основен показател за безотказността на възстановимите изделия при прост поток на отказите е параметърът на отказите или обратната му величина — времето за работа до отказ $\overline{T}$. При необходимост въз основа на тези показатели може да се определи вероятността за възникване на n отказа в даден интервал от време на експлоатация от 0 до t, като се използува разпределението на Поасон, т. е.

$$P_n(t)=\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}. \qquad (3.2.26)$$

В частност при $n=0$ се получава

$$P_0(t)=e^{-\lambda t},$$

което съответствува на вероятността за безотказна работа при зададено време t.

Вероятността за възстановяване $V(\tau)$ по своята физическа същност е вероятността, че случайното време $T_в$ няма да превиши зададеното време τ и за експоненциалния закон на разпределение се изразява с формулата

$$V(\tau)=P(T_в\le\tau)=1-e^{-\frac{\tau}{\overline{T}_в}}=1-e^{-\mu\tau}, \qquad (3.2.27)$$

където $\frac{1}{T_в}$ е интензивността на възстановяването (параметър на потока на възстановяването).

Честота на възстановяването $v(\tau)$ е плътността на разпределение на вероятностите за възстановяване, т. е.

$$v(\tau)=\frac{dV(\tau)}{d\tau}\ . \qquad (3.2.28)$$

Интензивността на възстановяването $\mu(\tau)$ по аналогия с интензивността на отказите се определя по формулата

$$\mu(\tau)=\frac{v(\tau)}{1-v(\tau)}\ . \qquad (3.2.29)$$

Средното време за възстановяване $\overline{T}_в$ (математическото очакване на случайната величина $T_в$) се определя опитно като средно аритметично от всички m случайни интервали от време за възстановяване $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4, \ldots, \tau_i, \ldots, \tau_m$ (фиг.3.2.3) по формулата

$$\overset{*}{T}_в=\frac{\sum_{i=1}^{m}\tau_i}{m}. \qquad (3.2.30)$$

Правилна оценка на надеждността може да се даде само при едновременно отчитане както на безотказността, така и на възстановяването. Вероятността за намиране на изделието в работоспособно състояние, а следователно и неговата готовност в даден момент от време t, зависи от съотношението между общото време за нормална работа и общото време за възстановяване. Тази вероятност може да се разглежда като общ показател на надеждността и се нарича функция на готовността $K_г(t)$.

Както вече беше отбелязано, при анализиране на надеждността на изделието обикновено се предполага, че потокът на отказите е прост, а времето за възстановяване се подчинява на експоненциалното разпределение. В този случай

$$K_г(t)=\frac{\overline{T}}{\overline{T}+\overline{T}_в}+\frac{\overline{T}_в}{\overline{T}+\overline{T}_в}\,e^{-\left(1+\frac{\overline{T}_в}{\overline{T}}\right)\frac{t}{\overline{T}_в}} \qquad (3.2.31)$$

При увеличаване на времето за непрекъсната експлоатация функцията за готовност се стреми към стационарно значение, определено от израза

$$K_г=\lim K_г(t)=\frac{\overline{T}}{\overline{T}+\overline{T}_в}\ , \qquad (3.2.32)$$

и се нарича коефициент на готовност. Той се определя експериментално като отношение на сумарното време на нормална работа на изделието към общото време на работата и възстановяване. В съответствие с фиг. 3.2.3

$$\overset{*}{K}_г=\frac{\sum_{i=1}^{n}t_{pi}}{\sum_{i=1}^{n}t_{pi}+\sum_{i=1}^{m}\tau_i}\ . \qquad (3.2.33)$$

Наред с коефициента за готовност често се използува величина, която характеризира вероятността на противоположното събитие, наречено коефициент на престоя $K_п$. Очевидно е, че

$$K_г+K_п=1.$$

При разглеждане на $K_п$ като вероятност, че в даден момент от време изделието се намира в процес на възстановяване след отказ, може да се запише съотношението

$$K_п=\frac{\overline{T}_в}{\overline{T}+\overline{T}_в}\ . \qquad (3.2.34)$$

Двата коефициента намират широко приложение при оперативно-тактическия анализ на надеждността на много от военните апаратури и системи и при обосноваване на изискванията към тях.

4. ОСНОВИ НА РАЗЧЕТА НА НАДЕЖДНОСТТА

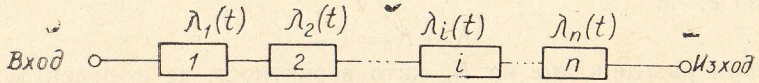
Към разчет на надеждността се прибягва при разработване на тактико-техническите изисквания към военната апаратура, при проектиране на нова апаратура и експлоатация на апаратура с неизвестни показатели на надеждност, които трябва да се определят в съкратени срокове.

Разчетът се заключава в изчисляване на показателите за надеждността на апаратури и системи по известни показате-

ли за надеждността на техните елементи. В повечето случаи той се свежда до разчет на показателите за безотказност, тъй като наличните данни за надеждността на елементите не позволяват да се получат други показатели със задоволителна точност. Много е важно правилно да се отчете влиянието на отказите на елементите върху работоспособността на системата. В най-общия вид това става чрез въвеждане на понятията последователно и паралелно (по надеждност) съединяване на елементите.

4.1. Основни разчетни съотношения при последователно съединяване на елементите

Съвкупност на елементи образува последователно съединение при условие, че отказът на всеки от тях води до отказ на системата. Да разгледаме невъзстановима система от n последователно съединени разчетни елементи с известни интензивности на отказите $\lambda_1(t), \lambda_2(t), \ldots, \lambda_i(t), \ldots, \lambda_n(t)$. Условно системата може да се представи във вид на схема, изобразена на фиг. 3.2.4.



Фиг. 3.2.4

Безотказната работа на системата в даден интервал от 0 до t може да се разглежда като сложно събитие, равно на произведението от събитията, които се заключават в нормалната работа на всички елементи в течение на това време. Ако се приеме, че отказите на елементите са независими, по теоремата за умножение на вероятностите се получава израз за вероятността за безотказна работа на системата във вида

$$P_c(t)=\prod_{i=1}^{n} P_i(t), \qquad (3.2.35)$$

където $P_i(t)$ е вероятността за обезотказна работа на i-тия елемент.

При разчет на надеждността обикновено се предполага, че интензивностите на отказите на елементите не зависят от

времето. Като използуваме съотношението (3.2.16), получаваме

$$P_c(t)=\prod_{i=1}^{n} e^{-\lambda_i t} = e^{-t\sum_{i=1}^{n}\lambda_i} = e^{-\lambda_c t}, \qquad (3.2.36)$$

където $\lambda_c=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i$ е интензивността на отказите на системата.

Като отчетем, че за системата остава справедливо експоненциалното разпределение на времето за работа до отказ, средното време за работа на системата до отказ е

$$\bar{T}_c=\frac{1}{\lambda_c}=\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i}. \qquad (3.2.37)$$

При разчитане на показателите за безотказност на възстановимите системи предположението за постоянство по време на интензивностите на отказите на елементите и независимият характер на тяхното възникване се запазва.

Ако интензивността на отказите на елементите не зависи от времето, потокът на отказите, които възникват в система от такива елементи, е прост. При последователно съединяване на елементите той също е прост и неговият параметър е равен на сумата от интензивностите на отказите на елементите, т. е.

$$\lambda=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i. \qquad (3.2.38)$$

Времето за работа до отказ на системата е равно на величината, обратна на параметъра на потока на отказите, т. е.

$$T_c=\frac{1}{\lambda_c}=\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i}. \qquad (3.2.39)$$

Вероятността за безотказна работа на системата в зададен интервал от 0 до t се разчита в съответствие с (3.2.26) по формулата

$$P_c(t) = e^{-\lambda_c t} = e^{-t\sum_{i=1}^{n}\lambda_i}. \qquad (3.2.40)$$

Следователно разчетните съотношения за определяне на показателите за безотказност на възстановимите и невъзстановимите системи практически съвпадат.

За възстановимите системи при необходимост може да се изчислят вероятностите за възникване на k откази за определено време на експлоатация, като се използува разпределението на Поасон

$$P_\kappa(t) = \frac{(\lambda_c t)^\kappa}{k!} e^{-\lambda_c t} \qquad (3.2.41)$$

Освен това за възстановимите системи може да се разчетат средното време за възстановяване на системата $\bar{T}_в$ и коефициентът на готовност.

4.2. Основни разчетни съотношения при паралелно съединяване на елементите

Паралелно съединение на елементите се нарича такава тяхна съвкупност, при която отказ на системата настъпва само след отказа на последния от елементите, влизащ в съвкупността.

Нека системата се състои от няколко различни по показатели на надеждността елементи, но способни да изпълняват едни и същи функции, при което интензивността на отказите им не зависи от времето, т. е. те са независими.

В съответствие с тези условия системата може да се представи за разчитане във вида, даден на фиг. 3.2.5. В дадения случай е удобно най-напред да разгледаме отказа на системата като сложно събитие, равно на произведението от събитията, които се заключават в отказ на всеки елемент.

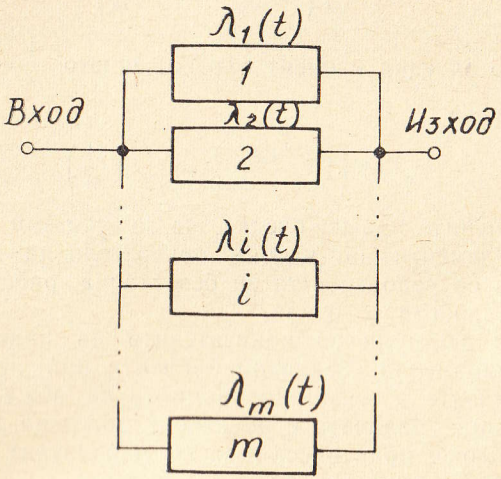
Вероятността за отказ на системата очевидно е

$$Q_c(t) = \prod_{i=1}^{m} Q_i(t), \qquad (2.3.42)$$

където $Q_i(t)$ е вероятността за отказ на i-тия елемент. Следователно вероятността за безотказна работа е

$$P_c(t) = 1 - \prod_{i=1}^{m}\left(1 - e^{-\lambda i t}\right). \qquad (3.2.43)$$

Ясно се вижда, че за разлика от последователното съединение в дадения случай вероятността за бозотказна работа на системата се увеличава при увеличаване на броя на елементите.



Фиг. 3.2.5

Необходимо е да се отбележи важната особеност на паралелното съединение на елементите. Времето за работа на системата до отказ не се подчинява на експоненциалния закон, въпреки че за елементите той е валиден. Разчетът на средната работа до отказ и на интензивността на отказите на системата при паралелно съединяване на елементите е достатъчно сложен, обаче, ако интензивността на отказите на елементите не зависи от времето, този показател на надеждността винаги може да се получи в краен вид.

Интересен е частният случай на m равнонадеждни елементи с интензивност на отказите на всеки λ. Вероятността за безотказна работа на системата тогава е

$$P_c(t) = 1 - \left(1 - e^{-\lambda t}\right)^m, \qquad (3.2.44)$$

а средната работа до отказ

$$\overline{T}_c = \int_0^t P_c(t)\,dt = \int_0^\infty \left[1 - \left(1 - e^{-\lambda t}\right)^m\right] dt. \qquad (3.2.45)$$

След преобразуване се получава окончателно

$$\overline{T}_c = \frac{1}{\lambda}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{m}\right). \qquad (3.2.46)$$

Тъй като за един елемент съотношението $\frac{1}{\lambda} = \overline{T}$ е справедливо, тогава

$$\overline{T}_c = \overline{T}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{m}\right). \qquad (3.2.47)$$

От получените изрази следва, че за системи с паралелно съединени елементи най-удобни показатели на надеждността при разчети са вероятността за безотказна работа и средното време за работа до отказ.

Разчетни формули за показателите на надеждността на системи с паралелно съединени елементи при произволни потоци на отказите и възстановяванията не може да се получат в общ вид. Задачата е решена и доведена до съотношения, които може практически да се използуват при разчети само в някои частни случаи.

Глава трета

ТЕОРИЯ НА МАСОВОТО ОБСЛУЖВАНЕ

При анализиране и изследване на бойните действия все по-често се прилагат статистико-вероятностни методи. Оценката на тактическите методи при взаимодействие на различните родове войски, ефективното използуване на новите видове оръжие и бойна техника, надеждната работа на спомагателната техника и закономерностите на бойните действия поставиха редица нови проблеми и задачи пред военната наука. Характерна тяхна особеност е, че ролята на случайните фактори е голяма. За решаването им се използуват идеите и методите на теорията на вероятностите и по-специално на някои нейни клонове: теория на случайните процеси, теория на запасите, теория на надеждността, теория на масовото обслужване.

Теорията на масовото обслужване е вероятностна математическа наука, която разработва количествените методи за изследване на моделите на реално съществуващите системи за обслужване. Първите работи в това отношение са публикувани в началото на нашия век от датския математик Ерланг. Той изследва проектирането и експлоатацията на телефонните станции с помощта на теорията на случайните процеси. Шведският математик Пол изучава аналогични проблеми в други области.

Основна роля за оформяне и развитие на теорията на масовото обслужване изиграва съветският математик А. Я. Хинчин. В своята монография „Математические методы теорий масового обслуживания“ той формулира нейните основни идеи, понятия и методи. Този труд дава силен тласък за многобройни изследвания, за възникване на нови проблеми, за значително разширяване на приложението им в почти всички области на човешката дейност.

В настоящия момент в областта на теорията и практиката на масовото обслужване работят учени от много страни в света.

1. ПРЕДМЕТ НА ТЕОРИЯТА НА МАСОВОТО ОБСЛУЖВАНЕ

Във всички области на човешката дейност възникват ситуации, при които трябва да се задоволяват многобройни еднакви или аналогични нужди чрез ограничен брой средства. Особено често такива случаи има във военното дело — работата на автоматичните телефонни централи, ремонта на бойната и спомагателната техника, форсирането на водни прегради, бойната дейност на групировка от зенитни комплекси, прикриващи даден обект или зона, дегазацията и дезактивацията на войските и много други.

Многобройни са случаите и в търговията, комунално-битовото обслужване и производството — обслужването в търговските магазини, храненето в столовете и ресторантите, пътуването по градския и междуградския транспорт, обработването на детайли от еднотипни машини или от група машини и други.

При всеки от изброените случаи е необходимо да се задоволи някаква специфична нужда (потребност). Качественото задоволяване на тези потребности е една от най-важните страни на обслужването. Тази дейност се изучава от редица науки, както и чрез анализ на практическата дейност на обслужващите организации.

Очевидно е, че по реалното си съдържание изброените явления се различават, но имат и обща страна, която е обект на изследване от теорията на масовото обслужване.

При всяка от тези ситуации непрекъснато или през случайни интервали от време с помощта на ограничен брой средства се задоволяват някакви еднообразни специфични потребности, т. е. обслужват се еднородни заявки. Ако заявките се появяват през равни интервали от време, обслужването е по-леко, но обикновено те постъпват през различни (случайни) интервали, и то една или няколко наведнъж, като се образуват местни сгъстявания или разреждания. В първия случай обслужването се затруднява и някои заявки трябва да изчакат или да напуснат необслужени системата, т. е. системата ще се претовари. Във втория случай някои от обслужващите прибори бездействуват поради липса на заявки. От друга страна, обслужването на постъпилата заявка продължава известно време, след което тя напуска системата и обслужващият прибор се освобождава и може да обслужва следващата заявка. Времето за обслужване може да е едно и също (стандартно) за всички заявки, или, както е в повечето случаи, да се изменя от една към друга. Така че основна черта на всички изброени ситуации е влиянието на случайността при функционирането на системите за масово обслужване. Следователно, за да се изучи процесът на обслужване, т. е. работата на една конкретна обслужваща система, необходимо е да се определят характеристиките на потока от заявки на обслужващите прибори и на начина на обслужване. Математическият модел на работата на обслужващата система е случаен процес.

Тези разсъждения позволяват по-ясно да се формулират предметът, целта и задачите на теорията на масовото обслужване. Под обслужване (в широкия смисъл на думата) се разбира функционирането на система от апарати (прибори), които задоволяват масови еднородни нужди (заявки).

Предмет на теорията на масовото обслужване е количествената страна на процесите, свързани с организацията и работата на системите за масово обслужване. Целта ѝ е да се построят математически модели на процесите на обслужване, да се определят и оценят характеристиките на обслужващата система при нейното оптимално функциониране.

Следователно при всяка задача от теорията на масовото обслужване трябва да се установят оптималният брой на обслужващите прибори, техният вид и характеристики така, че при даден входящ поток системата да изпълнява точно поставените ѝ задачи.

Всяка задача за обслужване е решена, ако са определени количествените характеристики на оптималното функциониране на обслужващата система като функция на характеристиките на входящия поток, структурата на системата и изходящия поток.

2. ИЗПОЛЗУВАНЕ НА ТЕОРИЯТА НА МАСОВОТО ОБСЛУЖВАНЕ ВЪВ ВОЕННОТО ДЕЛО

Методите на масовото обслужване намират изключително широко приложение в различните области на военното дело. В настоящия момент основните направления за приложението са свързани със:

— организирането на всевъзможните военни системи за обслужване, като се търси оптимална система за всеки конкретен случай;

— организацията на управлението на силите в боя;

— математическото моделиране на бойните действия.

Нека разгледаме накратко всяко от тези направления.

Задачи, свързани с организиране на системите за обслужване с цел да се построи оптимална система. Към тях се отнасят способите за организиране на обслужването на бойната техника, построяването на системите на ремонтните работилници и системата за медицинското обслужване при бойни условия, планирането на бойните действия.

Пример 1. Да разгледаме ремонта на повредените танкове. Процесът на техния ремонт е обслужващата система, а всяка повредена машина е заявката за обслужване. Потокът от заявки се състои от танкове, които се нуждаят от текущ, среден и капитален ремонт. В някои случаи всички заявки може да се разглеждат като равноправни, но в други най-напред се извършва текущият ремонт, след това средният и накрая капиталният. В първия случай имаме обслужване без предимство, а във втория — с предимство. Полевата ремонтна работилница е обслужващата система, която обикновено е няколкоканална. Времето за обслужване (ремонтиране) зависи от повредата и поради това е различно. Затова в някои моменти броят на повредените машини може да е по-голям от броя на ремонтните линии (работници) и някои машини трябва да изчакат началото на обслужването, т. е. системата е с изчакване.

Пример 2. Да разгледаме система от зенитни комплекси, които обстрелват и поразяват противниковите самолети и ракети. Входящият поток се състои от ракетите и самолетите на противника, които прелитат през зоната на обстрелване. И тук обслужването е с предимство (ракетите се обстрелват преди самолетите). За разлика от първия случай, ако броят на заявките (ракети и самолети) е по-голям от броя на зенитните комплекси, някои от тях няма да бъдат обстреляни при преминаването им през зоната на отбраната, т. е. системата е с откази.

При количественото изучаване на такива процеси възникват редица особено интересни въпроси с важно практическо и теоретично значение. Например как да организираме отбранителната система така, че при дадени качества на отделната зенитна установка да се получи най-голяма защитеност на охранявания обект. Тези характеристики се получават чрез методите на теорията на масовото обслужване.

Задачи, свързани с организиране на управлението на силите в боя. Към тях се отнасят проблемите, свързани с организиране на системите за обработване на информациите. Ако заявка за обслужване е появяването на едни или други сили на противника, а обслужването е нанасяне на съответен удар по тях, възникват ситуации от типа на масовото обслужване. Обслужващата система в този случай са нашите сили. При този научен подход може да се получат известни успехи в количественото описание на боя въз основа на идеите и с помощта на методите на масовото обслужване.

Пример 3. Да разгледаме поразяването на маневриращи цели, ако нападащата страна има два вида въоръжение с различни тактико-технически данни. За обстрелването на целите е необходимо различно време, а ефективността на двата вида въоръжение е различна. Потокът от заявки в този случай са откритите от разузнаването цели. Ефективността на двата вида въоръжение за поразяването им и необходимото количество от всеки вид въоръжение, за да може нападащата страна да има превъзходство над противника, може да се определят с методите на теорията на масовото обслужване.

Задачи, свързани с използуването на методите на теорията на масовото обслужване при математическото моделиране на процесите на бойните действия. Различните тактически методи при използуването на новите видове оръжия и бойната техника, при взаимодействието на разнородните сили и при прилагането на закономерностите на процесите на бойните действия може да се оценят чрез моделирането им въз основа на идеите и методите на теорията на масовото обслужване.

Този кратък и непълен списък на задачите, свързани с използуването на бойната техника, организацията на спомагателните органи, управлението на силите в боя и моделирането на бойните действия, показва, че областта на приложение на методите на теорията на масовото обслужване във военното дело е доста обширна. Поради това изучаването ѝ допринася несъмнена полза на военните специалисти.

3. ВХОДЯЩ ПОТОК ОТ ЗАЯВКИ

3.1. Определения

3.1.1. Основни понятия

Изследването на процесите на обслужването обикновено започва с изучаване на характера на заявките, които постъпват за обслужване. Преди да разгледаме по-подробно този характер, нека дадем някои важни и основни определения.

Обслужване на заявки се нарича всяко задоволяване на някакви потребности, независимо от физическия им характер. Например обстрелването на противникови танкове, ремонтирането на повредени автомобили и танкове, снабдяването на батарии със снаряди, дезактивацията на личен състав и други са обслужване. То може да бъде както в полза, така и във вреда на заявката (клиентите). Това по-общо тълкуване е особено резултатно при прилагане на теорията на масовото обслужване във военното дело.

Заявка за обслужване се нарича всяка необходимост от задоволяване на специфична нужда. Освен заявка се използуват и термините: клиент, повикване, искане, поръчка и други. Тук винаги е използуван терминът заявка.

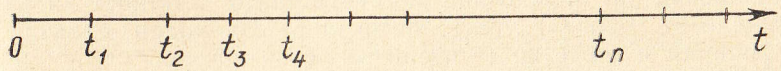
Повреждането на танк например предизвиква необходимост от ремонтирането му. Следователно всяка повреда е заявка за обслужване, независимо какъв характер има тя.

Входящ поток от заявки се нарича съвкупността от всички заявки, постъпващи за обслужване в системата. Така например всички танкове и автомобили, получили някаква повреда и постъпващи за ремонт в полевата работилница, образуват входящ поток от заявки. Ако моментите на постъпването им са напълно определени, интервалите между две последователни заявки не са случайни числа, а са известни предварително, този поток се нарича детерминиран. В частен случай, когато интервалите между последователните заявки са равни, детерминираният поток се нарича постоянен. Такива потоци се срещат рядко в практиката.

Типичен за теорията на масовото обслужване е случайният поток от заявки, т. е. поток, при който интервалите между моментите на постъпването им са случайни величини.

3.1.2. Задаване на поток от заявки

Най-простата схема за входящия поток на една система за масово обслужване е: всеки източник на заявки постоянно или през случайни интервали поражда заявки, а сумарната редица от всички индивидуални заявки образува входящия поток. Следователно входящият поток е вероятно-



Фиг. 3.3.1

стен процес, който във всички известни случаи е поток от събития, които постъпват през случайни интервали при непрекъснато отчитане на времето.

Поток от събития се нарича редица от събития, които постъпват едно след друго в произволни моменти. Те може да са еднородни (еднотипни) или неедноредни. Например потокът от автомобили, които се зареждат на една бензиностанция, е еднороден, ако не се разграничават по марки (или по вида на горивото, с което се зареждат), и неедноредни, ако се разграничават. При еднородните потоци събитията се различават само по моментите на постъпване. В този случай потокът може да се изобрази графично като съвкупност от точки $t_1, t_2, \ldots, t_n$ върху числовата ос (фиг. 3.3.1).

С t_n се означава моментът на постъпване на n-тата по ред заявка.

Входящият поток е зададен, ако е известен законът за разпределение на моментите на постъпване на заявките, т. е. за произволни стойности x_1, x_2, x_k и за всяко k е известна функцията

$$f(x_1 x_2, \ldots, x_k) = P(t_1 < x_1, t_2 < x_2, \ldots, t_k < x_k),$$

където t_i е моментът на постъпване на i-тата заявка.

Съществуват два начина за задаване на този закон за разпределение. При първия се разглеждат произволни интервали (t_0, t_0+h) и се определят вероятностите в тях да постъпят k заявки. Очевидно е, че те зависят от големината на интервала h, от местоположението му върху временната ос, т. е. от t_0, и от броя на заявките k. Ако има начин за определяне на вероятностите $P_k(t_0, h)$ за всяко цяло неотрицателно k и за произволни положителни t_0 и h, потокът от

случайни събития е дефиниран и може да се изследва вероятностно.

При втория начин се разглеждат интервалите между моментите на постъпване на две последователни заявки Z_i. Очевидно е, че

$$Z_i = t_i - t_{i-1};\ Z_1 = t_1,$$

където t_i е моментът на постъпване на i-тата заявка. Ако за всяко цяло положително k и произволни $Z_1, Z_2, \ldots, Z_k$ съществува начин за определяне на съвместната плътност на разпределение $f(Z_1, Z_2, \ldots, Z_k)$, потокът от еднородни събития е дефиниран и може да се изследва вероятностно.

Както се вижда, теоретичното описване на входящия поток от заявки в най-общия случай е сложно, независимо по кой от начините се работи. От друга страна, входящите потоци при практическите задачи често притежават свойства, които облекчават изучаването им.

3.1.3. Интензивност и параметър на потока

Да означим с $\Pi_1(t_0,t)$ вероятността за постъпване в интервала (t_0,t) поне на една заявка, т.е.

$$\Pi_1(t_0,t) = \sum_{k=1}^{\infty} P_k(t_0,t) = 1 - P_0(t_0,t).$$

Параметър на потока λ в момента t_0 се нарича границата на отношението $\frac{\Pi_1(t_0,t)}{t}$ (ако тази граница съществува), когато t клони към нула, т. е.

$$\lambda(t_0) = \lim_{t \to 0} \frac{\Pi_1(t_0,t)}{t}.$$

Интензивност на потока μ се нарича средният брой заявки, които постъпват в системата за единица време.

Очевидно интензивността на потока се определя по формулата

$$\mu(t_0) = \sum_{i=1}^{\infty} i P_i(t_0,t).$$

Може да се докаже, че за стационарен поток параметърът и интензивността на потока не зависят от t_0. При това е вярно неравенството

$$\mu \geq \lambda.$$

При най-простия поток (3.3) параметърът и интензивността на потока съвпадат, т.е.

$$\mu = \lambda.$$

3.2. Видове потоци от заявки

3.2.1. Стационарни входящи потоци

Потокът от заявки се нарича стационарен, ако вероятността $P_k(t_0,t)$ в интервала t_0, t_0+t да постъпят k заявки е една и съща за всяко t_0, т.е. зависи само от дължината на интервала t и броя на заявките k, а не от това, къде именно върху числовата ос е разположен този участък. Ще означаваме вероятността с $P_k(t)$ вместо с $P_k(t_0,t)$.

Стационарните входящи потоци от заявки имат вероятностни характеристики, които не зависят от времето. По-специално стационарните потоци имат постоянен среден брой на заявките за единица време, т. е. имат постоянна интензивност.

На практика много входящи потоци от заявки може да се смятат стационарни поне в ограничен участък от време. Но за опростяване на анализа може да се считат с известно приближение за стационарни по време на целия процес с евентуално изключение в началото на обслужването. Например поток от поръчки на телефонната станция, откриването на противникови цели и други с приближение може да се разгледат като стационарни.

3.2.2. Ординарни входящи потоци

Потокът от заявки се нарича ординарен, ако вероятността

$$P_{>1}(t_0,t) = \sum_{k=1}^{\infty} P_k(t_0,t)$$

при всяко t_0 клонящо към нула, когато дължината на интервала t също клони към нула, да попаднат две и повече заявки в участък с малка дължина е много по-малка от вероятността в него да попадне точно една заявка, т. е.

$$P_{>1}(t_0,t) \ll P_1(t_0,t).$$

Тъй като за всеки интервал t имаме

$$P_0(t_0,t) + P_1(t_0,t) + P_{>1}(t_0,t) = 1,$$

за ординарен поток са верни съотношенията

$$P_0(t_0,t) + P_1(t_0,t) \approx 1,$$

и

$$P_{>1}(t_0,t)\approx 0,$$

т. е. поток от заявки се нарича ординарен, ако при всяко постоянно $t_0 \geq 0$ вероятността $P_{>1}(t_0,t)$ клони към нула по-бързо от t, т.е.

$$\lim_{t\to 0} \frac{P_{>1}(t_0,t)}{t} = 0.$$

С други думи, ординарността на потока характеризира практическата независимост на съвместното постъпване на две и повече заявки в един и същ момент.

Например потокът на атаките на въздушна цел е ординарен, ако изтребителите атакуват целта поединично. Потокът от машини, пресичащи дадена линия на шосето (например началото на мост), е ординарен. Потокът от купувачи в магазин също е ординарен.

Неординарните потоци се срещат по-рядко. Ако в тях заявките постъпват само по двойки или само по тройки, лесно се свеждат към ординарните, но ако броят на заявките е случаен, това е по-трудно. Съществуват методи, които позволяват да се свеждат неординарните потоци към ординарни, но те тук не са разгледани.

3.2.3. Потоци от заявки без последствия

(Марковски потоци)

Както вече беше отбелязано, в общия случай разпределението на вероятностите за броя на заявките в интервала t_0,t_0+t зависи от t_0. Оказва се обаче, че вероятността $P_к(t_0,t)$ може да зависи още и от това, какъв ще е потокът до момента t_0. С други думи, бъдещото протичане на процеса във вероятностен смисъл може или да зависи от миналото му развитие, или да не зависи от него. Ако тази зависимост липсва, потокът е без последствие (Марковски). Следователно потокът от заявки се нарича поток без последствие, ако условната вероятност за постъпване на k събития в интервала t_0, t_0+t, пресметната при произволно предположение за броя им до този момент, е равна на безусловната, т. е. не зависи от постъпването на заявките до този момент.

С други думи, протичането на потока без последствия в интервала (t_0,t) не влияе върху протичането му в интервала (t_0',t'), ако тези нтервали не се пресичат.

Например потокът от поръчки за телефонни разговори е без последствие, понеже техните причини не са свързани и поръчките се дават независимо една от друга. Обаче условието за липса на последствия може лесно да се наруши поради появяването на някаква зависимост (например интересно събитие, което може да доведе до много телефонни разговори).

Накрая да отбележим, че за поток без последствие интервалите Z_i между две последователни заявки са взаимно независими в съвкупност случайни величини. Обратното обаче не е вярно. От това, че величините Z_i са взаимно независими в съвкупност, не следва, че потокът е без последствие. Следователно тяхната взаимна независимост в съвкупност действително ограничава последействието, но не го изключва.

3.2.4. Потоци с ограничено последействие

(Потоци на Палм)

Да означим с $t_1,t_2,\ldots,t_n,\ldots$, моментите, в които заявките постъпват в системата, а с

$$Z_i = t_i - t_{i-1},\ t \geq 2,\ Z_1 = t_1$$

интервалите между две последователни заявки.

Потокът от заявки се нарича поток с ограничено последействие, ако случайните величини $Z_1,Z_2,\ldots,Z_k$ са взаимно независими в съвкупност.

Вероятностното описване на такъв поток се опростява значително. За задаването му са достатъчни само функциите

$$A_к(t) = P\{Z_к \leq t\},\ k \geq 1,$$

където $P\{Z_к \leq t\}$ е вероятността интервалът $Z_к$ да е по-малък от t.

Потокът с ограничено последействие, за който

$$A_2(t) = A_3(t) = \ldots = A_к(t) = A(t),$$

т. е. интервалите (с изключение на първия) имат едно и също разпределение на вероятностите, се нарича рекурентен със закъснение. Определя се чрез функциите $A_1(t)$ и $A(t)$. Ако освен това $A_1(t) = A(t)$, казва се рекурентен поток.

Примери.

Група танкове се движи в боен ред „колона“ с еднаква скорост V. Всяка машина (без водещата) поддържа дадено разстояние R до предната. Поради грешки в измерването

това разстояние е различно. Моментите на пресичането на някакъв мост от танковете образуват поток с ограничено последействие, тъй като случайните величини $x_i = \frac{R_i}{V}$ са независими. Ако обаче разстоянието се отчита от водещата машина, потокът не е с ограничено последействие, а с посилно изразена зависимост между моментите на постъпване.

Потокът от пътници, заминаващи от ЖП станция, има последействие, защото тяхното пристигане на гарата е свързано с моментите на тръгването на влаковете.

Изобщо изходящият поток обикновено има последействие, дори ако входящият поток няма такова. Това е така, защото върху моментите на напускане на системата влияе времетраенето на обслужването, а не само моментът на постъпване на заявката. Тези закономерности трябва да се имат пред вид, когато изходящият поток е входящ на друга обслужваща система.

3.2.5. Постоянни потоци от заявки

Потокът от заявки се нарича постоянен, ако интервалите между две последователни заявки са равни помежду си, т. е. те са постоянни.

Тези потоци се използуват на практика сравнително рядко. При тях съществува много голямо (неограничено) последействие, защото, като се знае само една заявка, може да се възстанови цялото минало на процеса и да се покаже неговото бъдещо развитие.

За илюстрация да разгледаме следния пример. Нека автоматичен прибор всеки три минути предава съобщение. Ако знаем, че в осем часа и седемнадесет минути е предадено съобщение, сигурни сме, че в осем часа и четиринадесет минути е имало съобщение и в осем часа и двадесет минути също ще се появи съобщение.

3.2.6. Нормални потоци от заявки

Потокът от заявки се нарича нормален, ако е поток на Палм и интервалите между заявките са разпределени по един и същ нормален закон с плътност

$$f(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_z} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{Z-m_z}{\sigma_z}\right)^2\right\} \text{ при} Z>0.$$

Разбира се, интервалите между заявките може да са само положителни числа и следователно имат отсечено нормално

разпределение. Ако се изпълнява условието $m_z > 4\sigma_z$, може да се смята, че интервалите са разпределени нормално, тъй като практически възможните стойности, които може да приема случайната величина, са положителни.

3.2.7. Поасоновски потоци от заявки

Потоците от заявки се наричат поасоновски, ако са ординарни без последействие. Те играят изключително важна роля и имат свойства, които значително облекчават решението на много системи за масово обслужване.

При тях заявките постъпват единично и протичането на потока до даден момент не влияе върху бъдещото му протичане.

Нека с $P_к(t_0,h)$ означим вероятността в интервал с начало t_0 и дължина h да постъпят k заявки. Тогава може да се докаже, че

$$P_к(t_0,h) = \frac{[\lambda(t_0,h)]^k}{k!} \exp\left\{-\lambda(t_0,h)\right\},$$

където $\lambda(t_0,h)$ е средният брой на заявките, които постъпват в интервала (t_0, t_0+h).

Средният брой на заявките, които постъпват за единица време, за всеки ординарен поток е равен на интензивността на потока $\mu(t)$. Следователно средният брой на заявките, постъпващи в интервала (t_0, t_0+h), е

$$\lambda(t_0,h) = \int_{t_0}^{t_0+h} \mu(t)dt.$$

3.3. Най-прост поток. Ерлангов поток

3.3.1. Най-прост поток от заявки

Най-прост поток от заявки (еднородни събития) се нарича всеки стационарен ординарен поток без последействие, т. е. всеки стационарен поасоновски поток. Това наименование му е дадено, понеже при неговото използуване се получават най-прости решения.

Простият поток играе в теорията на масовото обслужване изключително важна роля не само защото е първият изучен поток, но главно и поради факта, че много реални явления

в първо приближение може да се апроксимират с негова помощ. Действително предположението за стационарност на потока в реална обстановка е доста силно ограничение. Обаче ако се разгледат явленията в сравнително ограничени интервали, то достатъчно добре се оправдава. Предположението за липса на последействие в реална обстановка е трудно осъществимо, защото появяването на една заявка често предизвиква верижна реакция. Ако е огромен броят на заявките, влиянието на тази верига е нищожно и може да се пренебрегне. Така един телефонен разговор може да породи десетина други, но тъй като техният брой е от реда на хилядите, това няма да окаже съществено влияние върху работата на станцията. Предположението за ординарност на потока не винаги се реализира в действителност, но независимо от това може да служи за отправен пункт при изучаването на реалните потоци.

В най-простия поток интервалите между две последователни заявки имат показателно разпределение. За да докажем това, нека разгледаме интервал с дължина единица и означим с θ вероятността в него да не постъпи заявка, т.е.

$$\theta = P_0(1).$$

Разделяме интервала на n равни части. За да не постъпи заявка в целия интервал, необходимо и достатъчно е да не постъпи заявка в нито един от подинтервалите. Но потокът е стационарен без последействие. Следователно

$$\theta = P_0(1) = \prod_{i=1}^{n} P_0\left(\frac{1}{n}\right) = \left[P_0\left(\frac{1}{n}\right)\right]^n,$$

откъдето

$$P_0\left(\frac{1}{n}\right) = \theta^{\frac{1}{n}}.$$

Вероятността, че в интервал с дължина $\frac{k}{n}$ няма да постъпи заявка, е равна на $\theta^{\frac{k}{n}}$, т. е.

$$P_0\left(\frac{k}{n}\right) = \theta^{\frac{k}{n}}.$$

Ако t е неотрицателно число, то има такива значения, че при всяко n

$$\frac{k-1}{n} \leq t \leq \frac{k}{n}.$$

Поради монотонното намаляване на функцията $P_0(t)$ имаме

$$P_0\left(\frac{k-1}{n}\right) \geq P_0(t) \geq P_0\left(\frac{k}{n}\right)$$

или

$$0 \leq P_0(t) = \theta^t \leq 1.$$

Следователно

$$0 \leq P_0(t) = \theta^t \leq 1.$$

За числото θ има три възможности: $\theta = 0$, $\theta = 1$ и $0 < \theta < 1$. Ако $\theta = 0$, във всеки интервал (с произволна дължина) се получават безбройно много заявки. Ако $\theta = 1$, няма никакъв поток от заявки. Затова първите два случая не представляват особен интерес.

Интересен е третият случай, когато $0 < \theta < 1$. Означаваме $\theta = e^{-\lambda}$. Тогава намираме, че за всеки стационарен поток без последействие вероятността $P_0(t)$ в интервал с дължина t да не постъпи нито една заявка се дава от формулата

$$P_0(t) = e^{-\lambda t}, \quad t > 0.$$

Основната задача се състои в определяне на вероятностите $P_k(t)$ за постъпване на k заявки в интервал с дължина t. За определеност ще смятаме, че разглежданият интервал е $(0,t)$, макар че поради стационарността на процеса това може да е който и да е интервал (t_0, t_0+t).

Най-напред ще докажем, че

$$P_1(h) = \lambda h + 0(h),$$

където λ е постоянно число, а $0(h)$ е безкрайно малка величина с ред, по-висок от h.

За интервал с продължителност t имаме

$$P_0(t) + P_1(t) + P_{>1}(t) = 1.$$

Но понеже потокът е ординарен,

$$P_{>1}(t) = \sum_{i=2}^{\infty} P_i(t) = 0(t).$$

От друга страна,

$$P_0(t)=e^{-\lambda t}=1-\lambda t+0(t),$$

откъдето окончателно намираме

$$P_1(t)=1-P_0(t)-0(t)=\lambda t+0(t).$$

Да определим вероятността $P_k(t)$ в интервал с дължина t да постъпят k заявки. Преди всичко да разгледаме събитието в интервал с дължина $t+h$ да постъпят k заявки. Това може да стане по следните несъвместими начини:

1. В интервала t постъпват k заявки, а в интервала h — нито една.

2. В интервала t постъпват $k-1$ заявки, а в интервала h — една.

3. В интервала t не е постъпила нито една заявка, а в интервала h — всички k заявки.

По формулата за пълната вероятност имаме

$$P_k(t+h)=\sum_{i=0}^{k}P_i(t)P_{k-i}(h)=$$

$$=P_k(t).P_0(h)+P_{k-1}(t)P_1(h)+\sum_{i=0}^{k=2}P_i(t)P_{k-i}(h). \qquad (3.3.1)$$

Поради ординарността на потока и предварителните пресмятания

$$\sum_{i=0}^{k-2}P_i(t)P_{k-i}(h)\leq\sum_{i=0}^{k-2}P_{k-i}(h)=0(h).$$

$$P_1(h)=\lambda h+0(h);$$
$$P_0(h)=1-\lambda h+0(h);$$

Затова равенство (3.3.1) приема вида

$$P_k(t+h)=P_k(t)\left[1-\lambda h+0(h)\right]+P_{k-1}(t)\left[\lambda h+0(h)\right]+0(h).$$

Оттук следва, че

$$\frac{P_k(t+h)-P_k(t)}{h}=-\lambda P_k(t)+\lambda P_{k+1}(t)+0(1).$$

Оставяме $h\to 0$ и получаваме уравненията

$$P_k(t)=-\lambda P_k(t)+\lambda P_{k-1}(t). \qquad (3.3.2)$$

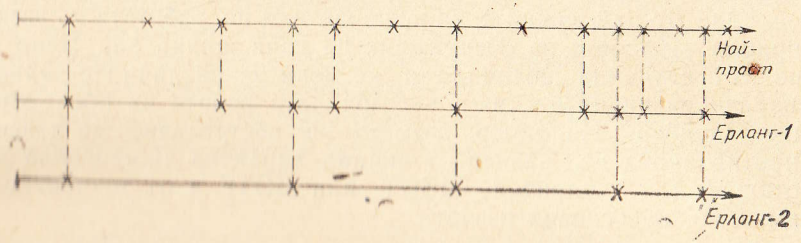
По такъв начин за определяне на вероятностите $P_k(t)$ се получава безкрайна система от уравнения (3.3.2).

От друга страна, понеже $P_0(t)=e^{-\lambda t}$, чрез последователна замяна получаваме

$$P_k(t)=\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}.$$

3.3.2. Поток на Ерланг

Потоците на Ерланг се получават чрез разреждане на най-простия поток, т.е. чрез изхвърляне (пренебрегване) на някои събития. Нека изобразим графично моментите на постъпване на заявките в най-простия поток (фиг. 3.3.2).



Фиг. 3.3.2

Ако в този поток пренебрегнем всяко второ събитие, останалите образуват нов поток, наречен поток на Ерланг от първи ред, който има други характеристики. Ако пренебрегнем по две последователни събития, получаваме поток на Ерланг от втори ред и т.н.

Поток от заявки се нарича поток на Ерланг от k-ти ред, ако е поток на Палм, в който интервалите между две заявки са сума от $k+1$ независими случайни величини, показателно разпределени с параметър λ. Очевидно при потоците на Ерланг от k-ти ред разделението на интервала между две заявки има плътност

$$f_k(t)=\frac{\lambda(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t};(t>0).$$

Лесно се вижда, че интензивността на потока на Ерланг от k-ти ред λ_k се намалява $k+1$ пъти в сравнение с интензивността на първоначалния прост поток, т.е.

$$\lambda_k=\frac{\lambda}{k+1}.$$

Често се разглеждат преобразования на най-простия поток, при които потокът не само се разрежда, но се и „свива“ така, че интензивностите на първоначалния и получения поток да са равни. Такъв поток се нарича нормиран поток на Ерданг от k-ти ред.

Разгледаните видове потоци намират най-голямо приложение в теорията на масовото обслужване. Освен тях може да има и други потоци, но на тях няма да се спираме.

4. ВРЕМЕ ЗА ОБСЛУЖВАНЕ

Освен от характеристиките на входящия поток процесът на обслужване зависи и от характеристиките на обслужващата система, броя на приборите n и производителността на всеки от тях.

Една от най-важните характеристики на работата на всеки прибор е времето за обслужване на една заявка $t_{обс}$. Ясно е, че то е случайна величина и се мени за различните заявки поради различията в тях и нестабилната работа на обслужващия прибор. Например времето за обстрелване на дадена противникова цел зависи от нейния характер (жива сила на открито или в укрития, ДЗОТ или ДОТ) и от точността и умението на огневия разчет.

Параметърът на обслужването μ се нарича пропускателна способност на обслужващия прибор. Изобщо под абсолютна пропускателна способност на обслужващия прибор се разбира средният брой заявки, които приборът обслужва за единица време. Лесно се установява, че тя е равна на реципрочната стойност на средното време за обслужване $\left(\mu=\frac{1}{t_{обс}}\right)$.

Да означим времето за обслужване с γ. Тогава функцията за разпределението му

$$F(t)=P\left\{\gamma<t\right\}. \quad (t\geq 0),$$

определя напълно тази величина.

Законът за разпределението на времето за обслужване се определя статистически и може да има най-различен вид. Достатъчно е функцията $F(t)$ да е монотонна, растяща и да приема стойности в интервала $(0,1)$.

Нека номерираме заявките по реда на постъпването им в системата и означим с $S_к$ времето за обслужване на k-тата

заявка. Предполагаме, че то не зависи от характера на входящия поток. Обслужването е зададено, ако за всяко $n\geq 1$ знаем разпределението на редицата случайни величини S_1, $S_2,\ldots,S_к$.

Най-голямо теоретично и практическо значение има случаят, когато случайните величини $S_1,S_2,\ldots,S_к$ са взаимно независими в съвкупност и имат една и съща функция на разпределение.

Обслужването също може да има разпределения, аналогични на входящите потоци от заявки. Обикновено обаче се изследват системи, при които то е поток на Палм, а най-често се предполага, че времето за обслужване има експоненциално или ерлангово разпределение. Съществуват както стационарни, така и нестационарни разпределения.

Експоненциалното обслужване има още едно важно свойство. При показателния закон за разпределение на времето за обслужване оставащата част от него не зависи от това, колко вече е продължило обслужването.

Да означим с $R_a(t)$ вероятността на обслужването, което не е завършило до момента и ще продължи най-малко още време t. Тогава

$$P_0(t)=P\left\{S_к>t\right\}=1-P\left\{S_к\leq t\right\}=1-P_к(t)=e^{-\mu t}.$$

$$P_0(a+t)=1-R_к(a+t)=e^{-\mu(a+t)}.$$

От друга страна, по формулата за умножение на вероятностите имаме

$$R_0(a+t)=R_0(a)R_a(t).$$

Това означава, че вероятността обслужването да продължи повече от $a+t$ е равна на произведението от вероятността то да завърши след момента a и условната вероятност, че ще завърши след момента t при условие, че е продължило вече време a. Поради това имаме

$$R_a(t)=\frac{R_0(a+t)}{R_0(a)}=\frac{e^{-\mu(a+t)}}{e^{-\mu a}}=e^{-\mu t}=R_0(t),$$

т. е.

$$R_a(t)=R_0(t).$$

За илюстрация да разгледаме пример, взаимствуван от Б.В.Гнеденко. Нека имаме някаква система за обслужване. В момента на постъпване на поредната заявка веднага започват да я обслужват всички свободни апарати, при което всеки действува независимо от другите. Обслужването приключва, щом завърши освобождаването на един прибор.

Пример на система с такава организация на обслужването е обстрелването на цел от група установки (стрелба на зенитни оръдия по противников самолет, нападение от няколко самолета по обект на противника и други).

Законът за разпределение на времето за обслужване за всеки прибор е показателен с пропускателна способност съответно $\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_n$. Ако γ_i е времето за обслужване на i-тия прибор, вероятността общото време за обслужване да е по-голямо от t е

$$P\left\{\gamma>t\right\}=P\left\{\min(\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_n)>t\right\},$$

понеже обслужването ще приключи, ако един от приборите го завърши. Тъй като $\gamma_1,\gamma_2\ldots,\gamma_n$ не зависят една от друга, по теоремата за умножение на вероятностите имаме

$$P\left\{\min(\gamma_1,\gamma_2,\ldots\gamma_n)>t\right\}=P\left\{\gamma_1>t_1;\gamma_2>t_2,\ldots\gamma_n>t\right\}=\prod_{i=1}^{n}P(\gamma_1>t).$$

Но законът за разпределение на времето за обслужване γ_i е показателен и следователно

$$P\left\{\gamma_i>t\right\}=1-\bar{f}\,(t)=e^{-\mu_i t},\quad i=1,2,\ldots,n.$$

Оттук намираме

$$P\left\{\gamma>t\right\}=P\left\{\gamma_1>t\right\}P\left\{\gamma_2>t\right\}\ldots P\left\{\gamma_n>t\right\}=e^{-(\mu_1+\mu_2+\mu_n)t},$$

т.е.

$$P\left\{\gamma>t\right\}=e^{-\beta t},$$

където

$$\beta=\mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_n.$$

Следователно законът за разпределение на времето за обслужване за цялата система е показателен. При това пропускателната способност на системата е равна на сумата от пропускателните способности на отделните апарати. По такъв начин математически се потвърждава едно от основните положения на тактиката за ролята на масирания удар по противника.

5. СЛУЧАЙНИ ПРОЦЕСИ С НЕПРЕКЪСНАТО ОТЧИТАНЕ НА ВРЕМЕТО

5.1. Дискретни случайни процеси

При всички системи за масово обслужване извънредно важна роля играе случайността. Поради това всеки модел на такава система представлява случаен процес, т. е. в характеристиките й се изменят случайни моменти.

Във физическата система S протича случаен процес, ако под влияние на случайни фактори тя изменя характеристиките си, т. е. състоянията, в които се намира. Да означим с $S(t)$ състоянието й в момента t. То може да се характеризира с една или няколко величини.

Системата S се нарича система с дискретен брой състояния, ако има крайно или изброимо множество от различни състояния. Възможните й състояния означаваме с $E_0,E_1,E_2,\ldots,E_n,\ldots$ и предполагаме, че тя преминава от едно състояние в друго чрез скок, а не постепенно.

Да разгледаме физическа система S с изброимо множество състояния

$$E_0,E_1,E_2,E_3,\ldots E_n.$$

Във всеки момент t тя се намира точно в едно от тези състояния. Нека с $P_k(t)$ означим вероятността системата да се намира в състояние E_k в момента t. Тогава очевидно

$$0\leq P_k(t)\leq 1;\quad k=0,1,2\ldots$$

и

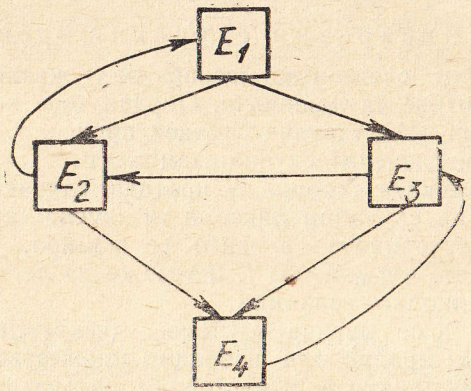
$$\sum_{k=1}^{\infty}P_k(t)=1.$$

Съвкупността от вероятностите $P_k(t)$ за всеки момент t се нарича стохастичен вектор или сечение на случайния процес, протичащ в системата.

Една от основните задачи в теорията на масовото обслужване е да се изучат случайните процеси в системите и по-специално да се определят вероятностите на тези случайни процеси. За много практически задачи съвкупността от тези

вероятности описва добре случайния процес, макар че в общия случай е недостатъчна.

Дискретен случаен процес $S(t)$ се нарича този, който протича в система с краен брой състояния. Той се интерпретира удобно с помощта на граф за възможните състояния и възможните преходи. Обикновено състоянието се означава с точка или правоъгълник, а направленията — със стрелки.



Фиг. 3.3.3

Например на фиг. 3.3.3 е даден граф на състоянията на системата с четири възможни състояния E_1, E_2, E_3, E_4. От състояние E_1 може да се премине в състояние E_2 и E_3; от E_2 в E_1 и E_4; от E_3 в E_2 и E_4; от E_4 само в E_3.

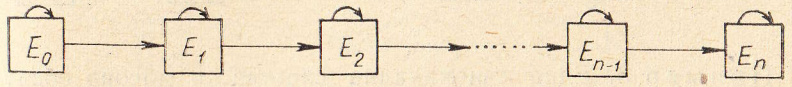
Ако в графа на състоянията има състояние, в което влизат стрелки, но от него не излиза нито една стрелка, казва се, че то е поглъщащо (без изход). Това означава, че ако системата попадне в него, никога повече няма да го напусне. Ако дадена бойна единица е унищожена от противника, попада в състоянието унищожена и повече няма да бъде в друго състояние — да получава задача, да се ремонтира и т. н.

Целесъобразно е анализът на всяка система за масово обслужване да започва със съставяне на граф на възможните състояния.

5.2. Примери

Пример 1. Група от самолети напада важен стратегически обект, който се прикрива от изтребителна авиация. Моментите на откриване на групата и на вдигане на изтребителната авиация по тревога не са известни. Тази ситуация

може да се разгледа като система с краен брой състояния. Различните състояния на системата се характеризират с броя на поразените самолети в групата. С E_k означаваме състоянието на системата, когато са унищожени k самолета ($k=0,1,2,\ldots,N$). На фиг. 3.3.4 са изобразени възможните състояния на системата и възможните им преходи от едно в друго. Извитите стрелки показват, че тя може да остане в същото състояние.



Фиг. 3.3.4

Разглежданата система е с необратими преходи. Това означава, че може да премине от състояние E_k в следващото състояния E_{k+1}, но обратният преход е невъзможен. Изразено на вероятностен език това значи, че всички вероятности P_{ij}, при които $i>j$, са равни на нула. Тогава матрицата на прехода е

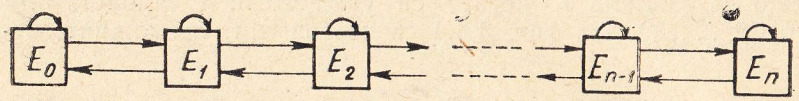
$$T_1=\begin{Vmatrix} P_{11}P_{12}P_{13}\ .\ .\ .P_{1N} \\ 0\ \ P_{22}P_{23}\ .\ .\ .P_{2N} \\ 0\ \ 0\ \ P_{33}\ .\ .\ .P_{3N} \\ \hline 0\ \ 0\ \ 0\ \ .\ .\ .P_{NN} \end{Vmatrix},$$

където $P_{NN}=1$.

Пример 2. Нека една телефонна централа има N канала. Всяка заявка (повикване), която ги завари заети, напуска системата (получава отказ). Означаваме с E_k състоянието на системата, при което са заети k канала. Ясно е, че ако системата в даден момент е в това състояние, в следващия може да бъдат заети и други канали (състояния $E_{k+1},E_{k+2},\ldots,E_n$) или пък някои да се освободят (състояния $E_{k-1},E_{k-2},\ldots,E_0$). Следователно системата е с обратими преходи и всички вероятности P_{ij} са положителни числа.

Графично тази система е изобразена на фиг. 3.3.5. За опростяване на схемата преходите към несъседни състояния не са отбелязани.

Най-често срещани и най-разнообразни са системите смесен тип. При тях съществуват както обратими, така и необратими преходи.



Фиг. 3.3.5

Пример 3. Една едноканална система за масово обслужване може да се намира в едно от следните състояния:

E_1 — каналът е изправен и свободен;
E_2 — каналът е изправен и зает;
E_3 — каналът е повреден и чака ремонт;
E_4 — каналът е повреден и се ремонтира.

Лесно е да се установи, че системата може да премине от състояние E_1 в E_2 и от E_2 в E_1 (обратими преходи). Тя може да премине от E_2 в E_3, но обратният преход е невъзможен. Общият вид на преходите е даден на фиг. 3.3.6.

Пример 4. Танк, участвуващ в армейска настъпателна операция, може да се разглежда като система с краен брой състояния. Наистина той може да се намира в едно от следните състояния:

E_1 — изправен и изпълнява задачи;
E_2 — повреден и чака ремонт или евакуация;
E_3 — повреден и се ремонтира на място;
E_4 — евакуира се;
E_5 — чака ремонт в района на полевата работилница;
E_6 — ремонтира се в полевата работилница;
E_7 — ремонтиран и чака транспортиране;
E_8 — транспортира се;
E_9 — унищожен.

Графично тази система е показана на фиг. 3.3.7.

5.3. Дискретни марковски случайни процеси с непрекъснато време

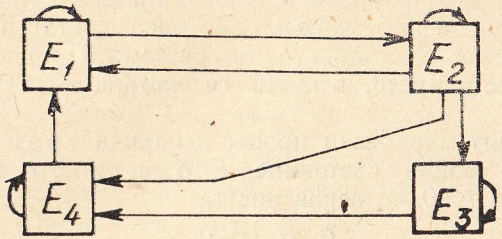
Нека е даден дискретен случаен процес, протичащ в система S, с възможни състояния

$$E_0, E_1, \ldots, E_i, \ldots, E_n.$$

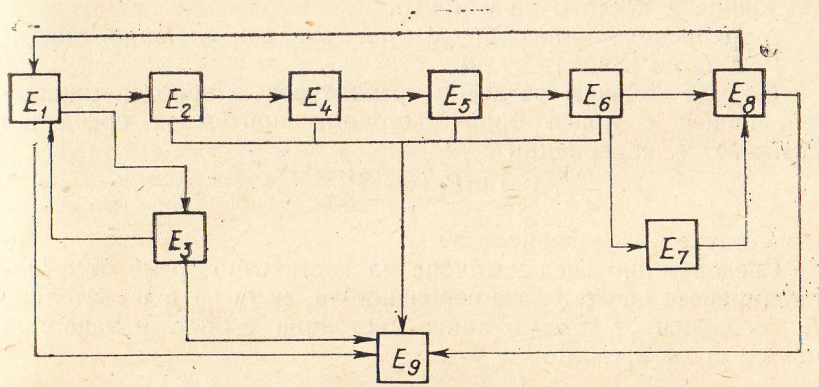
Означаваме с $P_{ij}(t_0,t)$ условната вероятност в момента t_0+t системата да се намира в състояние E_j, ако в момента t_0 е била в състояние E_i.

Дискретният случаен процес $X(t)$ се нарича марковски,

ако вероятността $P_{ij}(t_0,t)$ зависи само от параметрите t_0,t,i,j и не зависи от протичането на процеса до момента t_0.



Фиг. 3.3.6



Фиг. 3.3.7

Следователно при марковските процеси бъдещото развитие зависи от настоящето на процеса, но не и от неговото минало. Те се делят на процеси с дискретно време и процеси с непрекъснато време.

Марковски случайни процеси с дискретно време се наричат тези, при който от едно състояние в друго може да се преминава само в предварително строго определени моменти $t_1,t_2,\ldots,t_n$.

Марковски случайни процеси с непрекъснато време се наричат тези, при които преминаването от едно състояние в друго е възможно във всеки момент t. Те са тясно свързани с поасоновските потоци от събития.

За описването на такъв процес е нужно да се знаят всички възможни състояния, в които може да се намира системата, да им се състави граф, т.е. да се посочат пътищата за преми-

наване от едно състояние в друго, да се определят вероятностите $P_{i,j}(t_0,t_0+\Delta t)$ и се укаже началното състояние на системата.

Дискретният марковски случаен процес с непрекъснато време наричаме ергодичен, ако след достатъчно време τ вероятностите за състоянието на системата практически не зависят от състоянието, в което се намира в началото, и от дължината τ.

Дискретният марковски процес се нарича транзитивен, ако за всяка двойка състояние E_i, E_j и всяко t_0 може да се намери такова $t>0$, че вероятността

$$P_{i,j}(t_0,t)>0.$$

Това означава, че системата може да премине от всяко свое състояние в което и да е друго.

Марковският процес $X(t)$ е еднороден, ако вероятностите $P_{ij}(t_0,t)$ не зависят от t_0.

Марков доказва, че всеки транзитивен еднороден марковски процес с краен брой състояния притежава ергодично свойство, т. е. границите

$$\lim_{\tau\to\infty} P_{ij}(\tau)=P_j$$

съществуват и не зависят от i.

Следователно след изтичане на достатъчно време от функционирането на системата вероятността, че тя ще е в състояние E_i не зависи от това, в какво състояние е била в началния момент и от времето t.

6. СИСТЕМИ ЗА МАСОВО ОБСЛУЖВАНЕ С ОТКАЗ

Всички системи за масово обслужване може да се разделят на две големи групи: еднородни и нееднородни. Първите се състоят от еднородни обслужващи прибори, вторите — от нееднородни. Например зенитната групировка от еднотипни комплекси, прикриваща даден обект, е еднородна система за масово обслужване, а противотанковата отбрана, изградена от различни огневи средства, е нееднородна система.

Самият процес на обслужване може да се състои от редица последователни фази. Когато фазите за обслужване на една заявка са няколко, системата за масово обслужване се нарича многофазна. Особеността в работата на многофазните системи е тази, че обслужващите прибори на всяка следваща фаза започват да работят само тогава, когато заявката е обслужена от предидущата фаза.

Според времето на престояването на заявката в сферата на обслужването всички системи може да се разделят на три големи групи:

— с отказ;
— с ограничено време за чакане;
— с неограничено време за чакане.

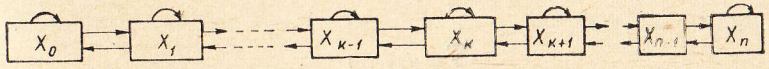
6.1. Системи с отказ

Система с отказ е тази, на която, ако при постъпване на заявката всички прибори за обслужване са заети, тя незабавно получава отказ и напуска системата необслужена. Такава система е зенитната групировка, прикриваща даден обект. При съвременните скоростни въздушни цели времето за пребиваването им в зоната на огъня е съизмеримо с необходимото време за обстрелване. В този случай самолетът на противника, влетял в огневата зона, когато всички комплекси са заети със стрелба по други самолети, прелита необстрелван през нея.

Ако имаме n-канална система за масово обслужване с отказ, множеството състояния, в които тя може да се намира в процеса на функционирането ѝ, са:

x_0 — всички канали са свободни;
x_1 — зает е само един канал;
.
.
.
x_k — заети са само k канала;
.
.
.
x_n — заети за всичките n канала.

Случайният процес, изразяващ преходите на системата от едно състояние в друго, е изобразен на фиг. 3.3.8.



Фиг. 3.3.8

Нека си поставим задачата: Да се определят вероятностите на системата $P_k(t)(k=0, 1, 2, \ldots, n)$ за всеки момент от време t.

Решаваме задачата при следните условия:

1. Към системата подхожда най-прост поток от заявки със средна плътност λ. Дистанцията между заявките T е случайна величина с показателно разпределение, поради което

$$P(T<\Delta t)=1-e^{-\lambda\Delta t},$$

$$P(T\geq\Delta t)=e^{-\lambda\Delta t},$$

където $1-e^{-\lambda\Delta t}$ е вероятността, че за времето Δt ще пристигне следващата заявка.

2. Системата включва в състава си n прибори за обслужване.

3. Приборите за обслужване са еднотипни, с еднаква пропускателна способност, зададена с параметъра $\mu=\frac{1}{t_{\text{обс}}}$. Времето за обслужване ($t_{\text{обс}}$) е случайна величина с показателно разпределение, поради което

$$P(t_{\text{обс}}<\Delta t)=1-e^{-\mu\Delta t},$$

$$P(t_{\text{обс}}\geq\Delta t)=e^{-\mu\Delta t},$$

където $1-e^{-\mu\Delta t}$ е вероятността, че за времето Δt заетият канал ще се освободи.

4. Разглеждаме състоянието на системата в момента t, при което вероятността да бъдат свободни всичките прибори е $P_0(t)$, вероятността да бъде зает само един прибор е $P_1(t)$, вероятността да бъдат заети k прибори е $P_k(t)$ и вероятността да бъдат заети всичките n прибори е $P_n(t)$.

5. Очевидно е, че

$$\sum_{k=0}^{n}P_k(t)=1.$$

Съставяне диференциално уравнение за вероятността $P_0(t)$.

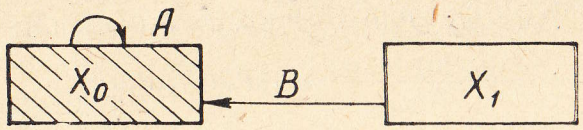
Фиксираме момента на времето t. Намираме вероятността $P_0(t+\Delta t)$, т.е. вероятността, че в момента t и за времето Δt

системата се намира в състояние x_0 (всички канали за обслужване са свободни). Това е сбъдването на събитието C.

$$P_0(t+\Delta t)=P(C).$$

Събитието C може да се сбъдне или чрез събитието A, или чрез събитието B (фиг. 3.3.9), т.е.

A — в момента t системата се намира в състояние x_0 (събитие A_1) и за времето Δt не пристига следващата заявка (събитие A_2);



Фиг. 3.3.9

B — в момента t системата се намира в състояние x_1 (събитие B_1) и за времето Δt каналът се освобождава, при което системата преминава в състояние x_0 (събитие B_2).

Възможността на системата да прескача през състояния (например от x_2 в x_0) за малкия период от време Δt може да се пренебрегне като малка величина от висш порядък в сравнение с $P(A)$ и $P(B)$. – ординарен поток

Според теоремата за събиране на вероятностите

$$P(C)\approx P(A)+P(B).$$

Според теоремата за умножение на вероятности

$$P(A)=P(A_1)\times P(A_2);\quad P(B)=P(B_1)\times P(B_2).$$

Определяме вероятността $P(A)$:

$$P(A_1)=P_0(t);\quad P(A_2)e^{-\lambda\Delta t}.$$

Развиваме степенната функция $e^{-\lambda\Delta t}$ в ред, а именно:

$$e^{-\lambda\Delta t}=1+\frac{(-\lambda\triangle t)^1}{1!}+\frac{(-\lambda\triangle t)^2}{2!}+\frac{(-\lambda\triangle t)^3}{3!}+\ldots$$

Основната стойност на функцията се съдържа в първите два члена от реда, т. е. $e^{-\lambda\Delta t}\approx 1-\lambda\Delta t$.

Следователно

$$P(A)=P_0(t)\,.\,(1-\lambda\Delta t).$$

Определяме вероятността $P(B)$:

$$P(B_1)=P_1(t) \quad P(B_2)=1-e^{-\mu\Delta t};$$

$$1-e^{-\mu\Delta t} \approx 1-(1-\mu\Delta t)\approx \mu\Delta t.$$

Следователно $P(B)\approx P_1(t)\,.\,\mu\Delta t$.

Оттук

$$P(C)=P_0(t+\Delta t)\approx P_0(t)(1-\lambda\Delta t)+P_1(t)\mu\Delta t;$$
$$P_0(t+\Delta t)-P_0(t)=-P_0(t)\lambda\Delta t+P_1(t)\mu\Delta t\,|:\Delta t;$$
$$\frac{P_0(t+\Delta t)-P_0(t)}{\Delta t}=-\lambda P_0(t)+\mu P_1(t).$$

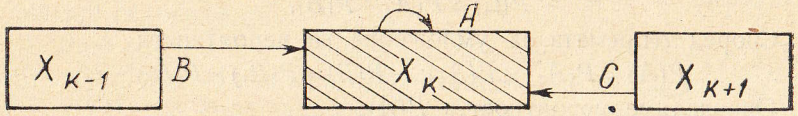
Като преминем към граничен режим, когато $\Delta t\to 0$, получаваме диференциалното уравнение за $P_0(t)$:

$$\frac{dP_0(t)}{dt}=-\lambda P_0(t)+\mu P_1(t).$$

Съставяне диференциалното уравнение на вероятността $P_k(t)$

Фиксираме момента t. Намираме вероятността $P_k(t+\Delta t)$, т. е. вероятността, че в момента t и за времето Δt системата се намира в състояние x_k. Това е сбъдването на събитие L, т. е.

$$P_k(t+\Delta t)=P(L).$$



Фиг. 3.3.10

Събитието L може да се сбъдне или чрез събитието A, или чрез събитието B, или чрез събитието C(фиг. 3.3.10.), т. е.

A — в момента t системата се намира в състояние x_k (събитие A_1), за времето Δt не пристига следващата заявка (събитие A_2) и не се освобождава нито един от заетите k канала (събитие A_3);

B — в момента t системата се намира в състояние x_{k-1} (събитие B_1) и за времето Δt пристига следващата заявка (събитие B_2), при което системата преминава в състояние x_k;

C — в момента t системата се намира в състояние x_{k+1} (събитие C_1) и за времето Δt се освобождава само един от заетите $k+1$ канала (събитие C_2), при което системата преминава в състояние x_k.

$$P(L)\approx P(A)+P(B)+P(C);$$
$$P(A)\approx P(A_1)\,.\,P(A_2)\,.\,P(A_3); \quad P(B)\approx P(B_1)\,.\,P(B_2);$$
$$P(C)\approx P(C_1)\,.\,P(C_2).$$

Определяме вероятността $P(A)$, т. е.

$$P(A_1)=P_k(t); \quad P(A_2)=e^{-\lambda\Delta t}; \quad P(A_3)=\left(e^{-\mu\Delta t}\right)^k;$$

$$P(A)\approx P_k(t).e^{-\lambda\Delta t}.e^{-k\mu\Delta t}\approx P_k(t).e^{-(\lambda+k\mu)\Delta t}.$$

Като пренебрегнем малките величини от висш порядък, получаваме

$$e^{-(\lambda+k\mu)\Delta t}\approx 1-(\lambda+k\mu)\Delta t,$$

откъдето

$$P(A)\approx P_k(t)\left[1-(\lambda+k\mu)\,\Delta t\right].$$

Определяме вероятността $P(B)$, т. е.

$$P(B_1)=P_{k-1}(t); \quad P(B_2)=1-e^{-\lambda\Delta t}\approx 1-(1-\lambda\Delta t)\approx\lambda\Delta t.$$

Следователно

$$P(B)\approx P_{k-1}(t)\,.\,\lambda\Delta t.$$

Определяме вероятността $P(C)$, т. е.

$$P(C_1)=P_{k+1}(t); \quad P(C_2)=1-\left(e^{-\mu\Delta t}\right)^{(k+1)}=1-e^{-(k+1)\mu\Delta t};$$

$$P(C_2)=1-e^{-(k+1)\mu\Delta t}\approx 1-\left[1-(k+1)\,\mu\Delta t\right]\approx(k+1)\mu\Delta t.$$

Следователно

$$P(C)\approx P_{k+1}(t)\,.\,(k+1)\mu\Delta t.$$

Оттук

$$P(L)=P_k(t+\Delta t)\approx P_k(t)\left[1-(\lambda+k\mu)\,\Delta t\right]+$$
$$+P_{k-1}(t)\lambda\Delta t+P_{k+1}(t)(k+1)\mu\Delta t;$$

$$P_k(t+\Delta t)-P_k(t)\approx\lambda P_{k-1}(t)\Delta t-(\lambda+k\mu)P_k(t)\Delta t+(k+1)\mu P_{k+1}(t)\Delta t.$$

Като разделим двете страни на равенството с Δt и преминем към граничен режим, когато $\Delta t\to 0$, получаваме диференциалното уравнение за $P_k(t)$, $(0<k<n)$:

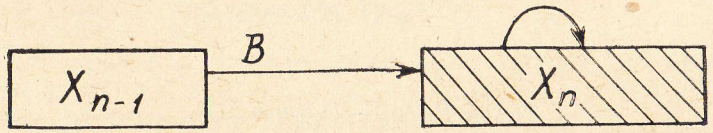
$$\frac{dP_k(t)}{dt}=\lambda P_{k-1}(t)-(\lambda+k\mu)P_k(t)+(k+1)\mu P_{k+1}(t).$$

Съставяне диференциалното уравнение за вероятността $P_n(t)$.

Фиксираме момента t. Намираме вероятността $P_n(t+\Delta t)$, т.е. вероятността, че в момента t и за времето Δt системата се намира в състояние x_n. Приемаме, че това е сбъдването на събитие C, т.е.

$$P_n(t+\Delta t)=P(C).$$

То може да се сбъдне или чрез събитието A, или чрез събитието B(фиг. 3.3.11.), т.е.



Фиг. 3.3.11

A — в момента t системата се намира в състояние x_n (събитие A_1) и за времето Δt не се освобождава нито един от заетите n канала (събитие A_2);

B — в момента t системата се намира в състояние x_{n-1} (събитие B_1) и за времето Δt пристига следващата заявка (събитие B_2), при което системата преминава в състояние x_n.

$$P(C)\approx P(A)+P(B);$$
$$P(A)\approx P(A_1)\,.\,P(A_2);\quad P(B)\approx P(B_1)\,.\,P(B_2).$$

Определяме вероятността $P(A)$, т. е.

$$P(A_1)=P_n(t);\quad P(A_2)=\left(e^{-\mu\Delta t}\right)^n=e^{-n\mu\Delta t}\approx 1-n\mu\Delta t.$$

Следователно

$$P(A)\approx P_n(t)\,.\,(1-n\mu\Delta t).$$

Определяме вероятността $P(B)$, т. е.

$$P(B_1)=P_{n-1}(t);\quad P(B_2)=1-e^{-\lambda\Delta t}\approx 1-(1-\lambda\Delta t)\approx\lambda\Delta t.$$

Следователно

$$P(B)=P_{n-1}(t)\,.\,\lambda\Delta t.$$

Оттук

$$P(C)=P_n(t+\Delta t)\approx P_n(t)(1-n\mu\Delta t)+P_{n-1}(t)\lambda\Delta t;$$
$$P_n(t+\Delta t)-P_n(t)\approx\lambda P_{n-1}(t)\Delta t-n\mu P_n(t)\Delta t.$$

Разделяме двете страни на равенството на Δt, преминаваме към граница, когато $\Delta t\to 0$, и получаваме диференциалното уравнение за $P_n(t)$:

$$\frac{dP_n(t)}{dt}=\lambda P_{n-1}(t)-n\mu P_n(t).$$

По този начин се получава система от диференциални уравнения за вероятностите $P_0(t)$, $P_1(t)$, ..., $P_n(t)$:

$$\begin{cases}\dfrac{dP_0(t)}{dt}=-\lambda P_0(t)+\mu P_1(t);\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \dfrac{dP_k(t)}{dt}=\lambda P_{k-1}(t)-(\lambda+k\mu)P_k(t)+(k+1)\mu P_{k+1}(t);\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \dfrac{dP_n(t)}{dt}=\lambda P_{n-1}(t)-n\mu P_n(t).\end{cases}$$

Тези уравнения се наричат уравнения на Ерланг.

В началото, веднага след включване на системата за масово обслужване, протичащият в нея случаен процес не е стационарен. В системата (както във всяка динамична система) възниква така наречениият „преходен“ (нестационарен) процес. Обаче след известно време той затихва и системата преминава в „установен“ режим на работа, вероятностните характеристики на който вече не зависят от времето.

При много практически задачи представляват интерес именно характеристиките на установения режим на обслужването.

Може да се докаже, че за всяка система с отказ такъв установен режим съществува и при него всички вероятности $P_0(t)$, $P_1(t)$, ..., $P_n(t)$ се стремят към постоянните си пределни P_0, P_1, ..., P_n, а всички техни производни — към нула.

За да намерим пределните вероятности P_0, P_1, ..., P_n (вероятностите за състоянията на системата в установен режим), заместваме в диференциалните уравнения всички вероятности $P_k(t)$, $(0\le k\le n)$ с техните пределни P_k, а всички производни

полагаме равни на нула. По този начин получаваме система не от диференциални, а от алгебрични уравнения:

$$\begin{aligned}
&-\lambda P_0+\mu P_1=0;\\
&\lambda P_0-(\lambda+\mu)P_1+2\mu P_2=0;\\
&\lambda P_1-(\lambda+2\mu)P_2+3\mu P_3=0;\\
&\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\lambda P_{k-1}-(\lambda+k\mu)P_k+(k+1)\mu P_{k+1}=0;\\
&\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\lambda P_{n-1}-n\mu P_n=0.
\end{aligned}$$

Към тях е необходимо да се добави условието

$$\sum_{k=0}^{n} P_k=1.$$

Решаваме системата относно неизвестните $P_0, P_1, \ldots, P_n$. От първото уравнение имаме

$$P_1=\frac{\lambda}{\mu}P_0.$$

От второто уравнение, като отчитаме горното решение, имаме:

$$P_2=\frac{1}{2\mu}\left[-\lambda P_0+(\lambda+\mu)P_1\right]=\frac{1}{2\mu}\left(-\lambda P_0+\frac{\lambda^2}{\mu}P_0+\lambda P_0\right)=\frac{\lambda^2}{2\mu^2}P_0.$$

Решаваме третото уравнение, като отчитаме предните две решения, и получаваме:

$$P_3=\frac{1}{3\mu}\left(-\frac{\lambda^2}{\mu}P_0+\frac{\lambda^3}{2\mu^2}P_0+\frac{\lambda^2}{2\mu^2}\cdot 2\mu P_0\right)=\frac{\lambda^3}{3!\mu^3}P_0.$$

За всяко $k\leq n$ имаме

$$P_k=\frac{\lambda^k}{k!\mu^k}\cdot P_0=\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}{k!}\cdot P_0.$$

Въвеждаме обозначението $\frac{\lambda}{\mu}=a$.

Тогава

$$a=\frac{\lambda}{\mu}=\frac{\lambda}{\frac{1}{t_{\text{обс.}}}}=\lambda t_{\text{обс.}},$$

където a — приведена плътност на потока заявки. Това е средният брой заявки, пристигнали в системата, докато един прибор обслужва една заявка (за време на обслужването е прието средното значение на тази величина).

С това обозначение формулата получава вида

$$P_k=\frac{a^k}{k!}P_0.$$

В условието $\sum_{k=0}^{n} P_k=1$ заместваме P_k и получаваме

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{a^k}{k!}P_0=1; \qquad P_0\sum_{k=0}^{n}\frac{a^k}{k!}=1.$$

Оттук

$$P_0=\frac{1}{\sum_{k=0}^{n}\frac{a^k}{k!}}.$$

Като заместим P_0 с неговото равно, получаваме:

$$P_k=\frac{a^k}{k!}P_0=\frac{\frac{a^k}{k!}}{\sum_{k=0}^{n}\frac{a^k}{k!}} \quad (0\leq k\leq n).$$

Тази формула се нарича формула на Ерланг.

Показатели за оценка на работата на системите с отказ.

Основните показатели, по които се оценява работата на системата с отказ, са:

1. Таблицата с вероятностите системата да се намира в множеството си състояния.

За съставянето ѝ се използува формулата

$$P_k=\frac{\frac{a^k}{k!}}{\sum_{k=0}^{n}\frac{a^k}{k!}}; \quad (0\leq k\leq n).$$

2. Вероятността, че дадена заявка ще получи отказ и няма да бъде обслужена:

$$P_{\text{отк.}} = P_n = \frac{\frac{a^n}{n!}}{\sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!}}.$$

При едноканална система $P_{\text{отк.}} = P_1$, т. е.

$$P_1 = \frac{a}{1+a}.$$

3. Вероятността, че всяка заявка ще бъде обслужена:

$$P_{\text{обс.}} = 1 - P_{\text{отк.}} = 1 - P_n.$$

4. Средният брой на обслужените заявки за единица време:

$$q = \lambda \,.\, P_{\text{обс.}}$$

5. Математическото очакване за броя на действуващите (на заетите) прибори за обслужване:

$$M_k = \sum_{k=1}^{n} k \,.\, P_k.$$

6. Коефициентът за натовареността на отделния прибор за обслужване:

$$\Delta T = \frac{M_k}{n}.$$

7. Средният брой заявки, обслужени от един прибор за времето $T_н$ (времето за работа на системата):

$$Q = \frac{\Delta T \,.\, T_н}{\bar{t}_{\text{обс.}}}.$$

Пример.

За прикриването на район от страната са развърнати $n=9$ зенитни комплекса. Всички комплекси са еднотипни със средно значение на цикъла на стрелбата $\bar{t}_{\text{обс.}} = 1{,}5$ min. При оценката на въздушния противник е направен извод, че по обектите е възможно да бъде нанесен удар с около 60 самолета ($N=60$) за 15 min ($T_н = 15$). Вероятността за поразяване на един самолет от един зенитен комплекс при една стрелба е $E=0{,}7$.

Да се оцени ефективността на зенитното прикритие на дадения район от страната.

Решение.

При отразяването на налета зенитната групировка функционира като система за масово обслужване с отказ. Условията са: $n=9$, $\bar{t}_{\text{обс.}} = 1{,}5$ min, $\lambda = \frac{N}{T_н} = \frac{60}{15} = 4$ самолети в минута.

$$a = \lambda \,.\, \bar{t}_{\text{обс.}} = 4 \,.\, 1{,}5 = 6 \text{ самолета};$$

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{9} \frac{6^k}{k!}} = \frac{1}{\frac{6^0}{0!} + \frac{6^1}{1!} + \frac{6^2}{2!} + \frac{6^3}{3!} + \ldots + \frac{6^9}{9!}} = 0{,}0027;$$

$$P_1 = \frac{a^1}{1!} P_0 = \frac{6^1}{1!} \,.\, 0{,}0027 = 0{,}0162;$$

$$P_2 = \frac{a^2}{2!} P_0 = \frac{6^2}{2!} \,.\, 0{,}0027 = 0{,}0487.$$

Значенията на вероятностите за множеството състояния на системата са дадени в таблица 3.3.1.

Таблица 3. 3. 1

Брой на стрелящите зенитни комплекси	P_k	$k \,.\, P_k$
0	0,0027	0,0000
1	0,0162	0,0162
2	0,0487	0,0974
3	0,0974	0,2922
4	0,1461	0,5844
5	0,1754	0,8770
6	0,1754	1,0524
7	0,1503	1,0521
8	0,1127	0,9016
9	0,0751	0,6759
Всичко	1,0000	5,55

Тази таблица дава огневата интензивност на зенитната групировка при отразяването на налета. Очевидно, че през 9,7% от времето на налета ще водят огън три комплекса,

през 14,6% от времето — 4 комплекса, през 35% от времето — 5—6 зенитни комплекса и т. н.

Вероятността влитащият самолет в огневата зона да не бъде обстрелван е равна на вероятността в този момент да бъдат заети със стрелба деветте зенитни комплекса, т. е.

$$P_{\text{отв.}} = P_9 = 0{,}0751.$$

Оттук вероятността всеки самолет да бъде обстрелван е

$$P_{\text{обс}} = 1 - P_9 = 1 - 0{,}0751 \approx 0{,}925.$$

Вероятността за сваляне на всеки самолет е

$$P_{\text{св}} = P_{\text{обс.}} E \,.\, \alpha = 0{,}93 \,.\, 0{,}7 \,.\, 0{,}54 = 0{,}35,$$

където

$$\alpha = K_{\text{у}} \,.\, K_{\text{п}}.$$

$K_{\text{у}}$ — коефициент, отчитащ бойната готовност и ефективността на бойното управление;

$K_{\text{п}}$ — коефициент, отчитащ въздействието на противника.

В случая сме приели $K_{\text{у}} = 0{,}9$ и $K_{\text{п}} = 0{,}6$.

Средният брой на стрелящите зенитни комплекси е:

$$M_{\text{к}} = \sum_{k=1}^{9} k P_{\text{к}} \approx 5{,}55.$$

Коефициентът на натовареност на отделния комплекс е:

$$\Delta T = \frac{M_{\text{к}}}{n} = \frac{5{,}55}{9} = 0{,}62.$$

Средният брой на проведените стрелби от един комплекс е

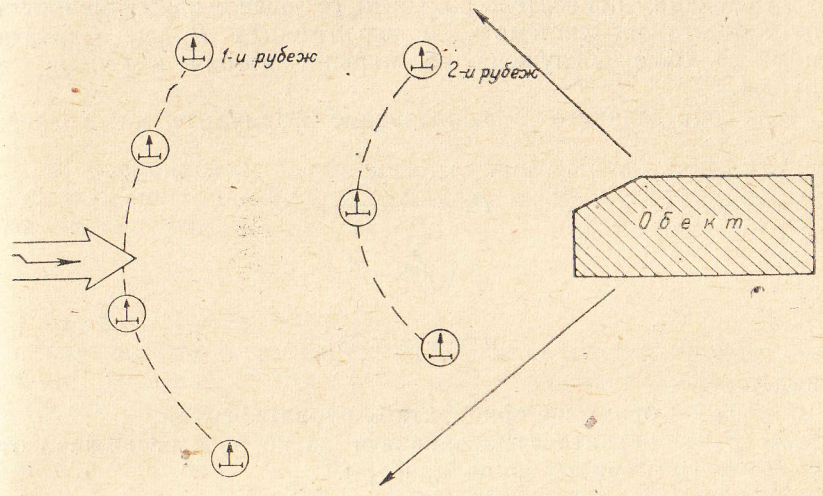
$$Q = \frac{\Delta T \,.\, T_{\text{н}}}{t_{\text{обс.}}} = \frac{0{,}62 \,.\, 15}{1{,}5} = 6.$$

6.2. Система с последователно разположени групи от еднотипни прибори

В практиката често възникват ситуации, при които е необходимо да се определи вероятността за обслужване на заявка, която преминава през последователно разположени групи от прибори. При тези системи за масово обслужване заявката, която не е обслужена от първата група прибори, постъпва за обслужване от втората група. Заявката, която не е обслужена от втората група прибори, постъпва в третата група и т.н.

Като пример за такава система може да се посочи зенитната групировка, прикриваща дадено направление, което води към обекта за прикриване (фиг. 3.3.12).

Самолетите на противника, които имат за цел да нанесат удар по обекта, са принудени да преодолеят последователно



Фиг. 3.3.12

двата рубежа на зенитната групировка. На всеки рубеж е възможно да се намират различен брой зенитни комплекси.

Условията, при които функционира даденият тип система за масово обслужване, са:

1. Към системата подхожда най-прост поток от заявки със средна плътност λ.

2. Системата включва в състава си еднакви по тип прибори за обслужване с пропускателна способност μ. Времето за обслужване е случайна величина с показателно разпределение

$$\mu = \frac{1}{t_{\text{обс}}}.$$

3. В първата група (на първия рубеж) има r_1 прибора, във втората група (на втория рубеж) — r_2 прибора, на i-тия рубеж — r_i прибора.

4. Системата функционира по следния начин. Заявката се насочва към приборите от първата група. Ако в момента

всичките прибори от тази група са заети, тя получава отказ и се насочва към втората група прибори. Ако от тази група има свободен прибор, той я обслужва. Ако всички прибори и тук са заети, тя получава отказ и се насочва към следващата група и т.н.

Основният показател, по който се оценява ефективността от работата на системата, е вероятността P_i, че заявката няма да бъде обслужена на първия, втория и т.н. на i-я рубеж.

За определянето ѝ използуваме формулите на Ерланг:

$$P_1=\frac{\frac{a^{r_1}}{r_1!}}{\sum_{k=0}^{r_1}\frac{a^k}{k!}};$$

$$a=\frac{\lambda}{\mu}=\lambda.\bar{t}_{обс},$$

където:

— r_1 — броят на приборите в първата група;

— P_1 — вероятността заявката да не бъде обслужена от първата група прибори.

$$P_2=\frac{\frac{a^{r_1+r_2}}{(r_1+r_2)!}}{\sum_{k=0}^{r_1+r_2}\frac{a^k}{k!}},$$

където: — r_2 — броят на приборите във втората група;

— P_2 — вероятността заявката да не бъде обслужена от първата и втората група прибори.

$$P_i=\frac{\frac{a^{r_1+r_2+\ldots+r_i}}{(r_1+r_2+\ldots+r_i)!}}{\sum_{k=0}^{r_1+r_2+\ldots+r_i}\frac{a^k}{k!}},$$

където P_i — вероятността заявката да не бъде обслужена от първата, втората, третата, ..., i-тата група прибори.

Като използуваме горните формули, можем да определим следните критерии за оценка на работата на системата:

а) вероятността дадена заявка, насочила се към j-тата група прибори, да не бъде обслужена от тази група:

$$П_j=\frac{P_j}{P_{j-1}};$$

б) вероятността приборите от j-тата група да обслужат заявката, която не е била обслужена от предните групи прибори:

$$P_{обс\ j}=\frac{P_{j-1}-P_j}{P_{j-1}};$$

в) коефициента на производителността на приборите от j-тата група (процента на обслужените заявки от приборите на j-тата група):

$$n_j=\frac{P_{j-1}-P_j}{1-P_j}.$$

Пример.

Основното направление, водещо към район от територията на страната, се прикрива от 5 зенитни комплекса, развърнати на два последователни рубежа. Два от комплексите са развърнати на първия (външния) рубеж, а останалите три — на втория рубеж. От оценката на въздушния противник се прави извод, че по това направление средната плътност на налета няма да бъде по-голяма от $\lambda=2$ самолета в минута. Комплексите са еднотипни със средно значение на цикъла на стрелбата $t_{цик}=1$ минута. Да се оцени ефективността на прикриването на направлението.

Решение:

$$\lambda=2;\ t_{обс}=1;\ a=2.1=2;\ r_1=2;\ r_2=3;$$

$$P_1=\frac{\frac{a^{r_1}}{r_1!}}{\sum_{k=0}^{r_1}\frac{a^k}{k!}}=\frac{\frac{2^2}{2!}}{\sum_{k=0}^{2}\frac{2^k}{k!}}=0{,}4;$$

$$P_2=\frac{\frac{a^{r_1+r_2}}{(r_1+r_2)!}}{\sum_{k=0}^{r_1+r_2}\frac{a^k}{k!}}=\frac{\frac{a^{2+3}}{(2+3)!}}{\sum_{k=0}^{2+3}\frac{2^k}{k!}}=0{,}045;$$

$$P_{обс_2}=\frac{P_1-P_2}{P_1}=\frac{0{,}4-0{,}045}{0{,}4}=0{,}888;$$

$$П_2=\frac{P_2}{P_1}=\frac{0{,}045}{0{,}4}=0{,}113;$$

$$n_2=\frac{P_1-P_2}{1-P_2}=\frac{0{,}4-0{,}045}{1-0{,}045}=0{,}371.$$

Очевидно е, че ако по даденото направление противникът действува със сто самолета, през първия рубеж ще се промъкнат необстрелвани 40 самолета, а през първия и втория рубеж — 4—5 самолета. Вероятността за обстрелване на преминалия над първия рубеж необстрелван самолет от комплексите на втория рубеж е 0,89. Комплексите от втория рубеж ще обстрелват 37% от влетелите самолети.

6.3. Система от два последователно разположени прибора с различна производителност

Най-проста система за масово обслужване с последователно разположени прибори с различна производителност е системата от два прибора.

Приемаме следните условия, при които работи системата:

а) към нея подхожда най-прост поток от заявки със средна плътност λ;

б) първият прибор има пропускателна способност μ_1, а вторият — μ_2. Времето за обслужване на заявката и от двата прибора е случайна величина с показателно разпределение;

в) дадената заявка подхожда към първия прибор и ако той е свободен, я обслужва, а ако е зает, тя се насочва към втория прибор. Ако той е свободен, обслужва заявката, а ако е зает, тя напуска системата необслужена.

Схемата за работа на този тип система е дадена на фиг. 3.3.13.

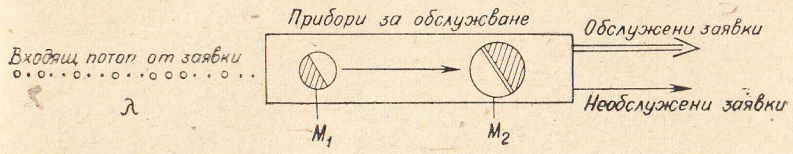
При работа системата може да се намира в даден момент в следните състояния:

x_{00} — първи и втори прибор са свободни;
x_{10} — първи прибор е зает, а втори — свободен;
x_{01} — първи прибор е свободен, а втори — зает;
x_{11} — двата прибора са заети.

На тези състояния съответствуват вероятностите P_{00}, P_{10}, P_{01} и P_{11}.

За всяка вероятност се съставя диференциално уравнение, което при установен режим на работа на системата се преобразува в алгебрично уравнение.

За да изведем формулите, по които да определяме посочените вероятности, следва да решим системата алгебрични уравнения:



Фиг. 3.3.13

$$\begin{aligned}
\lambda P_{00}&=\mu_1 P_{10}+\mu_2 P_{01};\\
(\lambda+\mu_2)P_{01}&=\mu_1 P_{11};\\
(\lambda+\mu_1)P_{10}&=\lambda P_{00}+\mu_2 P_{11};\\
(\mu_1+\mu_2)P_{11}&=\lambda P_{01}+\lambda P_{10}.
\end{aligned}$$

Като я решим, получаваме:

а) вероятността, че двата прибора са заети (вероятността за отказ), е

$$P_{\text{отк}}=P_{11}=\frac{\lambda^2}{\lambda^2+\lambda(\mu_1+\mu_2)+\frac{\mu_1\mu_2}{\lambda+\mu_2}(2\lambda+\mu_1+\mu_2)};$$

б) вероятността, че всички прибори са свободни, е

$$P_{00}=\frac{\mu_1\mu_2(2\lambda+\mu_1+\mu_2)}{\lambda^2(\lambda+\mu_2)}P_{11};$$

в) вероятността, че в обслужването е зает само първият прибор, е

$$P_{10}=\frac{\mu_2(\lambda+\mu_1+\mu_2)}{\lambda(\lambda+\mu_2)}P_{11}.$$

г) вероятността, че в обслужването е зает само вторият прибор, е

$$P_{01}=\frac{\mu_1}{\lambda+\mu_2}P_{11}.$$

Коефициентът за натовареността на прибора е равен на отношението на математическото очакване на броя на заявките, обслужени от този прибор за единица време, към математическото очакване на броя заявки, обслужени от двата прибора за единица време.

При това за първия прибор имаме:

$$n_1=\frac{\mu_1(P_{11}+P_{10})}{\lambda(1-P_{11})}=\frac{\mu_1\left[\lambda(\lambda+\mu_2)+\mu_2(\lambda+\mu_1+\mu_2)\right]}{(\lambda+\mu_2)\left[\lambda(\mu_1+\mu_2)+\frac{\mu_1\mu_2}{\lambda+\mu_2}(2\lambda+\mu_1+\mu_2)\right]};$$

за втория прибор

$$n_2=\frac{\mu_2(P_{11}+P_{01})}{\lambda(1-P_{11})}=\frac{\lambda\mu_2(\lambda+\mu_1+\mu_2)}{(\lambda+\mu_2)\left[\lambda(\mu_1+\mu_2)+\frac{\mu_1\mu_2}{\lambda+\mu_2}(2\lambda+\mu_1+\mu_2)\right]}.$$

Като се анализира уравнението за P_{11}, може да се направи важният за практиката извод, че ефективността на обслужването се повишава, когато за първи прибор се постави този, който е с по-голяма производителност (приборът, който има по-малко време за обслужване).

6.4. Система от две групи последователно разположени прибори с различна производителност

Във военната практика често се срещат случаи, когато е необходимо да се оцени пропускателната способност на системи за масово обслужване с последователно разположени групи прибори с различна производителност. Работата на такава система е показана на фиг. 3.3.14.

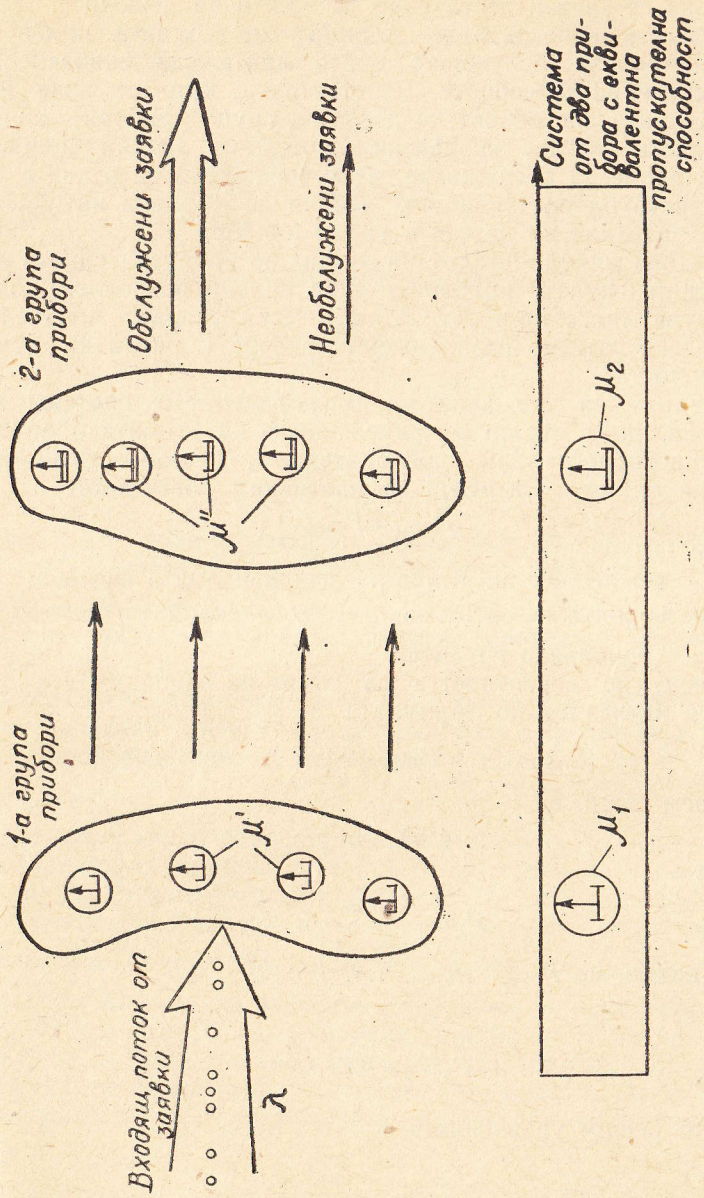
Условията, при които работи системата за масово обслужване, са:

— към системата подхожда най-прост поток от заявки със средна плътност λ;

— системата включва в състава си две групи прибори: в първата група имаме n прибори с пропускателна способност μ'; във втората група — m прибори с пропускателна способност μ''; времето за обслужване и на двата типа прибори е случайна величина с показателно разпределение;

— отначало потокът от заявки се насочва към първата група прибори. Онези от тях, които получат отказ от първата група прибори, се насочват към втората (по-назад разположена) група от прибори. Ако поне един от приборите е свободен, заявката се обслужва. Ако всичките прибори от втората група в момента са заети, заявката напуска системата необслужена.

Извеждането на аналитичните зависимости при тези системи е много сложно. Необходимо е да се приеме по-прост начин за оценка на пропускателната способност на системата, като



Фиг. 3.3.14

при това се запази достатъчно точността на изводите. Един от начините може да бъде замяната на групата прибори с един прибор за обслужване, който притежава еквивалентна пропускателна способност. Действително, като се знае пропускателната способност на дадената група прибори, винаги може да се подбере за дадения поток от заявки прибор с такова време за обслужване, че вероятността за отказ в обслужването на постъпващите заявки да е равна на вероятността за отказ на дадената група прибори.

По този начин методът на замяна по пропускателната способност на групата прибори с един прибор позволява да се използува много по-прост математически апарат, получен за два последователно разположени прибора с различна производителност.

Начинът за свеждане на многоканалната система към едноканална се състои в привеждането на нейната пропускателна способност към пропускателната способност на едноканална система. За целта се използува равенството

$$P_{\text{откл}} = P_{\text{откп}},$$

където:

$P_{\text{откл}}$ — вероятност за отказ на едноканалната система;

$P_{\text{откп}}$ — вероятност за отказ на многоканалната система с прибора в групата.

Знаем, че вероятността за отказ на едноканалната система се изчислява по формулата

$$P_1 = \frac{a}{1+a}.$$

Знаем също, че

$$a = \lambda . \bar{t}_{\text{обсЕ}},$$

откъдето

$$P_1 = \frac{\lambda . \bar{t}_{\text{обсЕ}}}{1+\lambda . \bar{t}_{\text{обсЕ}}}.$$

Приехме, че $P_{\text{откл}} = P_{\text{откп}}$, т.е. $P_1 = P_n$,

откъдето

$$P_n = \frac{\lambda . \bar{t}_{\text{обсЕ}}}{1+\lambda . \bar{t}_{\text{обсЕ}}}.$$

Като решим уравнението спрямо $\bar{t}_{\text{обсЕ}}$, получаваме

$$\bar{t}_{\text{обсЕ}} = \frac{\quad}{\quad}.$$

Ако в групата приборите са еднотипни, P_n се изчислява по познатата ни формула

$$P_n = \frac{\frac{a^n}{n!}}{\sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!}},$$

където n — брой на приборите в групата;

$$a = \frac{\lambda}{\mu'}.$$

След като изчислим $\bar{t}_{\text{обсЕ}}$, определяме

$$\mu_1 = \frac{1}{\bar{t}_{\text{обсЕ}}},$$

където μ_1 — пропускателната способност на единия прибор, който заменя първата група прибори.

По същия начин определяме μ_2 — пропускателната способност на прибора, с който заменяме приборите от втората група.

След като изчислим μ_1 и μ_2, по-нататък използуваме математическия апарат на системите от два прибора с различна производителност, разположени един зад друг.

Пример.

Основно направление, което води към район от територията на страната, се прикрива от 5 зенитни комплекса, развърнати на два последователни рубежа. На външния рубеж са развърнати два комплекса със средно значение на цикъла на стрелбата $\bar{t}_1 = 1$ min. На вътрешния рубеж са развърнати 3 комплекса със средно значение на цикъла на стрелбата $\bar{t}_2 = 2_2$ min. От оценката на въздушния противник е направен изводът, че по това направление средната плътност на налета няма да бъде по-голяма от $\lambda = 2$ самолета/минута. Да се оцени ефективността на прикриването на даденото направление.

Решение.

Определяме пропускателната способност на първия еквивалентен прибор, с който заменяме приборите от първия рубеж:

$$a=\lambda.\bar{t}_1=2.1=2 \text{ самолета;}$$

$$P_{\text{отк}_\text{п}}=P_2=\frac{\frac{a^2}{2!}}{\sum_{k=0}^{2}\frac{a^k}{k!}}=\frac{\frac{2^2}{2!}}{\sum_{k=0}^{2}\frac{2^k}{k!}}=0{,}4;$$

$$t_{E_1}=\frac{P_\text{п}}{\lambda(1-P_\text{п})}=\frac{0{,}4}{2(1-0{,}4)}=0{,}33; \quad \mu_1=\frac{1}{t_{E_1}}=\frac{1}{0{,}33}=3.$$

Определяме пропускателната способност на втория еквивалентен прибор, с който заменяме приборите от втория рубеж:

$$a=\lambda.\bar{t}_2=2.2=4 \quad \text{самолета;}$$

$$P_{\text{отк}_\text{п}}=P_3=\frac{\frac{a^3}{3!}}{\sum_{k=0}^{3}\frac{a^k}{k!}}=\frac{\frac{4^3}{3!}}{\sum_{k=0}^{3}\frac{4^k}{k!}}\approx 0{,}45;$$

$$\bar{t}_{E_2}=\frac{P_\text{п}}{\lambda(1-P_\text{п})}=\frac{0{,}45}{2(1-0{,}45)}\approx 0{,}4; \quad \mu_2=\frac{1}{0{,}4}=2{,}5.$$

Следователно групировката, която прикрива направлението, ще функционира като система от два последователно разположени прибора, първият от които има пропускателна способност $\mu_1=3$, а вторият — $\mu_2=2{,}5$.

Вероятността противников самолет да се промъкне по това направление към обекта необстрелван ще бъде:

$$P_{11}=\frac{\lambda^2}{\lambda^2+\lambda(\mu_1+\mu_2)+\frac{\mu_1\mu_2}{\lambda+\mu_2}(2\lambda+\mu_1+\mu_2)}=$$

$$=\frac{2^2}{2^2+2(3+2{,}5)+\frac{3.2{,}5}{2+2{,}5}(2.2+3+2{,}5)}=0{,}13;$$

$$n_2=\frac{\lambda\mu_2(\lambda+\mu_1+\mu_2)}{(\lambda+\mu_2)\left[\lambda(\mu_1+\mu_2)+\frac{\mu_1\mu_2}{\lambda+\mu_2}(2\lambda+\mu_1+\mu_2)\right]}=$$

$$=\frac{2.2{,}5(2+3+2{,}5)}{(2+2{,}5)\left[2(3+2{,}5)\frac{3.2{,}5}{2+2{,}5}(2.2+3+2{,}5\right]}=0{,}31.$$

Следователно на втория рубеж ще бъдат обстрелвани 31% от самолетите, влитащи по даденото направление.

6.5. Едноканална двуфазна система за масово обслужване

Многофазни системи са тези, в които процесът на обслужването на дадена заявка преминава по фази. Постъпващата в системата заявка отначало се обслужва в първа фаза, след което преминава във втората фаза и т.н.

Като пример за двуфазна система може да се посочи радиолокационната система. Първата фаза е воденето на целта от радиолокационните постове, а втората е обработката на данните за въздушната цел в КП на радиотехническото поделение.

Като пример за трифазна система може да се посочи системата на ПВО на даден обект. Първата фаза е откриването и воденето на въздушната цел от радиолокационните постове, втората — обработката на данните за целта в КП на ПВО и третата фаза — действието на активните средства за ПВО по целта.

Състоянията, в които може да се намира едноканална двуфазна система, са:

x_{00} — в момента и двете фази на системата са свободни;
x_{10} — първата фаза е заета, втората — свободна;
x_{01} — първата фаза е свободна, втората — заета;
x_{11} — в момента и двете фази са заети.

На тези състояния съответстват вероятностите P_{00}, P_{10}, P_{01} и P_{11}.

За всяка вероятност съставяме диференциално уравнение, което при установен режим на работа на системата преобразуваме в алгебрично уравнение.

За да изведем формулите, по които да определим посочените вероятности, следва да решим системата алгебрични уравнения:

$$\left|\begin{array}{r} P_{00}\lambda=\mu_2 P_{01}; \\ P_{01}(\lambda+\mu_2)=\mu_1 P_{11}+\mu_1 P_{10}; \\ P_{10}\mu_1=P_{00}\lambda+P_{11}\mu_2; \\ (\mu_1+\mu_2)P_{11}=\lambda.P_{01}. \end{array}\right.$$

След решаването ѝ получаваме:

$$P_{00}=\frac{\mu_1\mu_2}{(\lambda+\mu_1)(\lambda+\mu_2)}; \quad P_{10}=\frac{\lambda\mu_2(\lambda+\mu_1+\mu_2)}{(\lambda+\mu_1)(\lambda+\mu_2)(\mu_1+\mu_2)};$$

$$P_{01}=\frac{\lambda\mu_1}{(\lambda+\mu_1)(\lambda+\mu_2)}; \quad P_{11}=\frac{\lambda\mu_1}{(\lambda+\mu_1)(\lambda+\mu_2)(\mu_1+\mu_2)}.$$

Основен критерий за оценка на работата на системата е вероятността, че всяка заявка ще бъде обслужена. Тази вероятност е равна на отношението на математическото очакване на броя на обслужените заявки за единица време от втората фаза към средния брой заявки, пристигнали при системата за единица време, т.е.

$$P_{\text{обс}}=\frac{\mu_2(P_{01}+P_{11})}{\lambda}=\frac{\mu_1\mu_2(1+\mu_1+\mu_2)}{(\lambda+\mu_1)(\lambda+\mu_2)(\mu_1+\mu_2)}.$$

При двуфазните системи заявката, преминала през втората фаза, се счита за обслужена. Поради това броят на преминалите заявки през втората фаза е броят на обслужените заявки.

Пример.

Развърнатите на местността радиолокационни постове са в състояние да разузнават и дават данни за 20 цели в минута ($m_1=20$). Командният пункт на радиотехническото поделение може да обработва данните за 20 въздушни цели при средно значение на времето за закъснение 2 минути, т. е. пропускателната способност на КП е 10 цели в минута ($m_2=\frac{20}{2}=10$ цели/минута). От оценката на въздушния противник се прави изводът, че налетът в изграденото радиолокационно поле е с плътност $\lambda=4$ цели в минута. Да се определи вероятността, че данните за всяка въздушна цел ще бъдат обработени и за нея своевременно ще бъдат оповестени активните средства за ПВО.

Решение.

$$P_{\text{обс}}=\frac{m_1.m_2(1+m_1+m_2)}{(\lambda+m_1)(\lambda+m_2)(m_1+m_2)}=\frac{20.10(1+20+10)}{(4+20)(4+10)(20+10)}=0{,}615,$$

където

m_1 — пропускателна способност на първата фаза;

m_2 — пропускателна способност на втората фаза;

λ — средна плътност на налета.

При изменение на m_1, m_2 и λ значенията на $P_{\text{обс}}$ са дадени в таблица 3.3.2.

От таблицата може да се направят следните изводи:

— при дадено λ пропускателната способност на радиолокационната система е най-добра, когато $m_1=m_2$;

— при дадено λ и при условие, че $m_2<m_1$, увеличаването на m_1 чрез развръщане на допълнителни радиолокационни постове не подобрява пропускателната способност на системата;

Таблица 3. 3. 2

λ	m_1	m_2	$P_{\text{обс}}$
4	20	10	0,615
4	20	15	0,677
4	20	20	0,712
4	25	10	0,633
4	30	10	0,646
6	20	10	0,497
3	20	10	0,691
3	20	20	0,775
3	20	15	0,745

— ако е заповядано пропускателната способност да не е по-малка от 75%, това се осигурява при $\lambda=3$, $m_1=20$, $m_2=15$ или още по-добре при $\lambda=3$, $m_1=20$ и $m_2=20$.

6.6. Системи за масово обслужване при входящ поток от групови заявки

При досега разгледаните системи за масово обслужване с отказ имаме ординарен входящ поток от заявки. Обаче в практиката са възможни случаи, когато заявките за обслужване постъпват към системата по двойки, по три или в групи със случаен брой заявки във всяка. Подхождайки към системата, всяка от заявките на групата или се обслужва, или получава отказ в зависимост от заетостта на приборите за обслужване.

Приемаме следните условия, при които ще работи системата за масово обслужване:

— потокът от групите заявки е най-прост със средна плътност λ групи в минута; във всяка група има по m заявки;

— времето за обслужване на всяка заявка в групата е случайна величина с показателно разпределение;

— изборът на заявки в групата се извършва случайно по закона за равната вероятност;

— системата включва в състава си n еднотипни прибори за обслужване с пропускателна способност $\mu = \frac{1}{t_{обс}}$.

Множеството състояния, в които може да се намира системата в процеса на обслужването на заявките, са:

x_0 — всички прибори за обслужване са свободни;

x_1 — само един от приборите е зает;

.

.

.

$x_к$ — само k от приборите са заети;

.

.

.

x_n — всички прибори са заети.

Вероятностите системата да се намира в своите състояния са съответно $P_0(t)$, $P_1(t)$ . . . . $P_к(t)$ . . . . $P_n(t)$.

За определянето им съставяме система от диференциални уравнения.

Състояние x_0. В състояние x_0 системата може да се окаже при сбъдването на две несъвместими събития (събитие A или събитие B):

A — в момента t всички прибори са свободни и за времето Δt не пристига следващата група заявки.

B — в момента t един от приборите е зает и за времето Δt той завършва обслужването и се освобождава.

При тези условия можем да запишем

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t).$$

Състояние x_k при $k \geq m$. В състоянне x_k системата може да се окаже при сбъдването на едно от три несъвместими събития (събитие A, събитие B или събитие C).

A — в момента t системата се намира в състояние x_k. За времето Δt нито един от заетите k канали не се освобождава и не пристига следващата група заявки.

B — в момента t системата се намира в състояние x_{k-m} и за времето Δt пристига следващата група от m заявки.

C — в момента t системата се намира в състояние x_{k+1} и за времето Δt се освобождава само един от заетите $k+1$ канали.

При тези условия можем да запишем

$$\frac{dP_k(t)}{dt} = \lambda P_{k-m}(t) - (\lambda - k\mu) P_k(t) + (k+1)\mu P_{k+1}(t).$$

Състояние x_k при $k < m$. В състояние x_k системата може да се окаже при сбъдването на две несъвместими събития (събитие A или събитие C). При условието $k < m$ системата не може да се намира в състояние x_{k-m} и следователно описаното събитие B не съществува.

A — в момента t системата се намира в състояние x_k и за времето Δt нито един от заетите k канали не се освобождава и не пристига следващата група заявки.

C — в момента t системата се намира в състояние x_{k+1} и за времето Δt се освобождава само един от заетите $k+1$ канали.

При тези условия можем да запишем

$$\frac{dP_k(t)}{dt} = -(\lambda + k\mu) P_k(t) + (k+1)\mu P_{k+1}(t).$$

Състояние x_n. В състояние x_n системата може да се окаже при сбъдването на едно от две несъвместими събития (събитие A или събитие B).

A — в момента t системата се намира в състояние x_n и за времето Δt не се освобождава нито един от заетите n канали и не пристига следващата група заявки.

B — в момента t системата се намира в състояние x_{n-m} и за времето Δt пристига следващата група заявки.

При тези условия можем да запишем

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = \lambda P_{n-m}(t) - (\lambda + n\mu) P_n(t).$$

Следователно получаваме следната система диференциални уравнения:

$$\left|\begin{array}{l}
\frac{dP_0(t)}{dt}=-\lambda P_0(t)+\mu P_1(t);\\
\text{— — — — — — — —}\\
\frac{dP_k(t)}{dt}=-(\lambda+k\mu)P_k(t)+(k+1)\mu P_{k+1}(t) \text{ при } k<m;\\
\frac{dP_к(t)}{dt}=\lambda P_{k-m}(t)-(\lambda+k\mu)P_к(t)+(k+1)\mu P_{k+1}(t) \text{ при } k\geq m;\\
\text{— — — — — — — — — — — — — — — — —}\\
\frac{dP_n(t)}{dt}=\lambda P_{n-m}(t)-(\lambda+n\mu)P_n(t).
\end{array}\right.$$

При установен режим на работа на системата, когато $P'_к(t)\to 0$ и $P_к(t)\to P_к$, като разделим всяко уравнение на μ, получаваме следната система алгебрични уравнения:

$$\left|\begin{array}{l}
aP_0=P_1;\\
(1+a)P_1=2P_2;\\
\text{— — — — —}\\
(k+a)P_к=(k+1)P_{k+1} \text{ при } k<m;\\
\text{— — — — — — — — — — —}\\
(k+a)P_k=(k+1)P_{k+1}+aP_{k-m} \text{ при } k\geq m;\\
\text{— — — — — — — — — — — — — —}\\
(n+a)P_n=aP_{n-m};\\
\sum\limits_{k=0}^{n} P_k=1.
\end{array}\right.$$

Тук

— $a=\frac{\lambda}{\mu}$;

— λ — средна плътност на групата заявки.

Последната формула от системата може да се представи във вида

$$\sum_{к=0}^{n} P_k=P_0\sum_{к=0}^{n} f_к(a)=1.$$

Оттук

$$P_0=\frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{n} f_k(a)}.$$

Величината $\sum\limits_{к=0}^{n} f_k(a)$ може да се изчисли от рекурентните формули на системата алгебрични уравнения.

$$P_{обс}=\frac{\mu\sum\limits_{k=1}^{n} kP_к}{\lambda.m},$$

където

— $P_{обс}$ — вероятността всяка заявка да бъде обслужена;

— $\mu\sum\limits_{k=1}^{n} k.P_k$ — математическото очакване на броя на обслужените заявки за единица време;

— $\lambda.m$ — среден брой заявки, пристигнали при системата за единица време.

Формулата за $P_{обс}$ може да се представи и във вида

$$P_{обс}=\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} k.P_к}{a.m},$$

където $a=\frac{\lambda}{\mu}$.

Средният брой на заетите прибори за обслужване се определя по формулата

$$M_k=\sum_{k=1}^{n} k.P_к.$$

Коефициентът за натовареност на отделния прибор се определя по формулата

$$\Delta T=\frac{M_к}{n}.$$

Пример.

Даден обект се прикрива от пет еднотипни зенитни комплекса ($n=5$). Средното значение на цикъла на стрелбата на зенитния комплекс е една минута ($\bar{t}_{цик}=1$ минута). От оценката на въздушния противник се прави изводът, че е най-вероятно ударът над обекта да се нанесе от около 20 самолета, действуващи в групи от по 4 самолета ($m=4$), при средна плътност на налета 2 групи в минута ($\lambda=2$).

Да се оцени ефективността на зенитното прикриване.

Решение.

$$n=5;\ \bar{t}_{цик}=\bar{t}_{обс}=1;\quad \mu=\frac{1}{\bar{t}_{обс}}=1;\ \lambda=2\ гр/min;$$

$$m=4;\quad a=\lambda.\bar{t}_{обс}=2.1=2\ групи.$$

Рекурентните зависимости са:

$$\left|\begin{array}{l} aP_0=P_1;\\ (1+a)P_1=2P_2;\\ (2+a)P_2=3P_3;\\ (3+a)P_3=4P_4;\\ (4+a)P_4=5P_5+aP_0. \end{array}\right| \qquad \left|\begin{array}{l} P_1=aP_0;\\ P_2=\frac{1}{2}(1+a)P_1;\\ P_3=\frac{1}{3}(2+a)P_2;\\ P_4=\frac{1}{4}(3+a)P_3;\\ P_5=\frac{1}{5}\left[(4+a)P_4-aP_0\right]. \end{array}\right|$$

Като заместим значенията на a, получаваме:

$P_1=2P_0;$

$P_2=\frac{1}{2}(1+2)2P_0=3P_0;$

$P_3=\frac{1}{3}(2+2)3P_0=4P_0;$

$P_4=\frac{1}{4}(3+2)4P_0=5P_0;$

$P_5=\frac{1}{5}\left[(4+2)5P_0-2P_0\right]=\frac{1}{5}\ 28P_0=\frac{28}{5}P_0;$

$$\sum_{k=0}^{n}P_k=1;\qquad \sum_{k=1}^{5}P_k=P_0\left(1+2+3+4+5+\frac{28}{5}\right)=\frac{103}{5}P_0;$$

$$1=\frac{103}{5}P_0;\qquad P_0=\frac{5}{103}\approx 0{,}049;$$

$P_1=2.\ \frac{5}{103}=0{,}102;$

$P_2=3.\ \frac{5}{103}=0{,}153;$

$P_3=4.\ \frac{5}{103}=0{,}207;$

$P_4=5.\ \frac{5}{103}=0{,}255;$

$P_5=\frac{4}{5}\ .\ \frac{5}{103}=0286;$

$$M_k=\sum_{k=1}^{5}k.P_k=3{,}47;$$

$$P_{обс}=\frac{\sum_{k=1}^{5}k.P_k}{a.m}=\frac{3{,}47}{8}=0{,}434;$$

$$\Delta T=\frac{M_k}{n}=\frac{3{,}47}{5}=0{,}694.$$

7. СИСТЕМИ ЗА МАСОВО ОБСЛУЖВАНЕ С ОГРАНИЧЕНО ВРЕМЕ ЗА ЧАКАНЕ

Системата за масово обслужване е система с изчакване. Ако при пристигането на заявката всички прибори за обслужване са заети, тя се нарежда и чака, докато се освободи някой от приборите.

Ако времето за чакане на заявката в реда е ограничено от някакви условия, системата се нарича система с ограничено време за чакане (система смесен тип). Това е междинен случай между чистата система с отказ и чистата система с изчакване.

Ограниченията на чакането в реда може да бъдат от различен тип. Съществува ограничение на времето за чакане, без то да влияе след това върху времето за обслужване на заявката. Например работата на едно хирургично отделение. На болния трябва да се окаже помощ не по-късно от определено време. Времето за чакане на болния не влияе върху времето за работа на хирурга.

В други системи съществува ограничение не конкретно на времето за чакане, а на общото време за престояване на заявката в системата (танкът в огневата зона на противниковата система).

Има системи, при които заявката застава в ред само ако продължителността на чакането не е по-голяма от определена величина. Такива системи са търговските магазини за стоки не от първа необходимост.

В системите с изчакване съществена роля играе така наречената дисциплина на реда, под която се разбира принципът за обслужване на чакащите заявки. Те може да бъдат обслужвани по реда на пристигането (справедлив принцип) или в случаен ред (случаен принцип). Съществуват системи, при които дадени заявки се обслужват с предимство пред другите заявки. Този принцип се прилага в свързочните възли, където донесенията и разпорежданията се предават според съответната серия на грамата.

Всеки тип система с изчакване има свои особености и своя математическа теория.

Нека разгледаме най-прост случай на смесена система.

Условията, при които работи системата, са:

— към нея постъпва най-прост поток от заявки със средна плътност λ;

— системата включва в състава си n еднотипни прибори с пропускателна способност $\mu=\frac{1}{\bar{t}_{\text{обс}}}$;

— времето за обслужване на заявката е случайна величина с показателно разпределение;

— заявката, заварила всички прибори заети, се нарежда в ред (на опашка) и чака да бъде обслужена;

— времето за чакане е ограничено до някакъв срок, например време $\bar{t}$ за чакане; ако до изтичането му заявката не бъде приета за обслужване от някой освободил се прибор, тя напуска системата необслужена.

Времето за чакане може да се приеме като случайна величина с показателно разпределение, при което

$$h(t)=\nu e^{-\nu t},\ (t>0),$$

където

— $h(t)$ — плътност на разпределение на случайната величина;

— $t_{\text{чак}}$ — времето за чакане;

— $\nu=\frac{1}{\bar{t}_{\text{чак}}}$; $\bar{t}_{\text{чак}}=M[t_{\text{чак}}]$.

Параметърът ν е аналогичен на параметрите λ и μ. С него се изразява плътността на потока на напусналите реда заявки поради изтичане на времето за чакане.

Очевидно е, че при $\nu\to\infty$ системата смесен тип се превръща в чиста система с отказ; при $\nu\to 0$ тя се превръща в чиста система с изчакване.

От условието, че времето за чакане в реда е случайна величина с показателно разпределение следва изводът, че

$$H(t_{\text{чак}}<\Delta t)=1-e^{-\nu\Delta t};$$

$$H(t_{\text{чак}}\geq\Delta t)=e^{-\nu\Delta t}.$$

С първата формула се изчислява вероятността, че за времето Δt, което започва да тече след произволно избрания момент t, заявката ще напуене реда необслужена.

С втората формула се изчислява вероятността, че за времето Δt заявката няма да напусне реда.

Множеството състояния, в които може да се намира системата в процеса на работата, са:

x_0 — всички канали в момента са свободни и няма ред от заявки;

x_1 — само един канал е зает и няма ред от заявки;

.
.
.

x_k — заети са k канали и няма чакащи заявки;

.
.
.

x_n — всички канали са заети и няма чакащи заявки;

x_{n+1} — заети са всичките n канали и една заявка чака на реда;

x_{n+s} — заети са всичките n канали и s заявки чакат на реда;

Ако броят на заявките в реда не е ограничен, системата има безкраен брой състояния.

Очевидно е, че първите n диференциални уравнения по нищо няма да се отличават от съответните уравнения на Ерланг.

Различията на новите уравнения от уравненията на Ерланг започват при $k=n$. Действително в състояние x_n системата с изчакване може да премине не само от състояние x_{n-1}, а и от състояние x_{n+1}.

Да изчислим $P_{n+s}(t+\Delta t)$ при всяко $s>0$, т.е. вероятността, че в момента t и за времето Δt всичките канали ще бъдат заети и точно s заявки ще чакат на ред (на опашка). Това събитие може да се сбъдне чрез три събития (или чрез A, или чрез B, или чрез C):

A — в момента t системата се намира в състояние x_{n+s} и за времето Δt нито една заявка не пристига, нито един канал не се освобождава и нито една от чакащите на ред заявки не напуска реда;

B — в момента t системата е в състояние x_{n+s-1} и за времето Δt пристига следващата заявка, при което системата преминава в състояние x_{n+s};

C — в момента t системата е в състояние x_{n+s+1} и за времето Δt един от заетите n канали се освобождава или пък една от $s+1$ заявки, стоящи на опашка, напуска реда поради изтичане на времето ѝ за чакане, при което системата преминава в състояние x_{n+s}.

Като използуваме теоремите за събиране и умножение на вероятности, получаваме:

$$\frac{dP_{n+s}(t)}{dt}=\lambda P_{n+s-1}(t)-(\lambda+n\mu+s\nu)P_{n+s}(t)+\left[n\mu+(s+1)\nu\right]P_{n+s+1}(t).$$

По този начин получаваме за вероятностите на състоянията на системата безкраен брой диференциални уравнения:

$$\left|\begin{array}{l}
\frac{dP_0(t)}{dt}=-\lambda P_0(t)+\mu P_1(t);\\
\frac{dP_k(t)}{dt}=\lambda P_{k-1}(t)-(\lambda+k\mu)P_k(t)+(k+1)\mu P_{k+1}(t);\\
\frac{dP_n(t)}{dt}=\lambda P_{n-1}(t)-(\lambda+n\mu)P_n(t)+(n\mu+\nu)P_{n+1}(t);\\
\frac{dP_{n+s}(t)}{dt}=\lambda P_{n+s-1}(t)-(\lambda+n\mu+s\nu)P_{n+s}(t)+\left[n\mu+(s+1)\nu\right]P_{n+s+1}(t)
\end{array}\right.$$

При установен режим на работа на системата $P_k(t)\to P_k$ $(k=0,1,2,\ldots,n,\ldots)$ и $P'_k(t)\to 0$ от системата диференциални уравнения получаваме система алгебрични уравнения:

$$\left|\begin{array}{l}
-\lambda P_0+\mu P_1=0;\\
\lambda P_0-(\lambda+\mu)P_1+2\mu P_2=0;\\
\lambda P_{k-1}-(\lambda+k\mu)P_k+(\kappa+1)\mu P_{k+1}=0;\\
\lambda P_{n-1}-(\lambda+n\mu)P_n+(n\mu+\nu)P_{n+1}=0;\\
\lambda P_{n+s-1}-(\lambda+n\mu+s\nu)P_{n+s}+\left[n\mu+(s+1)\nu\right]P_{n+s+1}=0;
\end{array}\right.$$

Като решим системата алгебрични уравнения, получаваме следните формули:

$$P_k=\frac{a^\kappa}{k!}.P_0\ (0<\kappa\leq n),$$

$$P_{n+s}=\frac{\frac{a^{n+s}}{n!\,s}}{\prod_{m=1}^{s}(n+m\beta)}.P_0\quad(s\geq 1),$$

$$P_0=\frac{1}{\sum_{k=0}^{n}\frac{a^\kappa}{k!}+\frac{a^n}{n!}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{a^s}{\prod_{m=1}^{s}(n+m\beta)}},$$

където

— P_k — вероятността, че в момента са заети k от каналите на системата и няма ред от заявки;

— P_{n+s} — вероятността, че в момента са заети всичките n канали и s заявки чакат на ред;

— P_0 — вероятността, че всички канали са свободни;

— $a=\frac{\lambda}{\mu}=\lambda.\bar{t}_{\text{обс}}$;

— $\beta=\frac{\nu}{\mu}=\nu.\bar{t}_{\text{обс}}$.

Основните показатели за оценка на работата на системата са:

1. Таблицата с вероятностите системата да се намира в своето множество състояния. За целта се използуват дадените по-горе формули.

2. Математическото очакване на броя на заявките, които чакат на опашка, т.е.

$$m_s=\sum_{s=1}^{\infty}s.P_{n+s}=\frac{a^n}{n!}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{s.a^s}{\prod_{m=1}^{s}(n+m\beta)}.P_0.$$

3. Вероятността, че дадена заявка няма да бъде обслужена, т. е.

$$P_{\text{отк}}=m_S\frac{\nu}{\lambda}=ms\frac{\frac{\nu}{\mu}}{\frac{\lambda}{\mu}}=m_s\frac{\beta}{a}.$$

4. Вероятността, че всяка заявка ще бъде обслужена, т. е

$$P_{\text{обс}}=1-P_{\text{отк}}=1-m_s\frac{\beta}{a}.$$

5. Средното значение на времето за чакане на дадена заявка на опашката, т. е.

$$\bar{t}_{\text{ч.о.}}=\frac{m_s}{\lambda}.$$

При изчисляването на P_0 и m_s може да се използуват формулите:

$$\sum_{s=r}^{\infty}\frac{a^s}{\prod_{m=1}^{s}(n+m\beta)}<\frac{\left(\frac{a}{\beta}\right)^r}{r!}e^{\frac{a}{\beta}};\quad\sum_{s=r}^{\infty}\frac{s.a^s}{\prod_{m=1}^{s}(n+m\beta)}<\frac{\left(\frac{a}{\beta}\right)^r}{(r-1)!}e^{\frac{a}{\beta}}.$$

Пример:

Да се изследва пропускателната способност на полкови медицински пункт.

Функционират четири канала за обслужване на ранените ($n=4$). Средното време за обслужване на един ранен е 10 min ($\bar{t}_{\text{обс}}=10$). Раненият боец не бива да чака на опашка повече от 20 min. Средната плътност на потока от нуждаещите се от медицинска помощ е 24 човека на час.

Решение:

Параметрите на медицинския пункт като система за масово обслужване смесен тип са:

$$n=4;\quad\lambda=\frac{24}{60}=0{,}4\ \text{чов./min};\quad\mu=\frac{1}{\bar{t}_{\text{обс}}}=\frac{1}{10}=0{,}1;$$

$$t_{\text{чак}}=20\ \text{min};\quad\nu=\frac{1}{\bar{t}_{\text{чак}}}=\frac{1}{20}=0{,}05;\quad a=\frac{\lambda}{\mu}=\frac{0{,}4}{0{,}1}=4;$$

$$\beta=\frac{\nu}{\mu}=\frac{0{,}05}{0{,}1}=0{,}5.$$

През по-голямата част от денонощието ще бъдат заети в работа $\bar{k}$ канала

$$\bar{k}=\sum_{k=1}^{4}k.P_k+4\sum_{s=1}^{\infty}P_{4+s}\approx 3.$$

Вероятността, че всеки болен ще получи навременна медицинска помощ, е

$$P_{\text{обс}}=\frac{\mu.\bar{k}}{\lambda}=\frac{\bar{k}}{\frac{\lambda}{\mu}}=\frac{3}{4}=0{,}75.$$

Средният брой на чакащите на опашка болни ще бъде:

$$m_s=\sum_{s=1}^{\infty}s.P_{n+s}\approx 1{,}3.$$

Средната продължителност на времето за чакане на болния на опашка ще бъде

$$\bar{t}_{\text{ч.о.}}=\frac{m_s}{\lambda}=\frac{1,3}{0,4}=3,25\,\text{min.}$$

Средното време за получаване на медицинска помощ от полковия медицински пункт ще бъде:

$$\bar{t}=\bar{t}_{\text{обс}}+\bar{t}_{\text{ч.о.}}=10+3,25=13,25\ \text{min.}$$

Средното време за отдих на отделния канал за медицинско обслужване (един лекар или група от хора) в денонощието ще бъде:

$$\bar{t}_{\text{отдих}}=\left(1-\frac{\bar{k}}{n}\right).24=\left(1-\frac{3}{4}\right).24=6\ \text{часа.}$$

8. СИСТЕМИ ЗА МАСОВО ОБСЛУЖВАНЕ С НЕОГРАНИЧЕНО ВРЕМЕ ЗА ЧАКАНЕ

Ако имаме система с изчакване, при която времето за чакане в реда не е ограничено, тя се нарича чиста система с изчакване.

Очевидно е, че при този тип система ще имаме $t_{\text{чак}}\to\infty$, откъдето $\nu=\frac{1}{t_{\text{чак}}}\to 0$ и $\beta=\frac{\nu}{\mu}\to 0$.

При чистите системи с изчакване, ако $a\geq n$, имаме процес на непрекъснато увеличаване на броя на заявките, които се нареждат на опашката. Когато $a<n$, такъв процес няма да имаме. Следователно практически интерес за нас имат системите, при които условията за работа са такива, че $a<n$. При тази система няма да има непрекъснато нарастване на опашката от заявки и тя е с краен брой състояния.

При системите с ограничено време за чакане имаме

$$P_0=\frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{a^k}{k!}+\frac{a^n}{n!}\sum\limits_{s=1}^{\infty}\frac{a^s}{\prod\limits_{m=1}^{s}(n+m\beta)}}.$$

При чистите системи с изчакване, където $\beta\to 0$, имаме

$$P_0=\frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{a^k}{k!}+\frac{a^n}{n!}\sum\limits_{s=1}^{\infty}\frac{a^s}{n^s}}.$$

При системите, където $a<n$, имаме:

$\sum\limits_{s=1}^{\infty}\left(\frac{a}{n}\right)^s$ — сума от безкрайно намаляваща геометрична прогресия, при която първият член $a_1=\frac{a}{n}$ и $q=\frac{a}{n}$.

Полагаме $S=\sum\limits_{s=1}^{\infty}\left(\frac{a}{n}\right)^s=\lim\limits_{n\to\infty}S_n$;

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}a_1\frac{1-q^n}{1-q}=\frac{a_1}{1-q};$$

$$S=\frac{a_1}{1-q}=\frac{\frac{a}{n}}{1-\frac{a}{n}}=\frac{a}{n-a}.$$

Оттук

$$P_0=\frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{a^k}{k!}+\frac{a^n}{n!}\cdot\frac{a}{n-a}}=\frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{a^k}{k!}+\frac{a^{n+1}}{n!(n-a)}}.$$

Основните показатели за работата на системата са:

1. Таблицата с вероятностите системата да се намира в своето множество състояния. За целта се използуват формулите:

$$P_k=\frac{a^k}{k!}P_0\quad(0\leq k\leq n),$$

$$P_{n+s}=\frac{a^{n+s}}{n!n^s}P_0\ \text{ за }\ k=n+s\ \ (s\geq 1),$$

където:

P_k е вероятността да бъдат заети k канала и да няма ред от заявки;

P_{n+s} — вероятността да бъдат заети всички n канала и s заявки да чакат на опашка.

2. Математическото очакване на броя на заявките, наредили се на опашка е

$$m_s = \frac{a^{n+1}}{n!n\left(1-\frac{a}{n}\right)^2} P_0.$$

3. Средното значение на времето за чакане на заявката на опашка е

$$\bar{t}_{ч.о.} = \frac{m_s}{\lambda}.$$

При тези системи вероятността за обслужване $P_{обс}=1$.

Първи пример:

Между два командни пункта от системата на ПВО е устроена триканална свръзка за командуване. При отразяване на масиран въздушен удар на противника от старшия команден пункт постъпва най-прост поток от команди и разпореждания със средна плътност $\lambda=4$ команди/минута. Средната продължителност на предаването на една команда по канала е $\bar{t}_{обс}=0{,}5$ минута.

Да се оцени устроената триканална свръзка, осигуряваща непрекъснато бойно управление.

Решение:

$$\lambda=4;\quad \bar{t}_{обс}=0{,}5;\quad n=3;\quad a=\lambda.\bar{t}_{обс}=4.0{,}5=2;$$
$$a<n.$$

Вероятността да се получи ред от чакащи за предаване команди е:

$$P_{ред}=1-(P_0+P_1+P_2+P_3);$$

$$P_0=\frac{1}{\sum_{k=0}^{3}\frac{2^k}{k!}+\frac{2^{3+1}}{3!(3-2)}}=\frac{1}{9}\approx 0{,}111;$$

$$P_1=\frac{2^1}{1!}\cdot\frac{1}{9}=0{,}222;\quad P_2=\frac{2^2}{2!}\cdot\frac{1}{9}=0{,}222;\quad P_3=\frac{2^3}{3!}\cdot\frac{1}{9}=0{,}148;$$

$$P_{ред}=1-(0{,}111+0{,}222+0{,}222+0{,}148)=0{,}297.$$

Математическото очакване на броя на чакащите в ред команди е:

$$m_s=\frac{2^{3+1}}{3.3!\left(1-\frac{2}{3}\right)^2}\cdot\frac{1}{9}=0{,}89 \text{ команди.}$$

Изводи: 1. В 30% от времето за отразяване на въздушния налет ще има ред от чакащи за предаване команди.

2. Средният брой на чакащите за предаване команди е една команда.

Втори пример:

Една автозарядна станция има 4 зареждащи колонки. Една кола се зарежда с гориво за около 3 минути. На автозарядната станция пристигат моторни превозни средства за зареждане със средна плътност на потока 1 машина/минута. Всяка машина, застанала на реда за зареждане, търпеливо изчаква, докато бъде заредена.

Да се анализира работата на автозарядната станция.

Решение:

$$n=4;\quad \bar{t}_{обс}=3 \text{ min};\quad \lambda=1;\quad a=1.3=3;\quad a<n;$$

$$P_{обс}=1;\quad P_{обс}=\frac{\mu\bar{k}}{\lambda}, \text{ откъдето } \bar{k}=P_{обс}\,\frac{\lambda}{\mu}.$$

През по-голямата част от денонощието ще работят $\bar{k}$ колонки, т.е.

$$\bar{k}=1.\frac{1}{\frac{1}{3}}=3 \text{ колонки;}$$

$$P_0=\frac{1}{\sum_{k=0}^{4}\frac{3^k}{k!}+\frac{3^{4+1}}{4!(4-3)}}=0{,}038.$$

Средният брой коли, чакащи на опашка, ще бъде:

$$m_s=\frac{3^5}{4.4!\left(1-\frac{3}{4}\right)^2}.0{,}038\approx 1{,}539 \text{ коли.}$$

Средната продължителност на времето за чакане на колата ще бъде:

$$\bar{t}_{ч.о.}=\frac{m_s}{\lambda}=\frac{1{,}5}{1}=1{,}5 \text{ min.}$$

Средната продължителност на времето за престояване на дадена кола в района на автозарядната станция ще бъде:

$$\bar{t}=\bar{t}_{\text{обс}}=\bar{t}_{\text{ч.о.}}=3+1{,}5=4{,}5 \text{ min.}$$

9. ЗАТВОРЕНИ СИСТЕМИ ЗА МАСОВО ОБСЛУЖВАНЕ

На практика съществуват много системи, при които заявките, обслужени от системата, отново се включват във входящия поток от заявки, като го допълват. Подобни задачи се срещат при експлоатацията на бойната техника. Излязлата от строя техника изисква ремонт. Ремонтирането се извършва от няколко работилници или от няколко потока в дадена работилница. След ремонта дадената единица бойна техника се връща отново в строя и отново се установява като потенциален източник на нова заявка за ремонт. В случая ремонтните органи действуват като затворена система за масово обслужване.

Схематично работата на затворената система за масово обслужване е представена на фиг. 3.3.15.

Условията, при които работи такъв тип система, са:

— системата включва в състава си n еднотипни прибори за обслужване;

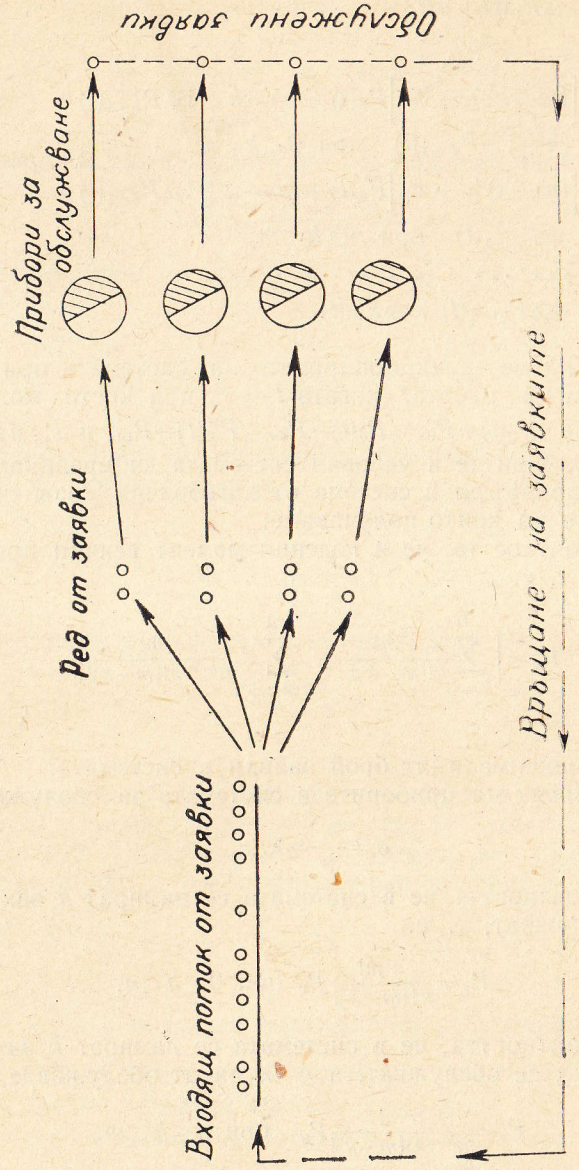
— всеки прибор може едновременно да обслужва само една заявка;

— пропускателната способност на приборите е зададена с параметъра $\mu=\frac{1}{\bar{t}_{\text{обс.}}}$; времето за обслужване е случайна величина с показателно разпределение;

— в системата постъпва най-прост поток от заявки със средна плътност λ; потокът се формира от ограничен брой източници, поради което в системата може да се намират не повече от m заявки;

— при постъпване на заявката, ако един от приборите е свободен, тя веднага бива поета за обслужване; ако всички прибори са заети, заявката се нарежда в ред и чака дотогава, докато един от приборите се освободи, за да бъде обслужена.

Всевъзможните състояния на системата се описват със системата от диференциални уравнения:



Фиг. 3.3.15

$$
\begin{cases}
\dfrac{dP_0(t)}{dt} = -m\lambda P_0(t) + \mu P_1(t); \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\dfrac{dP_к(t)}{dt} = -\left[(m-k)\lambda + k\mu\right]P_к(t) + (m-k+1)\lambda P_{к-1}(t) + \\
\qquad + (k+1)\mu P_{к+1}(t) \quad \text{при } 0<k<n; \\
\dfrac{dP_к(t)}{dt} = -\left[(m-к)\lambda + n\mu\right]P_к(t) + (m-к+1)\lambda P_{к-1}(t) + \\
\qquad + n\mu P_{к+1}(t) \quad \text{при } n \le k < m; \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\dfrac{dP_m(t)}{dt} = -\lambda P_{m-1}(t) + n\mu P_m(t).
\end{cases}
$$

Разглеждаме функционирането на системата при установен режим на работа, когато $t \to \infty$, при което може да се приеме, че $P_0(t) \to P_0$, $P_k(t) \to P_k$, $P_m(t) \to P_m$ и $P_0'(t) = P_k'(t) = P_m'(t) = 0$. При тези условия системата диференциални уравнения се превръща в система от алгебрични уравнения, при решаването на които получаваме:

1. Вероятността, че в дадения момент всички прибори са свободни, т. е.

$$P_0 = \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{a^k m!}{k!(m-k)!} + \sum_{k=n+1}^{m} \frac{a^k m!}{n^{k-n} n!(m-k)!}\right]^{-1},$$

където:

m е максималният брой заявки в системата;

n — броят на приборите в системата за обслужване.

$$a = \frac{\lambda}{\mu} = \lambda . \overline{t}_{\text{обс.}}$$

2. Вероятността, че в системата се намират k заявки, които се обслужват, т. е.

$$P_k = \frac{a^k m!}{k!(m-k)!} P_0 \text{ при } 0 \le k < n.$$

3. Вероятността, че в системата се намират k заявки, като n от тях се обслужват, а $к-n$ чакат обслужване, т. е.

$$P_k = \frac{a^k m!}{n^{k-n} n!(m-k)!} P_0 \quad \text{при } n \le k \le m.$$

4. Средния брой на заявките, чакащи обслужване, т. е.

$$M_{\text{чак}} = \sum_{к=n+1}^{m} \frac{(k-n)a^k m!}{n^{k-n} n!(m-k)!} P_0.$$

5. Процента на чакащите за обслужване заявки, т. е.

$$K_{\text{ч.з.}} = \frac{M_{\text{чак.}}}{m} . 100.$$

6. Средния брой заявки, намиращи се в системата за обслужване. т. е.

$$M = M_{\text{чак}} + \sum_{k=1}^{n} \frac{k . a^k . m!}{k!(m-k)!} P_0.$$

7. Средния брой на свободните прибори при установен режим на обслужването. т. е.

$$N_0 = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k)a^k m!}{k!\,(m-k)!} P_0.$$

8. Коефициента за престой на приборите без работа, т. е

$$K_{\text{п}} = \frac{N_0}{n}.$$

Първи пример.

Разполагаме с $n=3$ подвижни работилници. На огневите позиции са развърнати и действуват 10 радиолокационни станции от тип „П“. Приемаме, че времето за обслужване е случайна величина с показателно разпределение с параметър μ, където $\mu = \frac{1}{\overline{t}_{\text{р}}}$.

Тук $\overline{t}_{\text{р}} = \overline{t}_{\text{изв}} + \overline{t}_{\text{дв}} + \overline{t}_{\text{пр}} + \overline{t}_{\text{раз}} + t_{\text{съб}} + \overline{t}_{\text{рем}}$;

$\overline{t}_{\text{изв}}$ — средно време за извикване на работилницата;

$\overline{t}_{\text{дв}}$ — средно време за движение на работилницата;

$\overline{t}_{\text{пр}}$ — средно време за преглед на РЛС;

$\overline{t}_{\text{раз}}$ — средно време за развръщане на работилницата;

$\overline{t}_{\text{съб}}$ — средно време за събиране на работилницата;

$\overline{t}_{\text{рем}}$ — средно време за ремонт на РЛС;

$t_р$ — средно сумарно време, необходимо за извършване на ремонт на дадена радиолокационна станция.

По статистически данни за извикване на работилницата и ремонт на РЛС са необходими средно 6 дни, т. е. $\mu=\frac{30}{6}=5$ РЛС /месец. Потокът на заявките за ремонт е ограничен от десетте зенитни комплекса, въоръжени с РЛС тип „П“. Приемаме, че потокът от заявки за ремонт е най-прост поток със средна плътност $\lambda=1$ РЛС/месец.

Щом постъпи заявка за ремонт на РЛС, свободната работилница веднага тръгва за съответната позиция. Ако всичките работилници са заети, излязлата от строя станция чака реда си за ремонт.

Решение:

$$a=\frac{\lambda}{\mu}=\frac{1}{5}=0{,}2;\quad n=3;\quad m=10;$$

$$P_0=\left[\sum_{k=0}^{3}\frac{0{,}2^k\cdot 10!}{k!(10-k)!}+\sum_{k=3+1}^{10}\frac{0{,}2^k\cdot 10!\ ^5}{3^{10-3}3!(10-k)!}\right]^{-1}=0{,}1548;$$

$$P_1=\frac{0{,}2^1\cdot 10!}{1!(10-1)!}\cdot 0{,}1548=0{,}3096;$$

$$P_4=\frac{0{,}2^4\cdot 10!}{3^{4-3}3!(10-4)!}\cdot 0{,}1548=0{,}0693.$$

Вероятностите на състоянията на системата са дадени в таблица 3.3.3.

От таблицата следва:

а) вероятността всички работилници да са свободни е $P_0=0{,}1555$. Това означава, че 15,5% от месеца (5 дни) работилниците ще бъдат свободни и техническият персонал може да се занимава с други работи;

б) средният брой на чакащите за ремонт РЛС е $M_{чак}=0{,}16$. Оттук процентът на чакащите за ремонт РЛС е

$$K_{ч.з.}=\frac{0{,}16}{10}\cdot 100=1{,}6\%;$$

в) средният брой на свободните работилници е $N_0=1{,}36$. Оттук процентът на времето за престой без работа е

$$K_п=\frac{1{,}36}{3}\cdot 100=45{,}333\%;$$

Таблица 3. 3. 3

K	$\frac{P_k}{P_0}$	P_k	$к.P_k$	$(к-n)\ P_k$	$(n-к)\ P_k$
1	2	3	4	5	6
0	1	0,1548	0	—	0,4644
1	2	0,3096	0,3096	—	0,6192
2	1,8	0,2786	0,5572	—	0,2786
3	0,96	0,1486	0,4558	—	—
4	0,448	0,0693	0,2772	0,0693	—
5	0,179	0,02777	0,1385	0,0554	—
6	0,056	0,0087	0,0522	0,0261	—
7	0,012	0,0018	0,0126	0,0261	—
8	0,0025	0,0004	0,0032	0,0020	—
9	0,0004	0,0001	0,0009	0,0006	—
10	0	0	0	0	—
Всичко	6,4579	0,9996	1,7972 M	0,1606 $M_{чак}$	1,3622 N_0

г) средният брой на небоеспособните РЛС (тези, които се ремонтират, и тези, които чакат за ремонт) е $M=1{,}797$. Оттук процентът на небоеспособните РЛС е

$$K=\frac{M}{m}\cdot 100=\frac{1{,}79}{10}\cdot 100=17{,}9\%.$$

Втори пример.

При бойна обстановка рязко нараства интензивността на излизане от строя на РЛС. Да приемем, че при тези условия потокът на заявките за ремонт увеличава плътността си 5 пъти, т. е.

$$a_2=5\cdot a_1=5\cdot 0{,}2=1.$$

Таблица 3. 3. 4

Значение на a	P_0	$M_{чак}$	$K_{ч.з.}$, %	N_0	$K_п$, %	M	K, %
0,2	0,1555	0,16	1,6	1,36	46	1,798	17,98
1,00	0,0005	4,02	40,2	0,012	0,4	7,8	70

В таблица 3.3.4. са дадени сравнителните резултати при двете плътности на потока: при $\lambda=1$ РЛС/месец и при $\lambda=5$ РЛС/месец.

От значенията на P_0, N_0 и $K_п$ е очевидно, че натовареността на работилниците се увеличава. При $a=1$ инженерите и техниците практически няма да имат свободно време. Независимо от това процентът на небоеспособните РЛС рязко се увеличава (от 18 на 70%). В този случай наличният брой подвижни работилници явно е недостатъчен за осигуряване на ремонта на РЛС.

Глава четвърта

МЕТОД НА СТАТИСТИЧЕСКИТЕ ИЗПИТАНИЯ (МОНТЕ КАРЛО)

Методът на статистическите изпитания е числен метод за решаване на математически задачи чрез моделиране на случайни величини.

Теоретичната му основа е известна доста отдавна, като някои задачи по статистика са решавани понякога чрез методи, които по нищо не се отличават от метода на статистическите изпитания.

По същество възникването на този метод като универсален стана възможно само след появата на ЕИМ, тъй като ръчното моделиране на случайни величини изисква много време и труд.

Методът на статистическите изпитания е известен още под името „Монте Карло“, което произлиза от известния с многото играли домове град Монте Карло в княжество Монако. Но той с нищо не подпомага и не се занимава с въпроса да се спечели или загуби в дадена игра. В този метод се използува един от простите механични прибори за получаване на случайни величини (кръг със случайни числа и стрелка или рулетка), който се използува в игралните домове на Монте Карло.

В Съветския съюз и у нас този метод е известен като метод на статистическите решения.

Всяка математическа наука, в това число и методът на статистическите изпитания, съдържа редица основни понятия, които се използуват при излагане на съдържанието. Методът на статистическите изпитания използува основните понятия на теорията на вероятностите като събитие, вероятност на събитието, случайна величина и закони за разпределението на случайната величина.

1. СЪЩНОСТ НА МЕТОДА НА СТАТИСТИЧЕСКИТЕ ИЗПИТАНИЯ И ИЗПОЛЗУВАНЕТО МУ ВЪВ ВОЕННОТО ДЕЛО

1.1. Същност на метода

Метод на статистическите изпитания се нарича всяка процедура, при която се решават приблизително различни задачи чрез построяване на модел с използуване на жребий (случайни реализации). При него търсените величини се определят като вероятностни характеристики на построения модел.

Основната идея на метода се състои в използуване на тясната връзка между вероятностните характеристики на различни случайни процеси (вероятности или моменти) и величините, които са решения на поставената задача. Те не се пресмятат по формули, а се определят опитно, като вероятност на някакво събитие или средна стойност на някакви случайни величини. Например, ако трябва да се пресметне стойността на някаква величина, която зависи по много сложен начин от други величини, практически е невъзможно определянето ѝ. Ако обаче търсената величина е равна на вероятността на някакво случайно събитие или на средната стойност на случайна величина, целесъобразно е да се използува методът на статистическите решения за пресмятането ѝ.

Същността на метода на статистическите изпитания се заключава в построяването на модел на изследвания процес с помощта на случайни реализации, определянето на вероятностните му характеристики и приемането им за равни на величините, които са решения на поставените задачи.

Съгласно с граничните теореми на теорията на вероятностите, при увеличаване на броя на опитите честотата на сбъдването на събитието клони към вероятността на събитието. Аналогично средното аритметично число на наблюдаваните стойности на случайната величина клони към средната ѝ стойност.

По такъв начин търсената величина е приблизително равна на средната аритметична стойност на наблюдаваните стойности на случайната величина или на честотата на събитието.

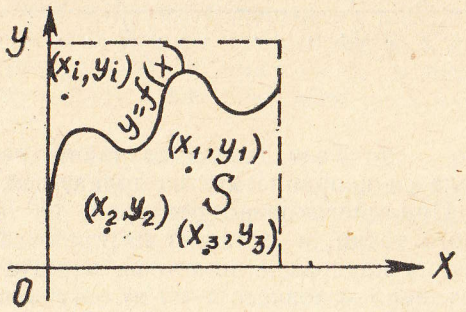
Нека тази същност на метода поясним със следните опростени примери.

Пример 1. Даден е единичен квадрат със страни $x=1$ и $y=1$. Част от площта на квадрата е ограничена с кривата $y=f(x)$. Да се определи лицето на площта S, ограничена от абсцисната ос OX, ординатите при $x=0$ и $x=1$ и кривата $y=f(x)$ (фиг.3.4.1).

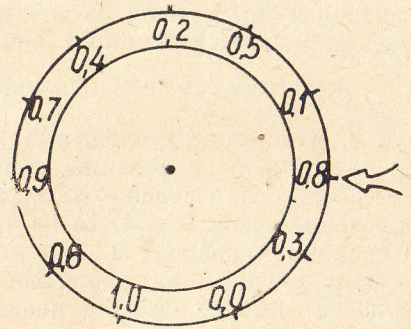
От математическия анализ лицето на площта S се определя по формулата

$$S=\int_0^1 f(x)dx.$$

Да видим как може да се определи търсената величина S с помощта на метода на статистическите изпитания, без да се използува горната формула.



Фиг. 3.4.1



Фиг. 3.4.2

За да се реши задачата, необходимо е да се получат случайни реализации. За тази цел се построява кръг със случайни числа, разпределени по закона за равната вероятност и заключени между 0 и 1 (фиг. 3.4.2). За да бъдат числата разпределени по този закон, трябва да има еднакъв брой повторения, т. е. ако 0,4 е записано три пъти на кръга, всич-

ки останали числа от 0 до 1 трябва също да са записани по три пъти. Това осигурява с еднаква вероятност да се получава което и да е число, заключено между 0 и 1.

За създаване на модел на лицето на площта S и единичния квадрат участвуват двете случайни величини x и y, които определят точки, лежащи в единичния квадрат. При първото завъртване на кръга се получава случайното число x_1,

X	x_1 , x_2 , x_3 . . . . . x_i . . . . . x_n
Y	y_1 , y_2 , y_3 . . . . . y_i . . . . . y_n

Фиг. 3.4.3

а при второто — y_1. Тази двойка случайни, независими едно от друго числа са координатите на точка, лежаща в единичния квадрат. При многократно повтаряне на този процес се получават много точки, в резултат на което се създава модел на единичния квадрат и лицето на площта S (фиг. 3.4.3).

Ако е изпълнено условието $y_i<f(x)$, случайно получената точка в единичния квадрат лежи под кривата $y=f(x)$, т. е. в площта S. Следователно след много опити с достатъчна точност може да се определи вероятностната характеристика на модела като отношение на броя на точките m, лежащи под кривата $y=f(x)$, към всички точки от единичния квадрат n, т. е. $P=\frac{m}{n}$ — вероятността за получаване на точка под кривата $y=f(x)$, т. е. в лицето на площта S.

В резултат на случайните реализации, получавани от кръга на случайните числа, разпределени по закона за равната вероятност и заключени между 0 и 1, се построява модел на общата площ на единичния квадрат и лицето на площта S. Отношението на двете площи дава вероятностната характеристика. Остава да се приеме, че тя е равна на търсената величина, т. е.

$$P=S.$$

С това задачата по определяне на лицето на площта по метода на статистическите изпитания е решена.

Числен пример. Направени са 6000 опита за получаване на точки в единичния квадрат, разпределени равномерно. От тях 3600 са се получили под кривата $y=f(x)$, т. е. в площта S. Да се определи лицето на площта.

Решение:

$$S=P=\frac{m}{n}=\frac{3600}{6000}=0{,}6.$$

Това означава, че ако страната на квадрата е 1 m, лицето $S=0{,}6\ \text{m}^2$, а ако е 1 km, лицето $S=0{,}6\ \text{km}^2$.

На практика за изчисляване на площи на плоски фигури, както в посочения пример, методът на статистическите изпитания не се използува, тъй като има други, които, макар и по-сложни, осигуряват по-голяма точност.

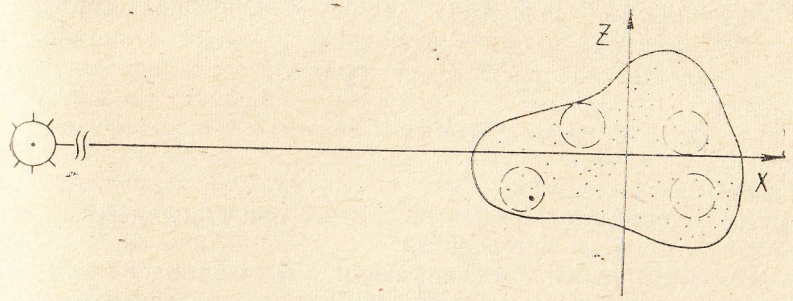
Методът на статистическите изпитания позволява по прост начин да се изчислява обемът на многомерни пространства, които често пъти изобщо не може да се решат с помощта на аналитичните методи, и той единствен дава възможност да се получи решение.

За да стане по-ясна същността на метода на статистическите изпитания, нека разгледаме още един пример.

Пример 2. По танков батальон на противника, разположен в района за съсредоточаване, се нанася ядрен удар с определена мощност на ядрения заряд. Да се определи математическото очакване на броя на поразените танкове.

Решение:

Танковете на противника в района за съсредоточаване са разпределени по случаен начин. С помощта на случайни числа, разпределени по закона за равната вероятност, може да се определи мястото на отделните танкове (фиг. 3.4.4).



Фиг. 3.4.4

Математическото очакване на случайната величина се определя след опита. Това предполага при определяне на средния брой танкове, поразени от ядрения удар, да се организира стрелба и многократно да се повтори, за да се види

при отделните стрелби колко танка се поразяват. Това не е изгодно, тъй като един такъв експеримент струва много скъпо. Затова задачата може да се реши чрез построяване на модел на стрелбата с помощта на случайни реализации и се определи търсената величина.

X	$x_1, x_2, x_3 \ldots x_i \ldots x_n$
Z	$z_1, z_2, z_3 \ldots z_i \ldots z_n$

Фиг. 3.4.5

За моделиране на точките на падане на ракетите по танковия батальон е необходимо да се разполага със случайни числа, разпределени по нормалния закон. Точките на падане са случайни величини и се определят от случайните грешки в разстоянието X и в направлението Z, независими помежду си (фиг. 3.4.5).

Случайните числа x_1 и z_1 определят точката на падане на ракетата при първия изстрел, x_2 и z_2 — при втория, x_3 и z_3 — при третия, x_n и z_n — при последния изстрел.

Броят на поразените танкове при отделните удари се определя чрез очертаване на зоната за поразяване — кръг с радиус, равен на условния радиус на поражение (R_3), в който всички танкове се поразяват с вероятност 1. За определяне на средния брой поразени танкове се използува формулата

$$M(N)=\frac{\sum_{i=1}^{n} N_i}{n},$$

където:

N_i — брой на поразените танкове при отделните изстрели;

n — брой на изстрелите.

По такъв начин чрез случайни реализации се построява модел на стрелбата, определя се броят на поразените танкове при отделната стрелба и се изчислява средният им брой.

Числен пример. По района за разполагане на танков батальон на противника се планира да се нанесе удар с ракета с мощност на ядрения заряд 20 kt. Да се определят очакваните загуби (средният брой на поразените танкове), ако при отделните удари са получени следните резултати:

$N_1=3$, $N_2=7$, $N_3=4$, $N_4=5$, $N_5=2$, $N_6=5$, $N_7=7$, $N_8=12$, $N_9=6$, $N_{10}=8$.

Решение:

$$M(N)=\frac{\sum_{i=1}^{n} N_i}{n}=\frac{N_1+N_2+N_3+N_4+N_5+N_6+N_7+N_8+N_9+N_{10}}{10}=$$

$$=\frac{3+7+4+5+2+5+7+12+6+8}{10}=\frac{59}{10}=5{,}9\approx 6 \text{ танка.}$$

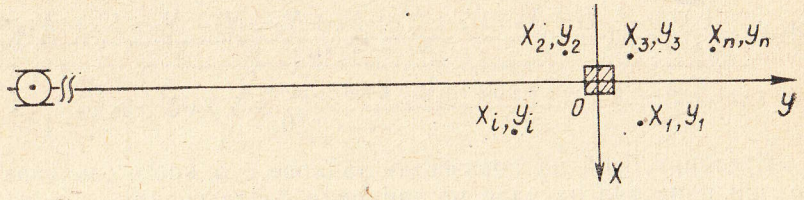
Средният брой на поразените танкове е 6, което означава, че при нанасяне на удар по танковия батальон при горните условия с вероятност, близка до 1, може да се твърди, че броят на поразените танкове ще бъде около 6.

Показателите за ефективността на бойните действия на войските, както се вижда от примера, често представляват вероятности на някои събития или математическо очакване на случайни величини. В съответствие с пределните теореми от теорията на вероятностите честотата на появяване на едни или други случайни събития се доближава по вероятност към вероятността на търсените събития, а средното аритметично значение на случайната величина се доближава по вероятност към математическото очакване на търсените случайни величини. Затова при достатъчно голям брой наблюдения с помощта на статистическите методи може да се получи приблизителна оценка на вероятността на едно или друго събитие или на математическото очакване на случайната величина, т. е. да се определят стойностите на показателите на ефективността при конкретна обстановка.

При решаване на различни задачи от военното дело чрез аналитичните методи обикновено реалната задача се свежда към опростена схема, която след това се подлага на изследване. Така например при решаване на задачи по оценка на ефективността на стрелбата по площадни цели чрез аналитични методи реалната задача се опростява, като истинската конфигурация се заменя с кръг, реалното разположение на елементарните цели върху площта се приема за равномерно, зоната за действие на снарядите се заменя с кръг или квадрат със страни, успоредни на страните на целта, и пр. Това опростяване води до грубо приближение и конкретните бойни действия може съществено да се отличават от осреднените. В по-голямата си част задачите, решавани с аналитични методи, не дават

количествени оценки, без които не може да се реши докрай поставената задача.

Методът на статистическите изпитания обаче позволява да се решават задачите без такива груби допускания, с което вероятностният модел до голяма степен се доближава до конкретните бойни действия.



Фиг. 3.4.6

Методът на статистическите решения отчита случайността на самия процес при моделиране на явленията. При използуване на метода за решаване на невероятностни задачи е необходимо да се намери вероятностен модел на функционалните зависимости и връзки на отделните елементи на задачата.

X	X_1 , X_2 , X_3 . . . . . X_i . . . . . X_n
Y	Y_1 , Y_2 , Y_3 . . . . . Y_i . . . . . Y_n

Фиг. 3.4.7

При моделирането на вероятностни задачи трябва да се има пред вид следното. Ако поведението на два обекта се характеризира от един и същ брой параметри и те имат едни и същи вероятностни характеристики, поведението на двата обекта е едно и също от вероятностна гледна точка. В този случай първият обект може да служи за модел на втория и обратно.

Например ако се провежда изпитание на някаква артилерийска (ракетна) система за определяне на характеристиките на разсейването, за начало на координатната система (фиг. 3.4.6) се приема местоположението на целта, като оста OY съвпада с направлението на стрелбата и по нея се отчитат отклоненията в разстояние, а по оста OX — отклоненията в направление.

Координатите на точките на падане на снарядите (ракетите) са случайни величини X и Y, които са разпределени по нормалния закон. При многократно повторение на опитите се получават две редици от случайни числа, определящи точките на падане, които характеризират точността на тази система (фиг. 3.4.7). От друга страна, измерването на шума на изхода на приемник показва, че той е разпределен по нормалния закон. Ако изберем по подходящ начин два приемника с еднакъв брой параметри и с едни и същи вероятностни характеристики (единият по Y, а другият по X), можем да моделираме точността на стрелбата на системата чрез шумовете на два приемника, без да извършваме стрелбата.

В метода на статистическите решения, за да се построи модел на някакъв обект, поведението на който се подчинява на вероятностен закон, трябва да можем да получаваме редици от случайни числа, подчиняващи се на същия закон. Може да се покаже, че всяка редица от случайни числа с произволен закон на разпределение може да се преобразува по определен алгоритъм в редица от случайни числа, подчиняващи се на необходимия ни закон.

Това свойство може да се използува за моделиране на ЕИМ на произволен обект, чието поведение се подчинява на вероятностен закон, ако в машината е дадена произволна редица от постоянни числа.

1.2. Използуване на метода на статистическите изпитания във военното дело

Методът на статистическите изпитания по същество е приспособен за решаване на сложни задачи, аналитичното решаване на които е трудно, а понякога и невъзможно. При изследване на бойните действия на войските се срещат такива сложни задачи, при които аналитичният апарат се оказва непригоден.

Така например в повечето случаи оценката на ефективността на бойните действия се затруднява от големия брой случайни и неслучайни фактори и сложното взаимодействие между тях. В този случай определянето на числените величини, характеризиращи ефективността с помощта на формули, представлява много сложна задача, поради което се използува статистическото моделиране.

Чрез метода на статистическите изпитания може да се решават прави и обратни задачи. Схемата за решаване на правите задачи е по дадени условия за изпълнение на операцията

(боя) да се определят показателите на ефективността. Например при дадени сили, средства и начин за действие (отбрана или настъпление) да се определят задачите за изпълнение. Схемата за решаване на обратните задачи е по определена ефективност да се намерят необходимите сили, средства и начин за действие. Например при поставена задача за овладяване на даден обект (рубеж) да се определят какви сили и средства са необходими и по какъв начин да действуват войските.

По-важни за практиката са обратните задачи, при които е необходимо да се намери най-правилният начин за организиране на боя и операцията и при които показателят за ефективност е максимален.

Правите задачи по изследване на операциите се решават с аналитичните методи, докато обратните — нормално по метода на статистическите изпитания.

При обратните задачи обикновено се решават голям брой прави задачи и се търси при какви значения на параметрите ефективността е максимална. Често пъти може да се приеме и такъв вариант на действие, при който показателят за ефективността не е пълният максимум, а ефективност, при която се получава приемливо решение.

Решението на обратните задачи винаги е свързано с много варианти, но е необходимо приемливото решение да се търси при минимален брой варианти.

При моделирането, т. е. проиграването на бойните действия на войски на ЕИМ, се използува основно методът на статистическите изпитания. В резултат на многократно моделиране на бойните действия може да се получат съответни резултати при конкретно определени условия. При промяна на условията може да се изясни ролята на различните фактори, които оказват влияние върху бойните действия. Целесъобразно е моделирането на бойните действия да се осъществява на ЕИМ с екран и може да бъде едностранно и двустранно.

При едностранното моделиране поведението на противника, както и средствата и способите му се считат дадени предварително и се търси разумното действие на другата страна.

При двустранните моделирания се търсят веднага рационалните решения на двете страни и за изработване на решение често се използува *игровият подход*.

Методът на статистическите изпитания се използува широко във военното дело за обосноваване на решението на

командирите и характеристиките на новосъздадената бойна техника.

В артилерията например се използува за определяне на точките за примерване, за да се получи максимален резултат, за разпределяне на целите между огневите средства, за получаване на средно най-голям брой поразени цели, за разполагането на огневите средства с оглед да понасят минимални загуби и други.

В противовъздушната отбрана се решават следните важни практически задачи:

— оценка на бойната ефективност на групировката на противовъздушната отбрана;

— избиране на най-сполучливия вариант за действие при отразяване на противникови налети;

— изменение в оперативното построение на групировката на противовъздушната отбрана за осигуряване на най-висока ефективност;

— оценка на бойната ефективност на перспективни системи въоръжение и други.

В резултат на моделирането чрез използуване на метода на статистическите изпитания може да се избере оптималният вариант за налет на авиацията по даден обект, при който се получават максимални загуби. Като се има пред вид групировката на противовъздушната отбрана на противника и се използуват различни маршрути, различно построение и боен ред на самолетите, както и средства за смущения и други, чрез статистическото моделиране се получават различните варианти за действие, от които се определя най-ефикасният.

Методът „Монте Карло“ се използува широко за оценка на надеждността и анализ на режимите за експлоатация и работа на различните прибори, устройства и системи на въоръжение в армията (радиостанции, радиолокационни станции, ракети, комплекси и др.).

Този метод позволява да се решават много практически задачи без груби допускания и приближения. Особено е ефективен при изследване на сложни случайни явления и процеси, които са вероятностни и налагат да се създават вероятностни математически модели. При тях е необходимо да се отчитат много фактори, които се преплитат и си взаимодействуват по сложен начин. Такава задача е оценката на очакваните резултати от бойните действия, които зависят от голям брой фактори и се разглеждат в пространството и времето между две противостоящи страни, използуващи различни родове войски.

Както се вижда, чрез серия статистически изпитания може да се получат твърде важни количествени препоръки, необходими за анализ на бойните действия и за оценка на ефективността на бойната техника в едни или други варианти за действие.

Статистическото моделиране е най-перспективният метод във военното дело, защото при използването му може да не се знаят аналитичните зависимости между параметрите, характеризиращи бойните действия, които за сложните военни процеси обикновено са неизвестни.

При решаване на военни задачи по метода на статистическите решения се постъпва по следния начин:

— определят се характеристиките на случайните процеси и зависимостите между тях;

— пресмятат се многократно по избрания алгоритъм необходимите величини, като се използват получените случайни числа, функции и потоци;

— обработват се статистически получените резултати и се правят съответните изводи.

2. ПОЛУЧАВАНЕ И ИЗПОЛЗУВАНЕ НА СЛУЧАЙНИТЕ ЧИСЛА ПРИ СТАТИСТИЧЕСКОТО МОДЕЛИРАНЕ

Основни градивни единици в метода на статистическите решения са случайните реализации.

Случайна реализация се нарича всеки опит, при който се решава един от следните въпроси:

— настъпило ли е събитието A или не е настъпило;

— кое събитие A_i е настъпило, ако е възможно да настъпят събитията $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$;

— каква стойност x_i е приела случайната велична X;

— каква съвкупност от стойности $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ приема системата случайни величини $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$.

По отношение на стрелбата това означава дали след произвеждането на първия изстрел снарядът е попаднал в целта или не е. Ако не е, къде е попаднал (пред целта, зад нея, вляво или вдясно) и на какво разстояние — на 20, 50, 200 m и т. н.

Например дадено оръдие поразява единична цел с вероятност, равна на $^1/_6$. Тогава случайната реализация е хвърлянето на зар. Ако се падне шестица, приема се, че се е сбъднало събитието A (попадение на снаряда в целта), а

ако се падне друго число — събитието A не се е сбъднало, т. е. снарядът не е попаднал в целта.

За използване на жребий, необходим при организиране на вероятностни модели, и за отчитане на случайните фактори, оказващи влияние върху реалните процеси, са необходими случайни числа с подходящо разпределение. Обикновено те се получават чрез прибори и устройства, наречени датчици на случайни числа. Най-често използваните датчици са физическите, които са приставка към ЕИМ, и програмните (алгоритмичните), които представляват специални програми за изработване на случайни числа.

Физическите датчици са устройства, в които протичат случайни физически процеси, формиращи двоичните знаци 0 и 1, които се записват в съответните разряди на специални регистри.

В зависимост от начините за получаване на случайните числа датчиците биват: а) устройства, изменящи състоянието си след включване или изключване; б) устройства, регистриращи случайни продължителности от време; в) броячи на случайни импулси за определено време. Нека разгледаме последователно различните физически устройства и начините за получаване на случайни числа.

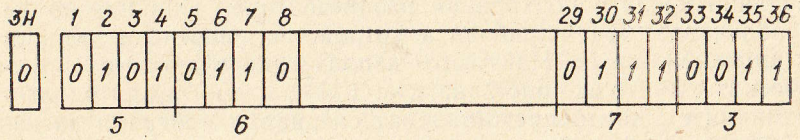
Датчиците, в които се използват случайни състояния на дадени системи след включване или изключване, представляват обикновено тригери на електронни лампи или полупроводници. При включване на анодното напрежение тригерът преминава в едно от възможните състояния (A или B), които съответствуват на 0 и 1. Към всеки разряд от регистъра е включен по един тригер, изработващ случайните цифри 0 и 1, в резултат на което се получава случайното число (фиг. 3.4.8).

Датчиците за регистриране на случайни интервали от време са високочестотни генератори на импулси и брояч. Генераторът изработва стандартни импулси с фиксирана честота и ги изпраща в брояча, който преброява изработените импулси и при препълване се установява на нула, като отново започва да отброява, и т. н. В случайни моменти от време генераторът се изключва и в брояча остават случаен брой импулси, които формират случайно число. Ако броячът е едноразряден тригер, който има две устойчиви състояния, в него се фиксира знакът 0 или 1. Устройството на такъв датчик е показано на фиг. 3.4.9.

Съвкупност от датчици, които изработват случайните знаци

0 и 1, се включват към отделните разряди на специален регистър, в който се формират случайните числа.

Датчиците за случайни числа, които се основават на регистриране на случаен брой импулси за дадено време, се разделят на радиоактивни и радиошумови.



Фиг. 3.4.8

Първите използват радиоактивното излъчване и са устроени и работят по принципа, показан на фиг. 3.4.10.

В зависимост от броя на разпаданията в единица време при четен брой разпадания на изхода на прибора се записва 0, а при нечетен брой — 1. Към всеки отделен разряд на клетката от паметта на машината или регистъра е включен по един такъв брояч, в резултат на което се формира случайното число.

Вероятността, че за време t ще се получат точно k разпадания, се определя по закона на Поасон, т.е.

$$P_к = \frac{(\lambda t)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda t}.$$

Тогава

$$P_1 = P_0(t) + P_2(t) + \ldots = e^{-\lambda t}\left[1 + \frac{(\lambda t)^2}{2!} + \right.$$

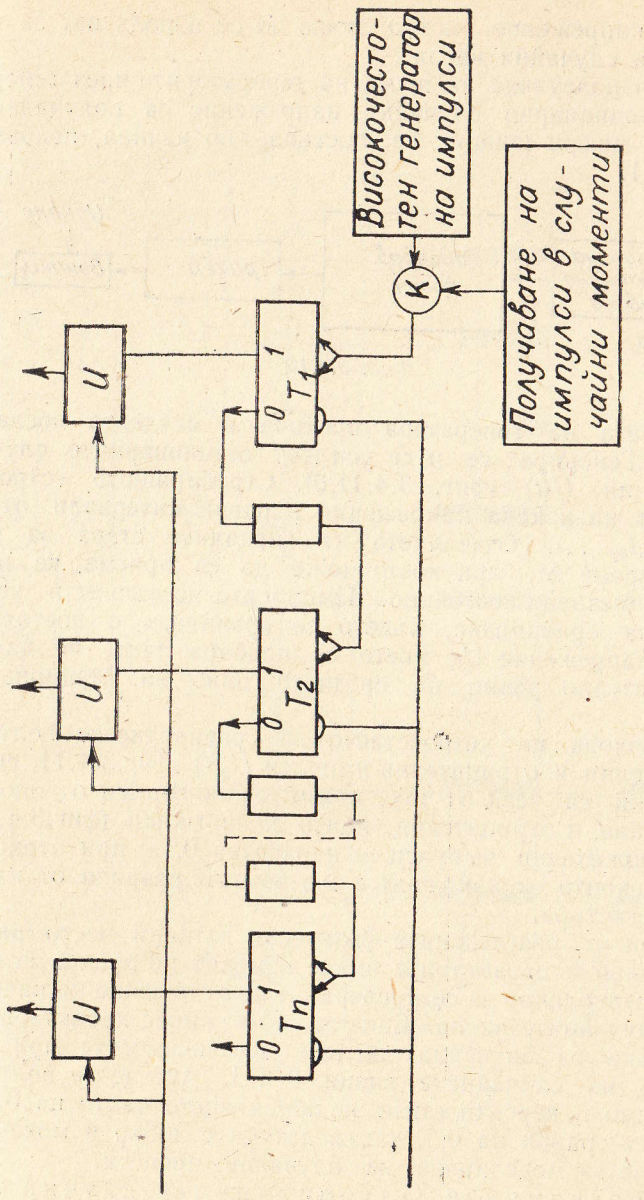
$$\left. + \frac{(\lambda t)^4}{4!} + \ldots \right] = e^{-\lambda t} \cdot \frac{e^{\lambda t} + e^{-\lambda t}}{2} = \frac{1 + e^{-2\lambda t}}{2} =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2e^{2\lambda t}}.$$

Следователно вероятността да се получи 1 е приблизително равна на 0,5, което показва, че за получаването на 0 вероятността също е около 0,5.

Радиошумовите датчици за случайни числа използват шумовете на собствените радиолампи или на различни генератори.

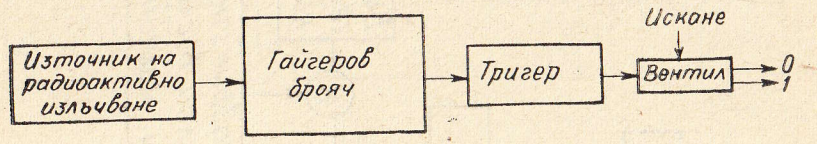
Шумовете на собствените радиолампи след усилване осигуряват достатъчно голям брой случайни колебания на из-



Фиг. 3.4.9

ходното напрежение, които може да се използуват за получаване на случайни числа.

При използуване на шума на генераторите чрез генериране на стационарно случайно напрежение за получаване на случайни цифри (знаци) се постъпва по начина, показан на фиг.3.4.11.



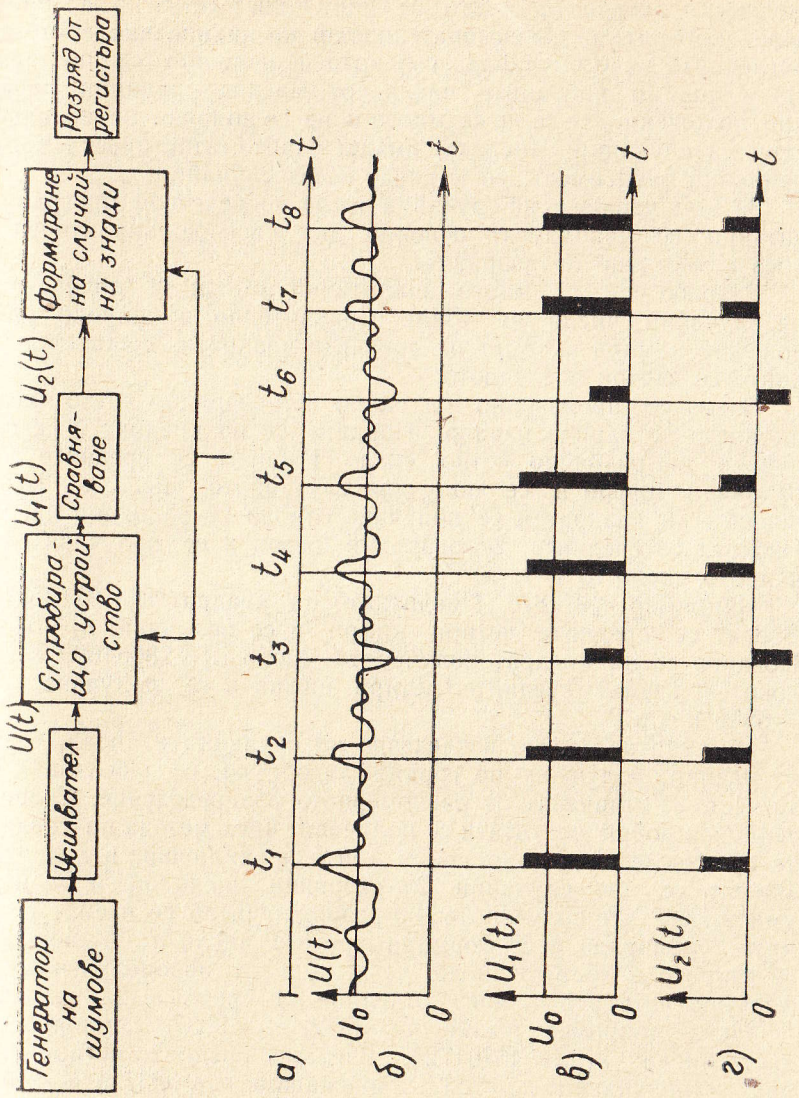
Фиг. 3.4.10

Работата на генератора протича в следната последователност: Генерират се и се усилват стационарните случайни напрежения $U(t)$ (фиг. 3.4.11,б). Стробиращото устройство пропуска на изхода напрежения в равни интервали от време ($t_1, t_2, t_3, \ldots$). Отделянето на сигналите става за много кратко време Δt, при което може да се приеме, че напрежението остава постоянно. Импулсите постъпват в устройството за сравняване, където се сравняват с постоянното опорно напрежение U_0, което се подбира така, че да бъде приблизително равно на средното ниво на стационарните шумове.

На изхода на устройството за сравняване се получават положителни и отрицателни импулси $U_2(t)$ (фиг.3.4.11, г). Положителни са тези от тях, които са по-големи от опорното напрежение, и отрицателни, които са по-малки (фиг.3.4.11,в). При положителни импулси се изработва 0, а при отрицателни — 1, които се изпращат в съответните разряди от клетката на регистъра.

Някои от разгледаните физически датчици често работят неустойчиво и параметрите им се изменят по време. Затова те трябва периодично да се проверяват по отношение на качеството на случайните числа. Една от най-важните характеристики на датчика за случайни числа е независимостта при получаването на случайните знаци 0 и 1. Ако те се получават независимо и вероятностите за появяването както на 0, така и на 1 са равни на 0,5, такъв датчик е добър и може да се използува за моделиране на случайни процеси.

В програмните (алгоритмични) датчици случайните числа се получават посредством аритметически и



Фиг. 3.4.11

логически операции, които се изпълняват от ЕИМ по определен алгоритъм. Последователността на такива числа, строго погледнато, не е случайна, тъй като периодично се повтаря. Но случайно избраните числа от масива случайни числа при положение, че те не са много и не се появява периодичността, са случайни. Числата, имащи слаба статистическа корелационна зависимост, се наричат псевдослучайни.

За получаването на случайни числа посредством програмни датчици се използуват основно два способа: аналитичен и чрез изместване на разрядите.

Разработени са много аналитични методи за получаване на случайни числа на ЕИМ. Сравнително по-широко приложение намира методът на средните квадрати, същността на който се състои в следното:

Взема се произволно случайно $2m$-разрядно четно число n_0, което се нарича начало. Повдига се на квадрат и се получава $4m$-разрядно четно число. Избират се средните $2m$-разрядни цифри и се получава случайното число n_1. То се повдига на квадрат и се получава отново $4m$-разрядно число. Избират се средните $2m$-разрядни цифри и се получава случайното число n_2 и т. н.

Например $n_0=9876$. Повдигнато на квадрат $n_0^2=97535376$. Вземат се средните четири цифри и се получава $n_1=5353$. Повдига се на квадрат полученото число $n_1^2=28654609$ и отново се вземат средните четири цифри и се получава $n_2=6546$ и т.н.

При статистическо изследване на случайните числа, взети от масиви, получени по горния алгоритъм, се забелязва, че те често се отличават от равномерното разпределение. Сравнително по-добри резултати се получават чрез метода на средните произведения, същността на които се заключава в следното: Вземат се две случайни $2m$-разрядни числа n_1 и n_2 и се умножават. От полученото $4m$-разрядно число се вземат средните $2m$-разряда и се формира третото число n_3. Умножават се второто и третото число n_2 и n_3 и от новополученото се формира четвърто n_4 чрез отделяне на средните $2m$-разряда.

Нека например имаме $n_1=4652$, $n_2=9837$. Умножаваме двете числа: $n_1.n_2=45761724$. Вземаме средните четири разряда и получаваме $n_3=7617$. Умножаваме $n_2=9837$ и $n_3=7617$ и получаваме $n_2.n_3=74928429$. Средните четири разряда образуват $n_4=9284$ и т.н.

Съществуват и други по-сложни аналитични начини за получаване на случайни числа.

Методът на изместване на разрядите се заключава в следното. Взема се произволно случайно двоично число n_0, измества се на няколко разряда наляво и се получава $n_{0л}$. След това същото число n_0 се измества на няколко разряда вдясно, в резултат на което се получава $n_{0д}$. Двете случайни числа, получени след изместванията, се събират поразрядно и се получава случайна съвкупност от нули и единици, които формират първото случайно число n_1. С него се постъпва по същия начин, както и с n_0, и се получава второто, и т. н.

Често за получаването на случайните числа по този способ се извършват и други операции, като нормализиране, умножение по константа и др.

След като се получи масив от случайни числа по разгледания начин, той се проверява за периодичност и равномерност в интервала от 0 до 1.

Когато е необходимо да се получат малко случайни числа за моделиране на отделни случайни процеси, не е целесъобразно да се използуват физически и програмни датчици, реализиращи случайните числа на ЕИМ. Тогава се използуват механични датчици и таблици със случайни числа.

Механичните датчици на случайни числа са устройства, които се задействуват ръчно (рулетка, зар, монета и др.). Използуват се за моделиране на процеси, които изискват сравнително малък брой случайни числа.

Таблиците за случайни числа, разпределени по нормалния закон или закона за равномерната плътност на вероятностите, са дадени във всички учебници по математическа статистика (приложение №1). Съставянето им може да се извърши с ЕИМ, като се използуват физически или програмни датчици.

Независимо от средствата и начините, които се използуват за получаване на случайните числа, те се проверяват за равномерност, случайност и независимост.

В практиката често пъти при използуване на метода на статистическите изпитания е необходимо да се получат случайни числа с произволен закон на разпределение, след което по специален алгоритъм те се преобразуват в редица от случайни числа, които се подчиняват на необходимия закон.

Случайните числа, получени по разгледаните начини, се използуват от метода на статистическите изпитания за получаване на случайни реализации при моделиране на различни случайни процеси. По-пълно и по-подробно въпросът за използуване на случайните числа при моделиране на случайни процеси е разгледан по-долу.

3. МОДЕЛИРАНЕ НА СЛУЧАЙНИ ПРОЦЕСИ

Основен елемент на метода на статистическите решения е случайната реализация.

Случайна реализация се нарича всеки модел на изучавания процес, изграден с помощта на един или няколко единични жребия. Тя може да се състои от няколко етапа. При едни етапи съответните величини се определят чрез пресмятане по формули, а при други — чрез жребий. Например при моделиране на дадено явление може да се достигне до момент, когато развитието на процеса зависи от някакъв случаен фактор (откриване на цел, поразяване на обект и др.). В този случай се разиграва жребий и в зависимост от резултата се изследва по-нататък процесът.

Следователно за да се приложи методът на статистическите изпитания за моделиране на различни явления, трябва да може да се моделират случайни събития, величини и процеси. Тези въпроси са разгледани по-подробно, тъй като чрез моделиране на случайните събития може да се решат важни практически задачи.

Случайните събития са независими и зависими и моделирането им е разгледано последователно.

3.1. Моделиране на независими случайни събития

Нека например при изследването на някакъв обект се получават два изхода A и $\bar{A}$. Допускаме, че при стрелба с оръдие снарядът попада в целта, т. е. изход A, а може и да не попадне в целта, т. е. изход $\bar{A}$. Понеже събитията A и $\bar{A}$ са противоположни, тогава

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

Ако се проведе серия от n изстрели, получава се редица от събитията попадения и непопадения на снарядите в целта A и $\bar{A}$, например $\bar{A}AAA\bar{A}\bar{A}A\bar{A}AAAA\bar{A}AA$ . . . . . .

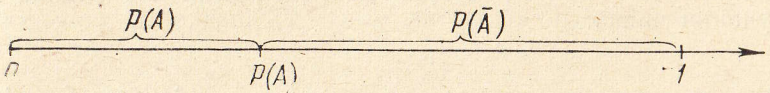
Тогава $P(A) = \frac{m_1}{n}$, $P(\bar{A}) = \frac{m_2}{n}$,

където:

— m_1 — брой на сбъдванията на събитие A (попадения);

— m_2 — брой на сбъдванията на събитие $\bar{A}$ (непопадения)

Задачата е без провеждане на стрелба с помощта на ЕИМ да се построи модел на процеса от стрелбата. За целта интервалът $(0 \div 1)$ се разделя на две части: $P(A)$ и $P(\bar{A})$ (фиг.3.4.12.).



Фиг. 3.4.12

Когато полученото случайно число x_i попада в интервала $[0,\ P(A)]$, приемаме, че се е сбъднало събитието A. В противен случай, т. е. когато случайното число x_i попада в интервала $[P(A), 1]$, приемаме, че се е сбъднало събитието $\bar{A}$. Тогава машината дава случайна редица от символи $\bar{A}AA\bar{A}\bar{A}AAA$ . . . и намираме

$$P'(A) = \frac{m_1'}{n},\quad P'(\bar{A}) = \frac{m_2'}{n},$$

където:

— m_1' — брой на символите;

— m_2' — брой на символите;

— n — брой на опитите.

Построеният модел е модел на изследвания обект тогава и само тогава, когато са изпълнени условията

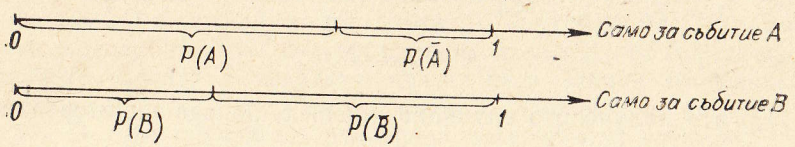
$$P(A) \approx P'(A) \text{ и } P(\bar{A}) \approx P'(\bar{A}).$$

Може да се докаже, че ако датчикът на случайни числа поражда редица от случайни числа с равномерно разпределение, горните условия са изпълнени.

Пример. Да се моделира разрушаването на ДОС чрез право мерене, ако вероятността за попадение при първия изстрел е равна на 0,2. За разрушаване на ДОС са необходими три попадения. Моделирането на това явление се извършва по следния начин. Ако полученото случайно число x_i е по-малко от 0,2, приемаме, че в ДОС се е получило пряко попадение, а ако полученото число x_i е по-голямо от 0,2, приемаме, че снарядът е попаднал встрани от ДОС. При получаване на три реализации на случайното число x_i, по-малки от 0,2, приемаме, че ДОС е разрушено. Общият брой реализации до

получаване на третото попадение в ДОС ($x_i < 0{,}2$) дава разхода на снарядите за изпълнение на задачата.

Ако при изследването на някакъв обект може да се получат повече изходи, но се иска да се моделират два независими изхода A и B, затова са необходими две редици от случайни числа.



Фиг. 3.4.13

Понеже събитията са независими, двете редици се разглеждат отделно една от друга. В първата редица от случайни числа, ако поредното число $x_i < P(A)$, приема се, че се е сбъднало събитието A, а в противен случай — събитие $\bar{A}$. Аналогично при втората редица, ако $y_i < P(B)$, приема се, че се е сбъднало събитието B, в противен случай — събитието $\bar{B}$ (фиг.3.4.13).

3.2. Моделиране на зависими случайни величини

За моделиране на реални задачи чрез метода на статистическите изпитания от особена важност е моделирането на зависими събития.

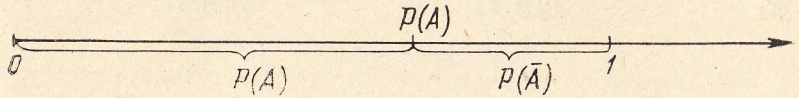
Това се вижда от следния опростен пример.

Пример. Противотанково оръдие води стрелба по настъпващ танк. Вероятността за попадение при първия изстрел означаваме с $P(A)$, а за непопадение — с $P(\bar{A})$. Вероятността за попадение при втория и следващите изстрели зависи от резултата на първия изстрел. Означаваме с $P(^{B}/_{A})$ вероятността за попадение при втория изстрел при условие, че първият е успешен. Аналогично въвеждаме и другите означения $P(^{B}/_{\bar{A}})$, $P(^{\bar{B}}/_{A})$, $P(^{\bar{B}}/_{\bar{A}})$ при стрелбата на противотанковото оръдие. Задачата е да се построи модел на срелбата на противотанковото оръдие по настъпващия танк.

При многократното моделиране на тази задача на машината получаваме следните случайни реализации:

$$\bar{A}B, AB, AB, A\bar{B}, \bar{A}\bar{B}, \bar{A}B, AB, A\bar{B} \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ .$$

За построяването на модела постъпваме по следния начин. Разделяме интервала $(0 \div 1)$ на две части (фиг.3.4.14.).



Фиг. 3.4.14

От датчика на случайни числа с равномерно разпределение получаваме число. Ако x_i е по-малко от $P(A)$, т.е. $x_i \leq P(A)$, приемаме, че се сбъднало събитието A и машината отпечатва символ A. В противен случай приемаме, че се е сбъднало събитието $\bar{A}$ и машината отпечатва символ $\bar{A}$.

Нека предположим, че се е сбъднало събитието A. Тогава отново разделяме интервала $(0 \div 1)$ на две части (фиг.3.4.15.).

Ако случайното число x_i е от интервала (0 до $P(B/A)$, приемаме, че се е сбъднало събитието B. Тогава машината отпечатва символ B. В противен случай, т.е. ако числото $x_i \in \left[P(^{B}/_{A}), 1\right]$, приемаме, че се е сбъднало събитието $\bar{B}$ и машината отпечатва символ $\bar{B}$.

Когато се е сбъднало събитието $\bar{A}$, постъпваме по аналогичен начин, за да определим дали се е сбъднало събитието B или $\bar{B}$ (фиг.3.4.16.).

Може да се докаже, че построената по този начин случайна редица от реализации

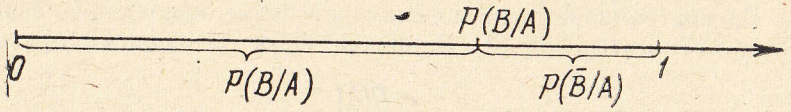
$$A\bar{B}, AB, AB, \bar{A}B, \bar{A}\bar{B}, A\bar{B}, \bar{A}B, AB \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ .$$

има същите вероятностни характеристики, както и реалният процес на стрелбата на противотанковото оръдие по танка.

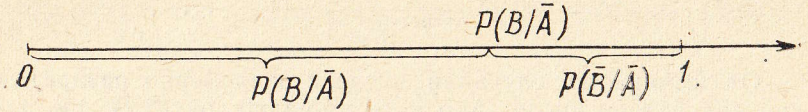
Числен пример. Провежда се стрелба на противотанково оръдие по танк. Вероятността за попадение на снаряда в танка е $P(A) = 0{,}3$, а за поразяването му при положение, че снарядът е попаднал в неговото разположение, е $P(B/A) = 0{,}8$.

Да се моделира стрелбата на противотанковото оръдие по танка, като се определи настъпването на събитието поразяване на танка.

Решение. С помощта на датчик или таблица на случайните числа, равномерно разпределени между 0 и 1, получаваме две случайни числа, от които първото определя вероят-



Фиг. 3.4.15



Фиг. 3.4.16

ността за попадение на снаряда в танка, а второто — вероятността за поразяване на танка.

Например от таблицата за случайните числа получаваме:

— 0,72256 и 0,86248, тъй като $0{,}72526 > P(A)$ — непопадение, $0{,}86248 > P(B/A)$ — непоражение;

— 0,28643 и 0,95254, тъй като $0{,}28643 < P(A)$ — попадение, $0{,}95254 > P(B/A)$ — непоражение;

— 0,45956 и 0,42328, тъй като $0{,}45956 > P(A)$ — непопадение, $0{,}42328 < P(B/A)$ — поражение, но понеже поражението на танка зависи от това, къде е попаднал снарядът, получава се непоражение;

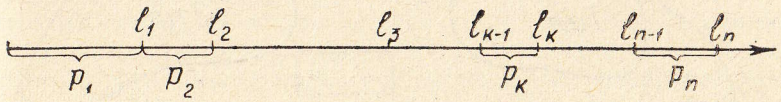
— 0,16398 и 0,76935, тъй като $0{,}16398 < P(A)$ — попадение, $0{,}76935 < P(B/A)$ — поражение на танка.

Извод. В резултат на моделирането на стрелбата на противотанковото оръдие по танка се получава, че при четвъртата реализация настъпва събитието поразяване на танка. При многократно повтаряне на процеса се получават средният разход на снаряди, продължителността на стрелбата и други количествени показатели, необходими при организиране и водене на стрелбата по танкове.

3.3. Определяне на резултатите от опитите в съответствие с вероятностите

Даден обект A може да се намира в едно от n независими и несъвместими състояния $E_1, E_2, E_3 \ldots E_n$. Тогава състоянията $E_1, E_2, E_3 \ldots E_n$ образуват пълна група от несъвместими събития. Нека всяко събитие E_i настъпва с вероятност P_i и случайната величина има равномерно разпределение в интервала $(0 \div 1)$.

За да моделираме пълната група от събития, постъпваме по следния начин. Разделяме интервала $(0 \div 1)$ на подинтервали с дължини, съответстващи на вероятностите (фиг. 3.4.17).



Фиг. 3.4.17

Определяме събитието $E_к$, което се състои в това, че избраната стойност x_i на случайните величини X принадлежи на $к$-тия интервал, т.е.

$$l_{к-1} < x_i < l_к.$$

Лесно е да установим, че вероятността на събитието $E_к$ е равна

$$P(E_к) = l_к - l_{к-1} = P_к.$$

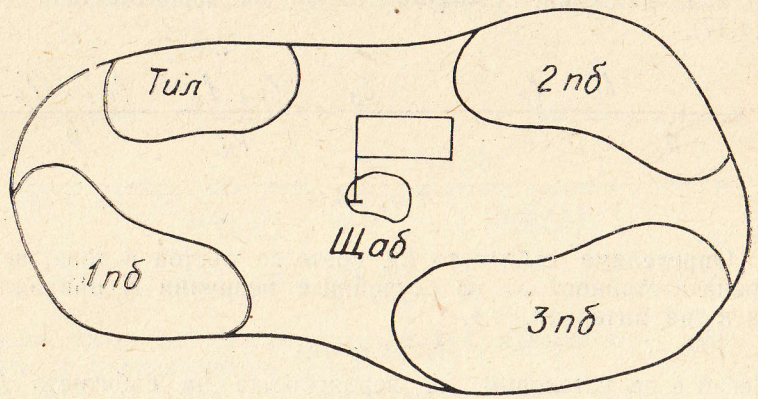
Процесът на моделиране на опити от този вид се състои в последователното избиране на стойностите на x_i и сравняването им с величините $l_к$. Този процес често се нарича определяне на резултатите от опитите чрез жребий в съответствие с вероятностите $P_1, P_2, \ldots P_n$.

Реализирането на тази процедура с псевдослучайни числа води до някои неточности, които трябва да се имат пред вид, поради което резултатите от моделирането се уточняват посредством други методи.

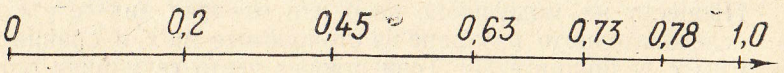
Пример. По пехотен полк на противника, разположен в район за съсредоточаване, се нанася удар с ракета с ядрен заряд. Пехотните батальони и щабът на полка с щабните подразделения (фиг.3.4.18) са разположени на такива разстояния, че едновременното поразяване на два и повече обекта е невъзможно. При ядрен взрив отделните подразделения на полка се поразяват със следните вероятности: 1 пб — $P_1 = 0{,}20$; 2 пб — $P_2 = 0{,}25$; 3 пб — $P_3 = 0{,}18$; щаба с щабните подразделения — $P_4 = 0{,}10$; тила — $P_6 = 0{,}22$; непоразяване на целта — $P_5 = 0{,}05$.

Решение. Разпределението на вероятностите от $0 \div 1$ е дадена на фиг.3.4.19.

При моделиране на ядрения удар с помощта на таблицата на случайните числа се определя кое от петте несъвместими събития е настъпило при дадено конкретно изпитание. Например получено е случайното число 0,77425, което означава, че ядреният удар нанася поражение на 3-ти пехотен батальон.



Фиг. 3.4.18



Фиг. 3.4.19

4. МОДЕЛИРАНЕ НА СЛОЖНИ СИСТЕМИ

4.1. Сложна система. Определение и параметри

Моделирането на случайни събития и величини е предварителен етап при моделирането на сложните системи.

Дадена система е сложна, ако поради структурата и свойствата ѝ, поради характера на задачите, които изпълнява, е необходимо да се отчитат голям брой взаимно свързани взаимодействуващи елементи, които осигуряват изпълнението на поставената задача.

Понятието елемент на системата и разделянето ѝ на елементи е относително и зависи от целите на изследването. Всеки достатъчно самостоятелен обект на системата, който в даденото изследване има отделно значение и се разглежда като цяло, се нарича елемент на системата.

Един от най-важните въпроси при изследването на сложните системи е контурът на управление, по който циркулират потоците информация за системата в съответствие с управляващия алгоритъм.

Нека е дадена произволна физическа система. Обикновено състоянието ѝ се характеризира чрез съвкупност от величини — параметрите $E_1, E_2, \ldots E_n$. Някои от тях отразяват вътрешното състояние на системата, а други — влиянието на външната среда. В общия случай те са случайни величини със съответен закон за разпределение. От друга страна, резултатите от функционирането на системата се изразяват чрез друга съвкупност от параметри: $N_1, N_2, \ldots N_m$. Разбира се, някои може да съвпадат. В общия случай резултатите са функционално зависими от входните параметри, т.е.

$$N_1 = I_1(E_1, E_2, E_3 \ . \ . \ . E_n)$$
$$N_2 = I_2(E_1, E_2, E_3 \ . \ . \ E_n)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$N_m = I_m(E_1, E_2, E_3 \ . \ . \ . E_n).$$

Следователно на всяка възможна съвкупност от входни елементи $(E_1, E_2, \ldots E_n)$ съответствува някаква възможна съвкупност от резултати $(N_1, N_2, \ldots N_m)$. Ясно е, че за пълното описание на една система е необходимо да се познават входните и изходните параметри, техните функции на разпределение, функционалните и вероятностните връзки между тях. Действието на случайните фактори води до разсейване на резултатите от функционирането на системата и необходимостта от тяхната обработка и изследване.

По такъв начин основните отличителни черти на сложните системи са:

— голям брой взаимно свързани и взаимодействуващи елементи;

— задачите, които изпълнява системата, са сложни и многообразни, но подчинени на определена цел;

— системата функционира при въздействието на случайни фактори. Качеството на функциониране на системата се оценява количествено чрез показателя за ефективност, който отразява приспособеността на системата за изпълнение на конкретни цели.

4.2. Математически модел и моделиращи алгоритми

Математическият модел на реална система е абстрактно описание на обект, изучаването на който е възможно с математически методи, включително и с метода „Монте Карло“. Обикновено той отразява най-важните основни закономерности от функционирането на системата.

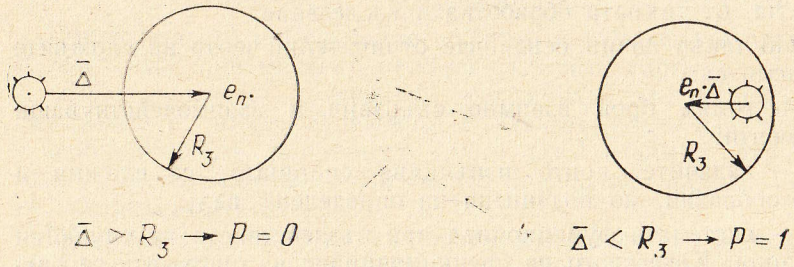
Функционирането на системата може да се разглежда като последователно преминаване от едно състояние в друго, които се характеризират чрез параметри $Z_1, Z_2, \ldots Z_s$ и може да бъдат и случайни величини. Поради това математическият модел определя зависимостта между характеристиките на състоянията на системата и нейните параметри.

За моделиране на функционирането на системите е необходимо математическият модел да се преработи в моделиращ алгоритъм, който зависи от входната информация, а структурата му — от постройката на математическия модел.

4.2.1. Моделиране на статически сложни системи

Характерна особеност на статическите сложни системи е, че вероятността за изменение на входните параметри не зависи от предхождащите стойности. При динамичните сложни системи съществува взаимна зависимост между преходните и следващите входни параметри.

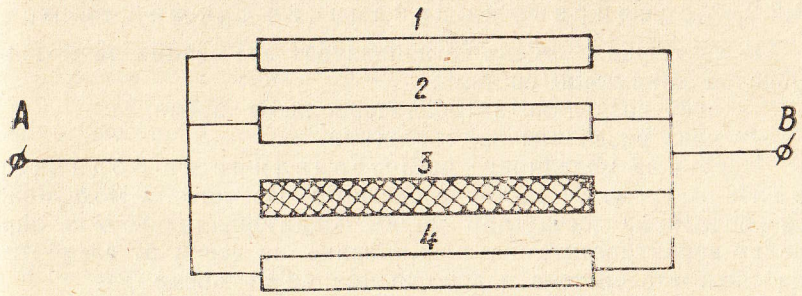
Пример на статическа сложна система е поразяване на единична цел от ракета с ядрен заряд (фиг. 3.4.20.). Тази система е сложна, понеже входните параметри са отклонения в далечина и направление (грешките в подготовката на данните и разсейването), изходният параметър N е или 1 (целта е поразена), или 0 (целта не е поразена), а условието за поразяване на целите дава зависимостта между входните и изходни параметри.



Фиг. 3.4.20:
$\bar{\Delta}$ — сумарна грешка на изстрела;
$R_З$ — радиус на зоната за поражение

Друг пример на такава система е системата с резерв. Графичното ѝ изображение е дадено на фиг.3.4.21.

Третият елемент на системата е работен, а останалите три са резервни. При излизане на работния елемент от строя веднага се използува един от изправните резервни елементи.



Фиг. 3.4.21

Тази система може да работи, ако има поне един изправен елемент. Нека с P_i означим вероятността на i-тия елемент да бъде изправен. Вероятността системата да работи е равна

$$P = 1 - \left[(1-P_1).(1-P_2).(1-P_3) \ldots .(1-P_k) \right].$$

Пример. Възел от артилерийско-техническа система има един основен и три резервни елемента. Известна е вероятността на отделните елементи да бъдат изправни: $P_1 = 0{,}95$, $P_2 = 0{,}86$, $P_3 = 0{,}75$, $P_4 = 0{,}82$.

Решение. Определяме общата вероятност на системата да бъде изправна по формулата

$$P = 1 - \left[(1-P_1).(1-P_2)(1-P_3)(1-P_4) \right] = 1 - \left[(1-0{,}95)(1-0{,}86). \right.$$
$$\left. .(1-0{,}75).(1-0{,}82) \right] = 1 - (0{,}05.0{,}14.0{,}25.0{,}18) =$$
$$= 1 - 0{,}003 = 0{,}997.$$

Моделирането на тази система се извършва по следния начин. Проверява се чрез k реализации състоянието на елементите. Ако поне един от тях е изправен, записва се 1, в противен случай — 0. Този процес се повтаря многократно (N пъти). На края се пресмята вероятността P като отноше-

ние на броя на случаите, когато системата е изправна, към броя на опитите, т.е.

$$P=\frac{m}{n},$$

където:

— m — брой на изправните случаи;

— n — брой на опитите.

4.2.2. Моделиране на динамични сложни системи

В настоящия момент се използуват два начина за моделиране на динамични системи:

— чрез разделяне на подинтервали от време;

— чрез разделяне на състояния.

Идеята за моделиране чрез разделяне на подинтервали от време се състои в следното. Времето за моделиране се разделя на достатъчно малки подинтервали Δt и се определят вероятностите за преминаване на всеки от елементите на сложната система в ново състояние за време Δt.

Вероятност за преминаване на отделен елемент от едно състояние в друго за време Δt е P.

Същността на моделирането чрез разделяне на състояния се състои в следното. Определя се моментът на изменение на състоянието на елементите по дадените вероятностни характеристики и се анализира състоянието на сложната система само в тези точки от временната ос, в които се извършва промяна на състоянието поне на един от елементите. Интервалът между моментите на изменение на състоянията на елементите не се моделира.

Методът на моделиране чрез разделяне на подинтервали се предпочита за системите, при които съществува сложна взаимна зависимост между отделните елементи, а изменението на състоянията им се извършва често.

Значението на моделирането на сложни системи е много голямо, защото повечето практически задачи по същество водят към съставяне на такива модели. По-подробното разглеждане на този въпрос обаче е свързано с по-сложен математически апарат.

5. ТОЧНОСТ НА МЕТОДА НА СТАТИСТИЧЕСКИТЕ ИЗПИТАНИЯ

Определяне на необходимия брой реализации

Основният въпрос, който възниква при разработването на модели, е доколко точно резултатите от моделирането съвпадат с поведението на реалния обект.

Абсолютно точно съвпадане между модела и моделирания обект е принципно невъзможно, тъй като поведението на реалния обект се определя от безброй много параметри, докато при моделите се отчитат само краен брой параметри.

Поради това, че създаването на модели изисква голям разход на сили и средства, необходимо е да се оцени количествено качеството на моделирането.

Качеството на моделирането се определя както от броя на отчитаните параметри, така и от това доколко всеки от тях влияе върху крайните резултати. Очевидно е, че при моделирането най-напред трябва да се отчитат параметрите, които влияят много върху качеството на модела. Те се наричат съществени входни параметри на моделирания обект.

Качествата на статистическите модели може да се понижат поради следните причини:

1. Ограничен брой съществени параметри, отчитани в модела.

2. Точност на входните параметри.

3. Различните приближения и грешки при съставяне на алгоритъма. Например ако е необходимо да се пресметне квадратен корен, вместо точната стойност е взета някаква приблизителна стойност.

4. Грешки, дължащи се на ограничената точност на измерването на параметрите на модела.

Ако предположим, че горните четири причини са случайни, действуват независимо една от друга и се характеризират със средноквадратична грешка (σ), сумарната средноквадратична грешка е равна

$$\sigma_{\text{сум}}=\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2+\sigma_4^2},$$

където: σ_i — е средноквадратичната грешка на i-тата причина.

Горният израз не отчита систематичните грешки. Той показва, че сумарната грешка може да бъде намалена само при едновременното намаляване на всяка от частните грешки на горните причини.

Броят на реализациите, при които характеристиките на процеса са с дадена точност, се определя по следните правила:

1. Ако в резултат от N реализации честотата на събитието A е равна на P^*, истинската стойност на вероятността P на събитието A практически се намира в интервала

$$P^*-2\sqrt{\frac{P^*(1-P^*)}{N}} \text{ и } P^*+2\sqrt{\frac{P^*(1-P^*)}{N}}, \text{ т. е.}$$

$$P^*-2\sqrt{\frac{P^*(1-P^*)}{N}} \leq P \leq P^*+2\sqrt{\frac{P^*(1-P^*)}{N}}.$$

Например, ако в резултат на 10 000 реализации е получена честотата на събитието A, равна на 0,28, истинската стойност на вероятността е между 0,271 и 0,289.

2. За да бъде максималната практически възможна грешка в определяне на вероятността на събитието A, не по-голяма от Δ, трябва да се направят не по-малко от

$$N=\frac{4 . P(1-P)}{\Delta^2}$$

реализации, където:

P — търсената вероятност;

Δ — възможната грешка.

Например максималната практически възможна грешка е по-малка от 0,01, ако търсената вероятност е 0,8, а броят на реализациите е най-малко равен

$$N=\frac{4.0{,}8\,(1-0{,}8)}{0{,}01^2}=\frac{4.0{,}8.0{,}2}{0{,}0001}=\frac{0{,}64}{0{,}0001}=6400 \text{ реализации.}$$

3. Ако в резултат от серия от N-реализации е определена средната стойност $\bar{x}^*$ на някаква случайна величина E, истинската средна стойност x практически ще принадлежи на интервала

$$\bar{x}^*-\frac{2}{\sqrt{N}}\sqrt{\sum_{i=1}^{N}x_i^2-(\bar{x}^*)^2} \leq x \leq \bar{x}^*+\frac{2}{\sqrt{N}}\sqrt{\sum_{i=1}^{N}x_i^2-(\bar{x}^*)^2},$$

където:

x_i — стойност на E при i-тата реализация;

$\bar{x}^*$ — средно аритметично на резултатите.

4. Ако е необходимо средната стойност $\bar{x}^*$ на случайната величина E да бъде определена с грешка, не по-голяма от Δ, трябва да се направят не по-малко от

$$N=\frac{4 . D_x}{\Delta^2} \text{ реализации,}$$

където D_x е дисперсията на величината E, определена ориентировъчно по данните от първата серия опити.

Нека например са проведени $N=900$ реализации, във всяка от които е получена стойността x_i на случайната величина E. Средното аритметично на наблюдаваните стойности е равно на 2,20, а средното аритметично от квадратите им е 5,02. Тогава по формулите се определя, че максималната грешка е равна на 0,025. Ако искаме тази грешка да бъде по-малка от 0,01, трябва да направим около 7200 реализации.

Пример. Да се определят най-целесъобразните отдалечения между елементите от бойния ред на артилерийски дивизион, заел позиционен район.

Бойният ред на дивизиона се състои от командно-наблюдателния пункт на дивизиона и бойните редове на батареите. Бойните редове на батареите се състоят от КНП, огневите позиции и мястото за тягата.

При определяне на отдалечението между елементите от бойния ред се изхожда от изискванията и възможността за изпълнение на огневите задачи и минимално понасяните загуби в личен състав и бойна техника от ядрените удари на противника.

Да се решат аналитично тези въпроси е трудно, тъй като е необходимо да се отчитат голям брой случайни фактори, а да се проверят опитно чрез стрелба са нужни много средства.

За решаването на тези задачи е най-изгодно да се състави математически модел, с помощта на който да се проиграят многократно изследваните въпроси.

Случайните събития се определят с отчитане на вероятностите за тяхното появяване чрез използуване на таблицата на случайните числа, разпределени равномерно (от 1 до 100) и по нормалния закон.

Да разгледаме последователно решението на задачата чрез построяване на модел с помощта на случайни реализации.

Определяне кой елемент от бойния ред на дивизиона е разкрит — КНП или ОП

Като се имат пред вид размерите и възможностите за укриване на отделните елементи, може да се определят следните вероятности за тяхното разкриване:

— разкриване на огневите позиции (ОП) — 60%;

— разкриване на командно-наблюдателните пунктове (КНП) — 25%;

— неразкриване на обект — 15%.

При определяне кой елемент е разкрит се използуват случайните числа от 0 до 100, разпределени по закона за равната вероятност. За нагледност при решаването на задачата се използува таблица 3.4.1.

Получено е случайно число с номер 37, което означава, че е разкрит елемент от огневите позиции.

Таблица 3. 4. 1.

Елементи от бойния ред на дивизиона	Вероятност за разкриване в проценти	Номера на числата, съответствуващи на вероятностите
— командно-наблюдателни пунктове	25	1—25
— огневи позиции	60	26—85
— неразкриване	15	86—100

Определяне на разкритата батарея

В дивизиона има три батареи (фиг. 3.4.22). Възможностите за разкриването им от противника са равновероятни, т. е. $P = 1/3$. За да реализираме едно от тези събития (разкриване на дадена батарея), използуваме таблицата на случайните числа от 1 до 100, като резултата оформяме в таблица 3.4.2.



Фиг. 3.4.22

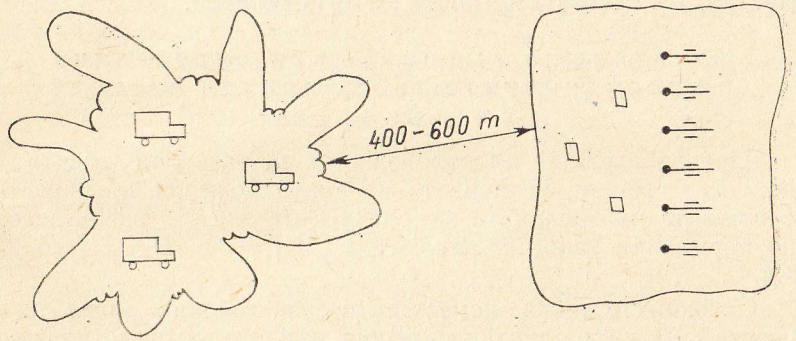
Таблица 3. 4. 2

Номера на батареите от дивизиона	Вероятност за разкриване на батареите в проценти	Номера на числата, съответствуващи на вероятността за разкриване на батареите
4 батарея	33	1— 33
5 батарея	33	34— 66
6 батарея	34	67— 100

От таблицата е получено случайното число с номер 92, което означава, че е разкрита шеста батарея.

Определяне кой елемент от батареята е разкрит

Огневите позиции на батареите може да се разглеждат като два елемента: оръдията с боеприпасите и разчетите, т. е. самите огневи позиции, и мястото за тягата (фиг. 3.4.23).



Фиг. 3.4.23

Тъй като основното внимание е насочено към оръдията, оборудването и маскирането им се извършват пълно. Мястото за тягата, т. е. влекачите, се разполага отзад и встрани от ОП в зависимост от характера на местността средно на 400 — 600 метра. За оборудване на влекачите се използуват шофьорите, като често пъти се усилват с не повече от един

човек. Като се използуват гънките на местността, те може да бъдат укрити и добре маскирани, поради което се счита, че вероятностите за разкриване са:

— на ОП — 65%;

— на мястото за тягата — 35%.

Резултатът се оформя в таблица 3.4.3.

Таблица 3. 4. 3.

Варианти за разкриване на елементите на огневите позиции на 6-та батарея	Разпределение на вероятностите в проценти	Номера на числата, съответствуващи на указаната вероятност
Огнева позиция (мястото на оръдията)	65	1 — 65
Тяга	35	66 — 100

Да допуснем, че от таблицата за случайните числа е получено число с номер 34, което означава, че е разкрито мястото на огневата позиция на 6-та батарея.

Отчитане на грешките при определяне на координатите на разкрития елемент от бойния ред

При определяне на положението на разкрити обекти се допускат грешки, величината на които може да се определи с помощта на таблицата за случайните числа, разпределени по нормалния закон с параметри $[M_x]=0$ и $E_x=1$ (таблица 3.4.4).

Случайните числа, поместени в тази таблица, може да се разглеждат като случайни грешки или отклонения, изразени в срединните грешки (отклонения). Числата от таблицата при използването им се изработват по определен случаен начин, например през всеки три числа или по друга последователност.

Точността при определяне на координатите на разузнатите обекти зависи от използуваните средства. Така например при разузнаване от самолет с използуване на карта срединната грешка е кръгова и е от 100 до 200 m или средно 150 m.

Таблица 3.4.4

+ 1,59	— 1,92	+ 1,17	— 1,71	— 0,69	— 0,06
— 0,01	+ 0,09	+ 1,72	+ 2,34	+ 0,08	— 0,61
— 0,25	— 0,42	+ 0,11	+ 0,79	+ 1,34	— 0,96
— 2,62	— 2,78	+ 2,32	— 0,28	— 1,67	— 1,32
+ 0,59	+ 0,83	+ 1,31	+ 0,58	+ 0,23	— 0,04
+ 0,41	+ 1,32	— 3,17	— 2,24	— 1,94	— 0,38
+ 2,89	— 1,43	— 2,89	+ 1,28	— 1,04	+ 0,81
— 1,91	+ 0,25	+ 2,39	+ 0,82	+ 2,03	— 1,23
+ 0,06	+ 1,16	— 0,50	+ 0,94	— 2,24	— 0,59
— 1,54	+ 1,93	— 1,60	— 0,04	— 2,86	+ 0,74
+ 2,18	— 0,35	— 0,61	+ 0,02	+ 1,53	+ 1,85
+ 0,76	— 2,81	— 0,45	— 1,38	+ 0,38	— 0,27
— 0,57	— 1,54	+ 0,28	— 0,27	+ 2,70	+ 1,10
— 0,18	— 3,43	+ 0,97	+ 0,39	+ 3,81	— 0,34
+ 1,24	— 1,49	— 0,82	+ 2,16	— 1,92	— 0,06
+ 0,18	+ 0,45	— 1,16	— 1,69	+ 2,21	+ 2,68
+ 1,76	— 0,43	— 0,75	— 1,68	— 0,47	— 0,10
+ 0,29	— 0,28	— 1,40	— 1,33	+ 1,33	— 1,21
+ 4,81	— 0,35	+ 2,29	+ 0,30	— 0,56	— 0,11
+ 1,72	— 0,12	— 1,25	— 1,69	— 1,67	— 0,45

При избиране на случайните числа се взема всяко трето число от таблицата, като се започва от първото. Получените числа характеризират срединните грешки, допуснати от летеца при определяне на координатите на разкрития елемент от бойния ред. В случая първото число е 1,59, което означава, че е допуснал 1,59 срединни грешки. Тъй като едната срединна грешка е равна на 150 m, при определяне на координатите летецът е допуснал грешка, равна на $1{,}59 \times 150 = 239$ m.

Указаната точка от летеца се приема за точка на примерването (подготовка на данните за нанасяне на удара) по огневата позиция.

Точката на примерване се нанася на схемата (фиг. 3.4.24), като се изхожда от направленията към съседните най-близки обекти, например към огневите позиции на съседните батареи от дивизиона.

Определяне на средството за поразяване на разкритата батарея

За поразяване на разкритата батарея противникът може да използува едно от следните средства: 175-mm оръдия или 155-mm и 203,2-mm гаубици.

човек. Като се използуват гънките на местността, те може да бъдат укрити и добре маскирани, поради което се счита, че вероятностите за разкриване са:

— на ОП — 65%;

— на мястото за тягата — 35%.

Резултатът се оформя в таблица 3.4.3.

Таблица 3. 4. 3.

Варианти за разкриване на елементите на огневите позиции на 6-та батарея	Разпределение на вероятностите в проценти	Номера на числата, съответствуващи на указаната вероятност
Огнева позиция (място на оръдията)	65	1 — 65
Тяга	35	66 — 100

Да допуснем, че от таблицата за случайните числа е получено число с номер 34, което означава, че е разкрито мястото на огневата позиция на 6-та батарея.

Отчитане на грешките при определяне на координатите на разкрития елемент от бойния ред

При определяне на положението на разкрити обекти се допускат грешки, величината на които може да се определи с помощта на таблицата за случайните числа, разпределени по нормалния закон с параметри $[M_x]=0$ и $E_x=1$ (таблица 3.4.4).

Случайните числа, поместени в тази таблица, може да се разглеждат като случайни грешки или отклонения, изразени в срединните грешки (отклонения). Числата от таблицата при използуването им се изработват по определен случаен начин, например през всеки три числа или по друга последователност.

Точността при определяне на координатите на разузнатите обекти зависи от използуваните средства. Така например при разузнаване от самолет с използуване на карта срединната грешка е кръгова и е от 100 до 200 m или средно 150 m.

Таблица 3.4.4

+ 1,59	— 1,92	+ 1,17	— 1,71	— 0,69	— 0,06
— 0,01	+ 0,09	+ 1,72	+ 2,34	+ 0,08	— 0,61
— 0,25	— 0,42	+ 0,11	+ 0,79	+ 1,34	— 0,96
— 2,62	— 2,78	+ 2,32	— 0,28	— 1,67	— 1,32
+ 0,59	+ 0,83	+ 1,31	+ 0,58	+ 0,23	— 0,04
+ 0,41	+ 1,32	— 3,17	— 2,24	— 1,94	— 0,38
+ 2,89	— 1,43	— 2,89	+ 1,28	— 1,04	+ 0,81
— 1,91	+ 0,25	+ 2,39	+ 0,82	+ 2,03	— 1,23
+ 0,06	+ 1,16	— 0,50	+ 0,94	— 2,24	— 0,59
— 1,54	+ 1,93	— 1,60	— 0,04	— 2,86	+ 0,74
+ 2,18	— 0,35	— 0,61	+ 0,02	+ 1,53	+ 1,85
+ 0,76	— 2,81	— 0,45	— 1,38	+ 0,38	— 0,27
— 0,57	— 1,54	+ 0,28	— 0,27	+ 2,70	+ 1,10
— 0,18	— 3,43	+ 0,97	+ 0,39	+ 3,81	— 0,34
+ 1,24	— 1,49	— 0,82	+ 2,16	— 1,92	— 0,06
+ 0,18	+ 0,45	— 1,16	— 1,69	+ 2,21	+ 2,68
+ 1,76	— 0,43	— 0,75	— 1,68	— 0,47	— 0,10
+ 0,29	— 0,28	— 1,40	— 1,33	+ 1,33	— 1,21
+ 4,81	— 0,35	+ 2,29	+ 0,30	— 0,56	— 0,11
+ 1,72	— 0,12	— 1,25	— 1,69	— 1,67	— 0,45

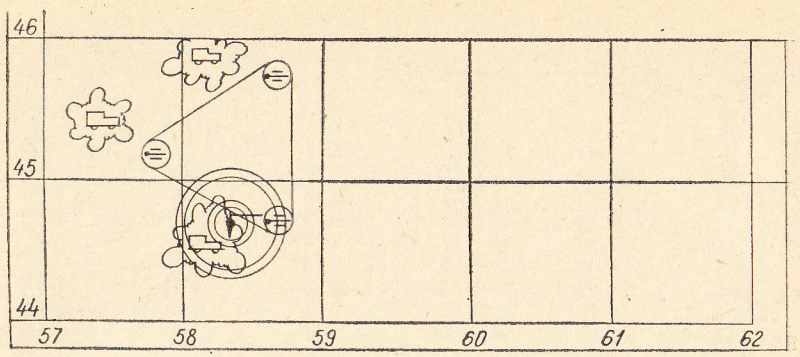
При избиране на случайните числа се взема всяко трето число от таблицата, като се започва от първото. Получените числа характеризират срединните грешки, допуснати от летеца при определяне на координатите на разкрития елемент от бойния ред. В случая първото число е 1,59, което означава, че е допуснал 1,59 срединни грешки. Тъй като едната срединна грешка е равна на 150 m, при определяне на координатите летецът е допуснал грешка, равна на $1{,}59 \times 150 = 239$ m.

Указаната точка от летеца се приема за точка на примерването (подготовка на данните за нанасяне на удара) по огневата позиция.

Точката на примерване се нанася на схемата (фиг. 3.4.24), като се изхожда от направленията към съседните най-близки обекти, например към огневите позиции на съседните батареи от дивизиона.

Определяне на средството за поразяване на разкритата батарея

За поразяване на разкритата батарея противникът може да използува едно от следните средства: 175-mm оръдия или 155-mm и 203,2-mm гаубици.



Фиг. 3.4.24

С помощта на таблицата на случайните числа се определя кое средство е използувано, като това се отбелязва така, както е показано в таблица 3.4.5.

Таблица 3.4.5

Възможни варианти за използуване на средствата	Вероятност за използуване	Числа, съответствуващи на вероятностите
155-mm гаубици	0,25	1— 25
175-mm оръдия	0,35	26—60
203,2-mm гаубици	0,40	61—100

Използуването на една или друга система се определя, като се имат пред вид техните характеристики — основно далекобойността и мощността на ядрените заряди.

Да допуснем, че от таблицата е получено случайно число с номер 8, което означава, че ядрения удар ще нанесе 155-mm гаубица.

Възможни разстояния на стрелбата

Като изходим от максималните разстояния на стрелбата на системите, тяхното отдалечение от предния край и разположението на собствената артилерия от предния край, получаваме следните разстояния на стрелбата:

— 155-mm гаубици се разполагат на 4—6 km от предния край; $P_{max} = 14\,850$ m;

— 175-mm оръдия се разполагат на 8—10 km от предния край; $P_{max} = 32\,000$ m;

— 203,2-mm гаубици се разполагат на 6—8 km от предния край; $P_{max} = 16\,930$ m.

Артилерийският дивизион се разполага средно на 3—6 km от предния край на противника.

При тези отдалечения на противниковите средства за нанасяне на ядрените удари и дивизиона се получават следните средни разстояния на стрелбата (таблица 3.4.6).

Таблица 3.4.6

Възможни разстояния на стрелбата в километри			Разпределение на вероятностите	Числа, съответствуващи на вероятността
155-mm гаубици	175-mm оръдия	203,2-mm гаубици		
7	11	9	0,16	1—16
8	12	10	0,16	17—32
9	13	11	0,18	33—51
10	14	12	0,18	52—70
11	15	13	0,16	71—85
12	16	14	0,16	86—100

Да допуснем, че от таблицата е получено случайното число с номер 78. Това означава, че разстоянието на стрелбата за 155-mm гаубици е 11 km и съответно 15 и 13 km за 175-mm оръдия и 203,2-mm гаубици.

Характеристики на разсейването $B_д$ и B_c

Характеристиките на разсейването на снарядите за различните разтояния на стрелбата са дадени в таблица 3.4.7.

От таблицата на случайните числа получихме, че разстоянието на стрелбата за 155-mm гаубици е 11 km. На него съответствуват характеристики на разсейването $B_д = 45$ m и $B_c = 5{,}5$ m.

Таблица 3.4.7

155-mm гаубици			175-mm оръдия			203,2-mm гаубици		
разстояние, km	$B_д$	$B_с$	разстояние, km	$B_д$	$B_с$	разстояние, km	$B_д$	$B_с$
8	35	3	12	33	2,8	10	36	3,4
9	38	3,5	23	35	3,0	11	40	3,8
10	40	4	14	37	3,6	12	42	4,2
11	45	5,5	15	42	4,2	13	45	4,5
12	47	6,5	16	45	4,7	14	48	5,0

Определяне на отклонението на епицентъра на взрива от точката на мерене

За определяне величините на отклоненията на епицентъра на ядрения взрив от точката на мерене от таблица 3.4.4 се избират случайните отклонения, разпределени по нормалния закон. За тази цел продължаваме опита, като след първата реализация избираме числата $-2,62$ и $+2,89$. Това са случайните отклонения на епицентъра на ядрения взрив от точката на мерене, изразени в срединни грешки съответно в разстоянието и направлението.

Тогава отклоненията на епицентъра на взрива от точката на мерене са:

— в разстояние $E_р = -2,62.\ B_д = -2,62.\ 45 = -118$ m;

— в направление $E_н = +2,89.\ B_с = +2,89.5,5 = +16$ m.

Като изходим от направлението на стрелбата от запад на изток, на схемата нанасяме епицентъра на взрива.

Определяне на мощността на ядрения заряд

Системата 155-mm гаубици може да използува ядрени боеприпаси с мощност до 1 kt — съответно 100, 200 и 500 тона и 1 килотон. Приемаме, че тези мощности на ядрените заряди противникът използува с честоти, посочени в таблица 3.4.8.

Изчисленията показват, че за сигурно поразяване на артилерийска батарея на огнева позиция при разстояние на стрелбата от 10 до 15 km е необходим ядрен снаряд с мощност на заряда 500 тона и повече. В нашия случай за поразяване

Таблица 3.4.8

Мощност на ядрения заряд	100 t	200 t	500 t	1 kt
Честота на използуване	0,20	0,25	0,40	0,15

на разузнатата артилерийска батарея като правило ще бъде назначен заряд с мощност 500 t или 1 kt, а по-малките мощности от 100 и 200 t ще бъдат използувани само ако липсват по-големи мощности.

Необходимо е да се изчислят вероятностите за назначаване на една или друга мощност на заряда по разкритата артилерийска батарея.

В случая са възможни следните четири събития:

Събитие D — при назначаване на заряд с мощност 1 kt. Вероятността, че противникът разполага със заряд с такава мощност и че той ще бъде използуван, е

$$P(D) = r_{1kt} = 0,15.$$

Събитие C — при назначаване на заряд с мощност 500 t. Вероятността, че противникът разполага със заряд с такава мощност и че той ще бъде използуван, е

$$P(C) = r_{500t} = 0,40.$$

Събитие B — при използуване на заряд с мощност 200 t.

Събитието B може да настъпи само при следните условия:

1. Ако противникът в момента на нанасяне на удара няма заряди с мощност 500 t и 1 kt, вероятността за което е

$$P = [1 - (r_{1kt} + r_{500t})].$$

2. Ако в момента на нанасяне на удара противникът разполага със заряд с мощност 200 t, т. е.

$$r_{200t} = 0,25.$$

При тези условия вероятността за настъпване на събитието B ще бъде равна

$$P(B) = r_{200t}[1 - (r_{1kt} + r_{500t})] = 0,25[1 - (0,15 + 0,40)] =$$
$$= 0,25(1 - 0,55) = 0,25.0,45 = 0,11.$$

Събитие A — при използуване на ядрен заряд с мощност 100 t.

Събитието A може да настъпи само при следните условия:

1. Ако противникът няма заряди с мощност 200 и 500 t и 1 kt в момента за нанасяне на удара, вероятността за което е

$$P=[1-(r_{1kt}+r_{500t})].(1-r_{200t}).$$

2. Ако противникът в момента за нанасяне на удара има заряд с мощност 100 t, вероятността за което е $r_{100t}=0,20$.

Тогава вероятността за настъпване на събитието A ще бъде

$$P(A)=r_{100t}\{[1-(r_{1kt}+r_{500t})].(1-r_{200t})\}=$$
$$=0,20(1-0,55)(1-0,25)=0,20.0,45.0,75=0,07.$$

След като разгледахме всички възможни събития за назначаване на заряд с определена мощност (100, 200, 500 t и 1 kt), съгласно теоремата на хипотезите вероятността за настъпване на всяко от горните четири възможни събития е

$$P(A)=\frac{P(A)}{\sum P_i}.$$

Като използуваме теоремата на хипотезите, определяме вероятностите за настъпване на събитията D, C, B, A.

$$P(D)=\frac{P(D)}{\sum P_i}=\frac{0,15}{0,15+0,40+0,11+0,07}=\frac{0,15}{0,73}=0,20;$$

$$P(C)=\frac{P(C)}{\sum P_i}=\frac{0,40}{0,15+0,40+0,11+0,07}=\frac{0,40}{0,73}=0,55;$$

$$P(B)=\frac{P(B)}{\sum P_i}=\frac{0,11}{0,15+0,40+0,11+0,07}=\frac{0,11}{0,73}=0,15;$$

$$P(A)=\frac{P(A)}{\sum P_i}=\frac{0,07}{0,15+0,40+0,11+0,07}=\frac{0,07}{0,73}=0,10.$$

Вероятностите са сведени в таблица 3.4.9.

С помощта на таблицата на случайните числа се проиграва назначаването на един от разполагаемите ядрени заряда от противника.

Да допуснем, че се е получило случайното число с номер 64. Това означава, че противникът ще използува за поразяване на разкритата артилерийска батарея заряд с мощност 500 t.

Таблица 3.4.9

Мощност на заряда	Вероятност за назначаване на заряда	Номера на числата, съответствуващи на вероятностите
100 t	0,10	1—10
200 t	0,15	11—25
500 t	0,55	26—80
1 kt	0,20	80—100

Определяне на очакваните загуби в личен състав и бойна техника

От таблицата на случайните числа при проиграването се получи, че противникът нанася ядрен удар с мощност 500 t. На схемата за разположението на елементите от бойния ред на дивизиона (фиг. 3.4.24) се нанасят радиусите на зоните за поражение на личния състав и бойната техника и се очертават площите на зоните за поражение.

От тази схема се вижда, че в зоната за поражение се намират два елемента от бойния ред на дивизиона — разкритата огнева позиция на батареята и нейната тяга или тягата на друга съседна батарея.

В пределите на радиуса на поразяване попадат личният състав на батареята и тягата, разположени на открито, личният състав на тягата в траншеи, а влекачите на открито. Останалите елементи от бойния ред (оръдията на батареята и личният състав в блиндажите при оръдията) остават непоразени.

По такъв начин, без да се провеждат специални стрелби, с помощта на метода „Монте Карло“ се определят загубите, които може да бъдат понесени реално от дивизиона в разгледаните условия. Но тъй като при други условия резултатите от нанасянето на удара може да бъдат различни, за получаването на обективни данни за понасяните загуби е необходимо да се проведат много изпитания от този род.

Ръчното проиграване на различните варианти, както се вижда, е свързано с много трудности. Сравнително лесно и бързо то се осъществява чрез използуването на ЕИМ по алгоритъма, разработен на фиг. 3.4.25, тъй като за постигане на твърди

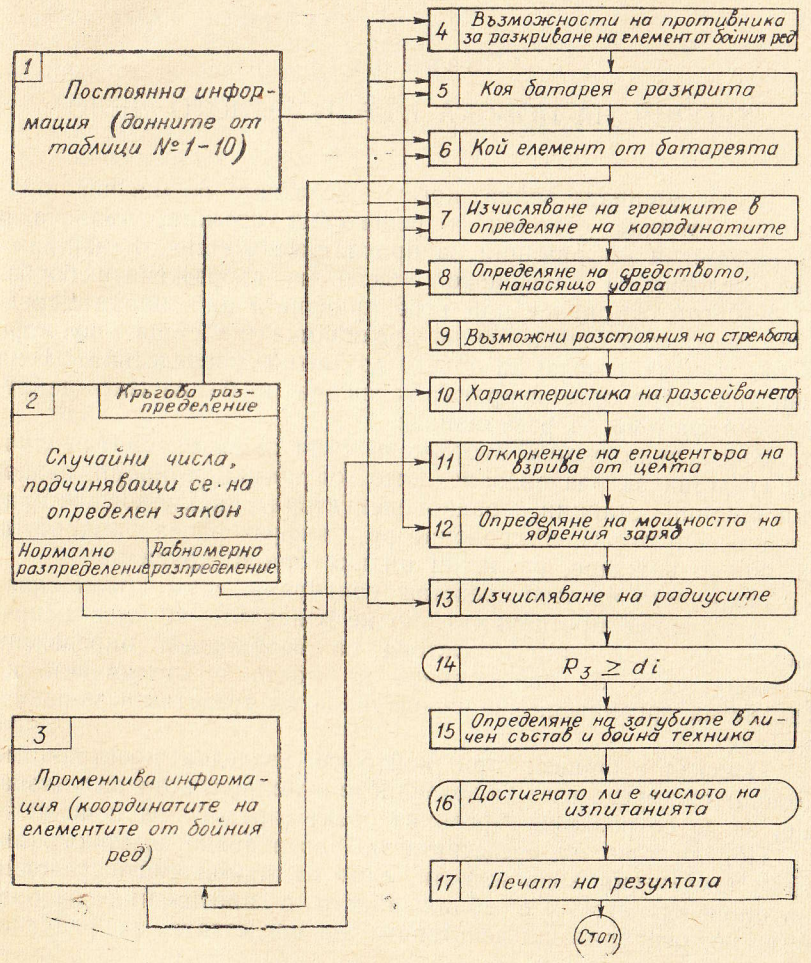
резултати, от които може да се правят съответните изводи по отношение на отдалечението на елементите от бойния ред на дивизиона и понасянето на минимални загуби, е необходимо многократно повтаряне на изпитанието при различни варианти.

Независимо от това, че сме извършили само едно изпитание, което е случайно и не позволява да се правят твърди и устойчиви изводи, става ясно, че при нанасяне на ядрен удар по разкритата батарея понасят загуби личният състав на батареята и влекачите. При използуване на по-точни средства за определяне на координатите на разкритите елементи от бойния ред ще бъдат поразени и оръдията.

Както се вижда от разгледаните въпроси и разработения пример, методът „Монте Карло“ намира широко приложение във военното дело за решаване на оперативно-тактически задачи по проиграване на бойните действия на войските, за определяне на отдалеченията между елементите на бойния ред, при които войските и бойната техника понасят минимални загуби, за създаване на най-подходяща групировка за изпълнение на поставените задачи, за оценка на надеждността на работата и анализ на режимите за използуване на различните устройства и системи на въоръжение във войските и други. За сега вероятностното моделиране е един от най-перспективните методи за получаване на количествени препоръки, необходими за анализиране на бойните действия, и даване на оценка на ефективността на огневите средства в различните варианти за действие.

БЛОКОВА СХЕМА

на алгоритъма за определяне на отдалечението между елементите от бойния ред с помощта на ЕИМ по метода на статистическите изпитания



Фиг. 3.4.25

Глава пета

ТЕОРИЯ НА ПОИСКА ВЪВ ВОЕННОТО ДЕЛО

В съвременната война, когато средствата за масово поразяване станаха основни и решителни оръжия, пълната и своевременна информация за противника е едно от най-важните условия за успешното водене на въоръжената борба. Късното откриване или неразкриването на основните средства за ядрено нападение на противника (на суша, по море и във въздуха) може да доведе до тежки последствия. Това изисква добре организирана, надеждна и безотказно действуваща система за разузнаване.

Във всички видове въоръжени сили се използуват различни средства за разузнаване, като оптически прибори, радиолокационни станции, радиопеленгатори, топлопеленгатори, шумопеленгатори, хидролокатори, инфрачервена апаратура за нощно виждане, различни индикатори и други.

Наличието на тези средства осигурява само възможност да се разузнае противникът, но не означава, че той непременно ще бъде открит. Затова са необходими определени условия, едно от най-важните от които е създаването на съответна организация за използуване на средствата за разузнаване.

Поискът е процес, при който се изследва пространство (площ) със средствата за зрителното и техническото разузнаване, за да се разкрие търсеният обект (предмет на поиска).

Поради това, че средствата за разузнаване имат ограничени технически възможности, едно от най-важните условия за провеждането му е сближаването с противника на разстояние, осигуряващо действието на средствата за разузнаване.

В случаите, когато средствата за разузнаване са неподвижни (стационарни), поискът се състои в откриване на противника при навлизането му в зоната на действие на средствата за разузнаване. По такъв начин действуват системите за радиолокационно разузнаване на въздушните цели, за разузнаване на подводници с помощта на брегови шумопеленгатори, хидролокационни установки и др. При стационарното използуване на средствата за разузнаване са нужни повече средства, отколкото при водене на поиска с подвижни средства.

При поиск с подвижни средства (кораби, самолети, танкове и др.) се съчетава техният маньовър с използуването на средствата за разузнаване. Следователно организацията на поиска с подвижни средства е по-сложна от стационарната и успехът му зависи от маневрените възможности на разузнавателните средства за сближаване с противника и от ефективното използуване на тези средства за откриване на целта.

Сега са установени много закономерности, свързани с поиска. Непрекъснатото развитие на средствата за разузнаване и характерът на обектите на поиска изискват постоянно търсене и откриване на нови закономерности. Този процес е непрекъснат дотолкова, доколкото е свързан с развитието на бойната техника.

Нека поясним същността на тези закономерности със следния пример. Ако пред наблюдателя, който провежда поиск, бъде поставена задача да се сближи с противника за най-кратко време, той трябва да се съобразява с характера на движението му.

Ако дадена точка (обект) се движи равномерно и праволинейно, тя се премества в пространството с постоянна скорост и изминава едно и също разстояние за определени интервали от време. Като се познава тази закономерност на движещите се тела, може да се определи местоположението на движещите се точки (обекти) в който и да е момент. Затова е необходимо да се изчисли пътят, който изминава всяка от тях за определено време, и той да се продължи по направление на тяхното движение. За да се осигури сближаване за най-кратко време, наблюдателят и обектът трябва да се движат под определен ъгъл. Ако тази закономерност при определяне на местоположението на противника се пренебрегне, няма да се достигне до желания резултат.

По такъв начин поискът може да бъде ефективен тогава, когато се организира въз основа на закономерностите на движението на носителите на средствата за разузнаване и законите за движението на обекта на поиска.

С разкриването и изучаването на тези закономерности се занимава теорията на поиска. Тя е система от научни знания за закономерностите за откриване на цели, които са обекти на поиска. Една от основните задачи на теорията на поиска е определянето на условията, при които той да бъде най-ефективен. Теорията на поиска научно обосновава най-целесъобразното използуване на силите и средствата за разкриване на противника (обекта на поиска).

Основните раздели на теорията на поиска са: кинематика на поиска, закони за откриване на целите със средствата за разузнаване и оптимално разпределение на средствата на поиска.

1. КИНЕМАТИЧНИ ОСНОВИ НА ТЕОРИЯТА НА ПОИСКА

Както знаем, закономерностите на движението на подвижни обекти без отчитане на действуващите сили се изучават от теоретичната механика, по-точно от кинематиката. Прилагането на кинематиката за определяне на условията, при които наблюдателят и целта се сближават на разстояние, осигуряващо разузнаването на целта, е основната задача на кинематиката на поиска.

От кинематиката е известно, че положението на телата в пространството във всеки момент се определя от техните координати. Обаче при реални условия на командуването ще бъдат известни достоверно само характеристиките на наблюдателя, а кинематичните характеристики на целта ще бъдат неизвестни. Поради това в теорията на поиска те се разглеждат като случайни, независими помежду си величини, т. е. целите са случайно разпределени.

Под случайно разпределение на целите обикновено се разбира една от следните ситуации:

а) голям брой цели имат неизвестно положение и скорост относно наблюдателя, но са известни процентите на целите с едно или друго възможно местоположение и скорост;

б) една цел има неизвестно местоположение и скорост относно наблюдателя, но е известно разпределението на плътността на вероятността, че тя има едно или друго местоположение и скорост.

Макар че на пръв поглед тези ситуации са съвършено различни, в действителност те може лесно да се сведат една към друга.

Определянето на вероятната скорост и местоположението на целта е важна и същевременно трудна задача при решаване на приложни въпроси от теорията на поиска. То може да се извърши или чрез статистически методи, или аналитично, като се правят различни хипотези за движението и положението на целите съобразно създалата се обстановка.

Нека поискът има задача да открие цел от определен тип. Следователно скоростта ѝ може да бъде определена напълно, т. е. $V_ц$ е известно. Освен това е известно, че целта действува на някаква площ S. Приемаме хипотезата за равномерно разпределение на местоположението на целите в района с лице S и равномерно разпределение на направлението на нейното движение. При тези предположения може да се определи вероятността целта да бъде в даден район.

2. ВЪЗМОЖНОСТИ ЗА ПОЯВЯВАНЕ НА ОБЕКТА НА ПОИСКА В ЗОНАТА НА ОТКРИВАНЕ

В зависимост от обстановката обектът на поиска може да бъде подвижен и неподвижен. Нека разгледаме първо възможността за откриване на неподвижни обекти в зоната за наблюдение.

Да предположим, че наблюдателят, който провежда поиска, се движи в определено направление с постоянна скорост и открива всички цели, попадащи в кръг с радиус, равен на далечината на действие на средствата за разузнаване.

Тъй като появяването на целите има случаен характер, за да се организира правилно наблюдение при поиска, необходимо е да се знае от кои направления към наблюдателя е най-вероятно да се появят противникови цели, т. е. да се знае разпределението на вероятностите за появяване на неподвижни цели в който и да е диапазон на курсовия ъгъл на наблюдателя (курсовият ъгъл се отчита от направлението за изнасяне на наблюдателя наляво и надясно от 0 до 180°). Тази вероятност се определя по формулата

$$P(q_{н2} \div q_{н1}) = \frac{1}{2}(\sin q_{н2} - \sin q_{н1}),$$

където $q_н$ — курсов ъгъл на наблюдателя.

Например вероятността за появяване на цели в диапазона на курсовите ъгли на наблюдателя от 90° отляво до 45° отдясно ще бъде

$$P(45° \text{ отдясно} \div 90° \text{ отляво}) = \frac{1}{2}[\sin(45°) - \sin(90°) =$$

$$= \frac{1}{2}(0{,}72 + 1{,}00) = 0{,}86.$$

За да се намери вероятността за появяване на неподвижни цели в даден сектор за наблюдение, може да се използува и таблица 3.5.1.

Таблица 3.5.1

Граници на сектора в градуси	Вероятност за откриване в %
10 отляво до 10 отдясно	17
20 отляво до 20 отдясно	34
30 отляво до 30 отдясно	50
40 отляво до 40 отдясно	64
50 отляво до 50 отдясно	77
60 отляво до 60 отдясно	87
70 отляво до 70 отдясно	94
80 отляво до 80 отдясно	98

С помощта на таблицата може бързо да се определи вероятността за откриване на неподвижен обект в зоната за наблюдение в зависимост от сектора, в който то се води. Таблицата показва, че при ограничен брой средства за наблюдение е целесъобразно поискът да се провежда в сектор с граници 50° отляво и 50° отдясно.

При поиск на **подвижни цели,** което има най-голямо значение за военното дело, възникват много по-сложни ситуации, отколкото при поиск на неподвижни цели. В теорията на поиска има разработени методи за решаване на тази задача. Доказано е, че средното количество цели, движещи се в най-различни направления и попадащи за единица време в зоната за откриване на наблюдателя, зависи както от скоростта на движението на целите, така и от скоростта на движението на наблюдателя.

Освен това колкото по-голяма е скоростта на движението на наблюдателя и целите, толкова повече цели се появяват за единица време в пределите на зоната за откриване.

От тези положения може да се направят някои практически изводи. Ако сме открили противника, но не ни е известно направлението на движението му, за да не ни открие,

нужно е да намалим скоростта си до възможната най-малка скорост, но без да му дадем възможност да се скрие.

Най-много цели, попадащи в зоната за откриване на наблюдателя за единица време, има тогава, когато той се движи срещу възможните курсове на целите, и най-малко, когато курсът на наблюдателя съвпада с възможните направления за движение на целите.

3. ЗАКОН ЗА ОТКРИВАНЕ НА ЦЕЛИТЕ СЪС СРЕДСТВАТА ЗА НАБЛЮДЕНИЕ

При изследване на законите за откриване на целите със средствата за разузнаване се разработват методи за оценка на ефективността на тези средства. Опитът показва, че появяването на целите в зоната за действие на средствата за разузнаване още не означава, че те непременно ще бъдат открити. Това зависи от вида на средствата за разузнаване, от разстоянието до целта и от нейните размери, видимостта, отразяващата способност на целите, ъгъла на движение, състоянието на материалната част, режима на използуване на средствата за разузнаване и от възможностите и състоянието на личния състав, обслужващ средствата за разузнаване.

За да се установи каква е зависимостта на откриването на целите от различните условия за наблюдение, голямо значение има събирането на данни по откриване на цели при конкретна обстановка. Много важно е да се знае къде, кога и при какви обстоятелства е станало откриването им. Обработката на данните чрез методите на математическата статистика и теорията на вероятностите позволява да се даде оценка на използуваните средства за разузнаване.

4. ТЕОРЕТИЧНО ОБОСНОВАВАНЕ НА СПОСОБИТЕ НА ПОИСКА

Значително място в теорията на поиска заемат конкретната ситуация, способите за провеждане на поиска и критерият за неговата ефективност.

Под конкретна ситуация се разбират обстановката и условията за провеждане на поиска, определени от задачите, поставени пред силите на поиска, и от обема на информацията за целта.

Конкретните ситуации, които имат практическо значение, са следните:

— поиск в даден район;
— поиск по данни, получени от други сили и средства;
— поиск на даден рубеж.

Поиск в даден район е такава ситуация, при която участвуващите сили нямат конкретни данни за местоположението и движението на противника, а откриването му се извършва в район с ограничени размери. В този случай може само да се предполага възможното направление за движение и мястото на обекта.

Поискът по данни, получени от други сили и средства, представлява такава ситуация, при която силите на поиска разполагат с данни за мястото и движението на обекта на поиска. В отделни случаи може да липсва сведение за направлението за движение на целта или движението може да бъде в пределите на даден сектор.

Необходимостта от такъв поиск възниква в случаите, когато дадени сили, които разузнават противника, нямат възможност веднага да го унищожат или да проследят по-нататъшното му движение. Данните за разкритите обекти тогава се предават на други сили, намиращи се в съответния район.

Поиск на даден рубеж се нарича ситуацията, при която поисковите сили имат задача да не допускат преминаването на противника през определен рубеж. При това или може да има данни за местоположението и движението му, или не.

Откриването на целта при всяка конкретна ситуация може да бъде осъществено по различни начини. Те имат свои особености, които се определят от силите и средствата, особеностите на района, начина и времето за провеждане на поиска.

Оттук възниква необходимостта да се прилагат най-целесъобразни способи на поиска, осигуряващи ликвидирането на целите в най-кратък срок и с минимални сили и средства.

В теорията на поиска критерият на ефективността дава възможност да се оцени доколко един способ на поиска е по-ефективен от друг.

Ефективността на способите на поиска може да се определя чрез различни критерии, например чрез вероятността за откриване на целта при поиска, от броя на корабите или самолетите, участвуващи в него, от времето за поиска и други. Най-ефективният способ за действие на пусковите сили е свързан с избор на подходящи критерии на ефективност. Нека дадем един пример. В определен район група подводни лодки разузнава противникови кораби. При това за даден интервал

то време T са открити C кораби. Очевидно величината C е целесъобразно да бъде приета за критерий на ефективност на приетия способ на поиска, защото успешното му провеждане освен от броя на разузнатите цели зависи и от неговата продължителност. По-правилно би било да се вземе средното количество разузнати цели за единици време (C делено на T).

Докато районът за поиска остава непроменен, величината $\left(\frac{C}{T}\right)$ зависи от ефективността на дадено средство на поиска и от средния брой (N) противникови кораби, които са в този район.

Ако имаме данни от разузнаването или от други източници за средния брой на противниковите кораби, намиращи се в даден район, можем да определим критерия за ефективността на поиска по формулата

$$Q=\frac{CA}{NT}\ \frac{\text{кв.мили}}{\text{час(ден)}},$$

където:

— C — брой на откритите противникови цели за единица време;
— A — район на поиска в квадратни мили;
— T — общо време за провеждането на поиска в часове (или дни) от всички наблюдатели;
— N — вероятен брой на противниковите кораби в района на поиска.

Тъй като дадената величина се измерва в квадратни мили в час, тя обикновено се нарича ефективна или реална скорост на поиска. Тя представлява способността на една разузнавателна единица да открие противников обект при определени условия, приближени до реалните, или се равнява на площта, която може да разузнае едно разузнавателно средство за един час (или един ден).

Пример. Провежда се поиск в район, който има лице $S=60\,000$ кв. мили. Известно е, че в този район се намират едновременно 15 цели. Поискът се води от 20 наблюдатели в продължение на един месец (30 дни) и са открити 250 цели.

Необходимо е да се намери ефективността (реалната скорост) на поиска.

Решение:

Най-напред определяме общото време за провеждане на поиска от всички наблюдатели, т. е.

$$T=30\,.\,20=600 \text{ дни.}$$

След това намираме ефективността по формулата

$$V_{еф}=\frac{CA}{NT}=\frac{250.60000}{15.600}=\frac{15000000}{9000}=1666\,\frac{\text{кв. мили}}{\text{ден}}.$$

От изложеното се вижда, че полученият критерий не отразява най-важните способности, присъщи на разузнавания обект и на използуваните разузнавателни средства. Ето защо, за да се изследва способът на поиска, освен разгледаната по-горе реална скорост се въвежда така наречената теоретична скорост на поиска ($V_т$). Тя е равна на ефективната ширина ($Ш_{еф}$) на поиска, умножена на скоростта на движение на разузнавателното средство $V_р$, т. е.

$$V_т=Ш_{еф}V_р.$$

Съотношението на реалната скорост с теоретичната ни дава критерия на ефективност на приведения поиск.

За организиране на поиска по данни, открити от други сили, много важно е да се установи положението на целта в района на нейното първоначално откриване и в момента на преминаването ѝ в района на поиска. Практически при откриване на целта мястото ѝ ще бъде известно с относителна точност, която зависи от точното определяне на координатите на целта относно наблюдателя и координатите на самия наблюдател.

Ако не сме в състояние да изследваме едновременно целия район с наличните сили, най-напред трябва да изследваме участъците, където местоположението на целта е най-вероятно. Следователно маршрутите за движение на поисковите сили трябва да преминават през районите, в които най-вероятно се намират противниковите обекти. Най-правилният маршрут за движение на поисковите сили в този случай е разклоняващата спирала. Същността на този способ се изразява в следното (фиг. (3.5.1):

На наблюдателя ($К$), който води разузнаването, е известно, че в даден момент целта се намира в точка $С$ на разстояние $КЦ=D$ от него. Предполагаме, че скоростта на движение на целта $V_ц$ е известна, а е неизвестно направлението ѝ за движение. Допускаме, че целта се движи към наблюдателя. Тогава той трябва да се движи в направление на изнасянето на целта и срещата трябва да стане в точка $С$, намираща се на рзстояние $КС$ от изходното място на наблюдателя. Това разстояние може да бъде намерено от пропорцията

$$\frac{КС}{ЦС}=\frac{V_к}{V_ц}.$$

След като заместим $ЦС$ с $(D-КС)$, получаваме:

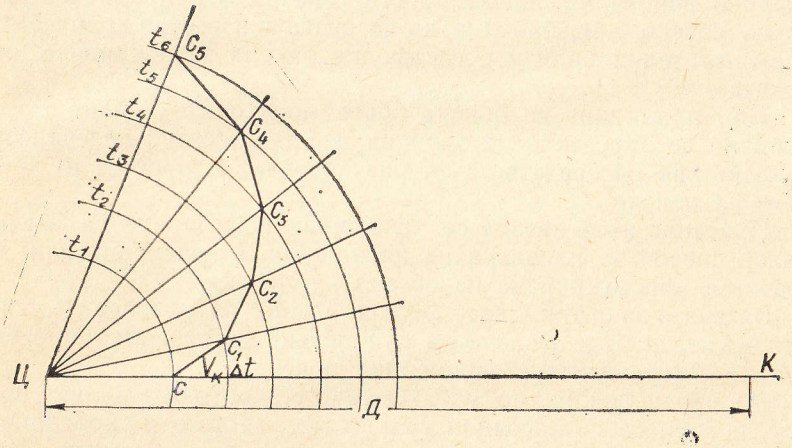
$$КСV_ц=(D-КС)V_к;\quad КСV_ц+КСV_к=DV_к;$$

$$КС=\frac{DV_к}{V_к+V_ц}.$$

Времето, необходимо за пристигането на наблюдателя в точка $С(t_с)$, може да се намери от съотношението

$$t_с=\frac{КС}{V_к}=\frac{D}{V_к+V_ц}.$$

По-нататък поискът ще се провежда по следния начин. След като наблюдателят достигне в точка $С$ и не открие целта, трябва да измени своя курс към следващото най-вероятно местоположение на целта. Необходимо е курсът на наблюдателя да се изчисли така, че на това ново място срещата му с целта да се осъществи след известно време $\Delta t_с$. За изпълнение на тези условия от точка $Ц$ описваме окръжност с радиус, равен на пътя на целта за време $t+\Delta t$ (окръжност t). Радиусът ѝ ще бъде равен на $V_ц(t+\Delta t)$.



Фиг. 3.5.1

Възможните точки, в които ще се намира целта след време Δt след пристигането на наблюдателя в точка $С$, ще лежат на окръжността с радиус $V_ц(t+\Delta t)$. За да намерим мястото на срещата на целта с наблюдателя, който идва от точка $С$, прокарваме дъга $V_к\Delta t$ от точка $С$ към окръжността t_2.

Получената точка C_1 е търсеното място на срещата.

По същия начин получаваме точките C_2, C_3, C_4 и т. н., които дават пътя за движение на наблюдателя при поиска.

5. ОПТИМАЛНО РАЗПРЕДЕЛЕНИЕ НА ПОИСКОВИТЕ УСИЛИЯ

В този раздел на теорията на поиска са разгледани въпросите по определяне на оптималното разпределение на силите и средствата за разузнаване и се изследват условията, при които то ще бъде най-ефективно. Същността на проблема за разпределение на поисковите усилия се заключава в следното.

Да предположим, че за откриване на дадена цел са определени няколко поискови единици. Положението на целта се характеризира с вероятността на положението ѝ в различни точки в района на поиска. Освен това за откриване на обекта на поиска е необходимо да се отделят известно количество разузнавателни сили и средства по закона за откриване на целите.

При планиране на поиска обаче поисковите усилия като правило се определят от броя на наблюдателите, далечината на действие на средствата за разузнаване, скоростта и времето на поиска.

Практическата задача се заключава в намиране на оптимален способ за използуване на наличните поискови сили и средства при откриване на обекта на поиска.

Задачата за оптималното разпределение на поисковите усилия може да бъде решена за едномерен, двумерен и тримерен поиск. Ще разгледаме едномерния поиск.

Да предположим, че наблюдателите, които извършват поиск на цел, са се насочили към целта, мястото и координатите на движение, на която са известни в даден момент. Тогава на предполагаемия рубеж на срещата (условна линия, перпендикулярна на движението на целта, на която се намират наблюдателят и целта, при условие че не са допуснати грешки при определяне на координатите на нейното движение и местонахождението) ще има място случаят на едномерния поиск. Ако са отчетени грешките в местоположението и курса на целта, подчинени на нормалния закон за разпределение, на предвидения рубеж на срещата плътността на разпределението на вероятността за местоположението на целта (P) ще имат вида:

$$P=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}},$$

където: σ — средноквадратичното отклонение, обусловено с грешките в местоположението и курса на целта.

На същия рубеж обемът на поисковите усилия (Φ) се определя от формулата

$$\Phi=D_{н}N_{н},$$

където:

— $D_{н}$ — далечина на действие на средствата за наблюдение;

— $N_{н}$ — брой на наблюдателите.

От посочените формули може да се направи изводът, че при осев едномерен поиск разпределението на целта на линията на поиска е функция, аргументът на която е разстоянието от която и да е условна точка.

Поисковите възможности от своя страна са функция, аргументът на която се изразява с разстоянието на откриване (например далечината на действие на средствата за разузнаване), в резултат на което за оптимално разпределение на наблюдателите на линията на поиска се приема това, при което разстоянието между тях дава най-голяма възможност за откриване на обекта на поиска.

По такъв начин задачата за оптималното разпределение на поисковите усилия за едномерен поиск се свежда до определяне на такива разстояния между наблюдателите, които дават най-добри възможности за разузнаване.

По същия начин, но по-сложно се определят необходимите данни за двумерен и тримерен поиск.

В заключение може да се каже, че теорията на поиска е едно от новите направления в методите на изследване на операциите. С нейна помощ може да се решат важни практически въпроси, като избор на целесъобразен сектор за наблюдение, определяне на най-добрия режим за използуване на средствата за разузнаване, диапазона на тяхната работа и други.

Едновременно с това трябва да се отбележи, че не всички проблеми в теорията на поиска са решени и не всички доказателства са изчерпателно точни.

Глава шеста

МАТЕМАТИЧЕСКО ОПИСАНИЕ НА ДИНАМИКАТА НА БОЙНИТЕ ДЕЙСТВИЯ НА ВОЙСКИТЕ

Опити за използуване на математиката за описване на въоръжената борба и прогнозиране на нейното развитие са правени още през XVIII век от Лоид и Бюлов. Лоид изследва количествените връзки между различните фактори, които влияят върху хода и изхода на бойните действия на войските. Според него, войната може да се раздели на две рязко противоположни страни: материалните фактори, които може да се опишат и изразят математически, и субективните фактори, които не се поддават на математическо описание.

Бюлов продължава започнатите изследвания от Лоид и съществено разширява използуването на математиката във военното дело.

Опит за изследване на бойните действия на войските прави английският математик Ланчестер. В труда си „Войната и въздушните сили“, издаден през 1916 год., той предлага уравнения, изразяващи зависимостта между понасяните загуби от войските и качествените характеристики на използуваното въоръжение.

В хода на Втората световна война бяха привлечени крупни математици за изследване на бойните действия и за определяне на оптималните варианти за действие с помощта на математическите методи. През този период бяха разработени методите за оценка на уязвимостта на целите, методите за изследване на ефективността на стрелбата с различни средства в зависимост от характера на целите, анализът на конфликтните ситуации и др.

Особено развитие и приложение тези методи получиха след Втората световна война. Чрез тях може нагледно и бързо да се установят степента на ефективност при прилагането на

различните способи за действие, количеството и качеството на въоръжението, условията за водене на бойните действия и други.

1. ОБЩИ ПОЛОЖЕНИЯ

Математическите методи за описване и изучаване на количествените закономерности на боя в условията на взаимно огнево въздействие между две групировки получиха в последно време широко развитие. Те позволяват да се провери решението за действие, да се определят оптималните варианти, да се обосноват изискванията към новосъздаваните образци въоръжение и бойна техника и да се определят бойните възможности на войските и въоръжението в дадено направление или рубеж за действие.

Математическото описание на динамиката на бойните действия между две групировки с отчитане на многобройните фактори, които оказват влияние върху развитието на боя, представлява извънредно сложна и трудна задача. Затова обикновено се разглеждат някои по-опростени и схематизирани модели, в които нагледно се проявяват основните и най-важните количествени закономерности при водене на бойните действия между две групировки. Освен това тези модели позволяват да се види влиянието на главните и съществените фактори, като количествения състав на огневите единици на групировките, огневата мощ на отделна огнева единица и групировката като цяло, преимуществата на изпреварващия удар и внезапността, темповете за нарастване на силите за противодействие с въвеждане на резерви и втори ешелони, коефициента за преимущество с отчитане на количеството и качеството на огневите единици на групировките, темпа за настъпление в зависимост от съотношението на основните сили и средства, необходимия брой огневи средства за постигане на успех в боя при конкретна обстановка, времето за водене на бойните действия между групировките за нанасяне на определени загуби, скорострелността, вероятността и ефективността на огъня на огневите единици и др.

Въздействието на групировките се осъществява с наличното въоръжение, което притежава определени възможности. Тези възможности зависят от средната скорострелност и вероятността за поразяване на целта. Стрелбата на отделните огневи единици от групировките може да се разглежда като поасоновски поток от събития. Право за това дава теоремата на Палм, същността на която се заключава в това, че при разглеждането

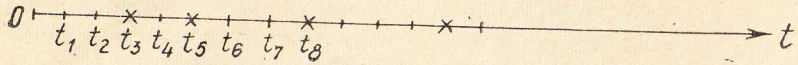
на отделни зависими случайни събития като съвкупност от събития средният резултат е близък до поасоновския. Така например, ако при стрелба на огневи единици отделните изстрели се разглеждат независими един от друг, отделните потоци от изстрели може да се заменят със сумарния поасоновски поток. Плътността на потока от изстрели може да се разглежда като средна скорострелност. Затова при математическото описание на динамиката на бойните действия широко се използува допускането за поасоновски поток на изстрелите от отделна огнева единица или от групировката като цяло.

Стрелбата на огневите единици по дадена цел се характеризира с определена вероятност. Вероятността за попадение на снаряда (ракетата) в целта зависи от много фактори, основните от които са тактико-техническите характеристики на въоръжението, характерът и степента на укритие на целта, степента на подготовка на разчета (екипажа), условията на стрелбата (видимост, разстояние, местност и други). Тази вероятност за отделните изстрели и огневи единици на дадена групировка е различна, тъй като условията на стрелбата и степента на подготовката на разчетите са различни.

При моделиране на боя между две групировки е трудно да се отчита вероятността на отделните изстрели и огневи единици, затова се определя средната вероятност за попадение в целта. Средната вероятност за попадение трябва да се определя с отчитане на най-важните и съществените фактори, които оказват влияние върху процесите на стрелбата на огневите средства, като качествените характеристики на въоръжението, характера и положението на целта, местността, видимостта, времето през денонощието и годишното време, подготовката на разчетите (екипажите) и др.

За моделиране на огневото въздействие между огневите единици на двете групировки е необходимо да се отчитат възможностите на отделните единици. Тези възможности често се определят като успешни изстрели на огневата единица. Изстрелите на дадена огнева единица са успешни тогава, когато поразяват целта или биха я поразили, ако до този момент тя не е поразена от други изстрели. При даден поток от изстрели на огневата единица могат да се определят тези от тях, които са успешни и образуват поток от успешни изстрели.

Ако на временната ос за произвеждането на изстрелите (Ot) с отчитане вероятността за попадение се нанесат с точки отделните изстрели, а с кръстчета успешните изстрели, получава се поток от поразяващи и непоразяващи изстрели, независими един от друг (фиг. 3. 6. 1).



Фиг. 3.6.1

По такъв начин успешните изстрели също представляват поасоновски поток, но с друга плътност, т.е.

$$n=\lambda.p,$$

където:

— n — плътност на потока успешни изстрели;

— λ — плътност на потока от изстрели или средна скорострелност;

— p — вероятност за поразяване на целта при един изстрел.

Плътността на потока от успешни изстрели n представлява средна ефективна скорострелност на отделна огнева единица. Величините λ и p може да бъдат постоянни или изменящи се с течение на времето в зависимост от условията на стрелбата.

При създаването на математически модели на бойните действия на войските е необходимо те да се опишат математически и да се покаже протичането им във времето и пространството. За извеждане на математическите зависимости е удобно процесите да се представят като съвкупност от единни процеси, взаимодействуващи помежду си и намиращи се под въздействието на външни условия, които определят изхода на боя.

На сегашния етап сравнително добре са разработени и широко се използуват математическите модели, изразяващи динамиката на бойните действия между еднородни огневи единици, но еднородни само за едната воюваща страна. Между отделните страни могат да бъдат и разнородни. Например от едната страна участвуват танкове, а от другата — противотанкови средства; самолети срещу самолети или самолети и зенитни средства; танкове с танкове и други. За сега трудно може да се моделира двубоят между общовойскови части и подразделения, в които има различни огневи единици (стрелково оръжие, артилерия, противотанкови средства, минохвъргачки, танкове, зенитни средства и други).

В зависимост от условията за водене на двубоя между две групировки, т. е. от възможността те взаимно да се наблюдават

и оценяват състоянието на отделните огневи единици, моделите, описващи динамиката на бойните действия, се подразделят на:

— модели, описващи боя между две групировки при наличие на информация за състоянието на огневите единици и възможност за пренасяне на огъня;

— модели, описващи боя между две групировки при липса на информация за състоянието на огневите единици и без пренасяне на огъня;

— модели за определяне на средния брой огневи единици, намиращи се в дадено състояние в динамиката на боя (метод динамика на средните).

Последователно ще разгледаме тези три вида модели и ще покажем техния математически апарат и практическото им използуване за решаване на конкретни задачи по моделиране на динамиката на бойните действия между две групировки.

2. МОДЕЛИ, ОПИСВАЩИ ДИНАМИКАТА НА БОЯ МЕЖДУ ДВЕ ГРУПИРОВКИ ПРИ НАЛИЧИЕ НА ИНФОРМАЦИЯ И ВЪЗМОЖНОСТ ЗА ПРЕНАСЯНЕ НА ОГЪНЯ

2.1. Същност на модела

Моделите от този вид описват боя можду две групировки или бойни единици, като с формулни зависимости се проследява влиянието на основните фактори в развитието на боя и се отразяват измененията, настъпващи в числеността на страните, с отчитане продължителността на бойните действия, скорострелността и вероятността за попадение.

Тези модели в литературата се наричат аналитични или модели на Ланчестер.

За извеждането на формулите, изразяващи динамиката на боя, се разглежда боят между две групировки (оръдия, танкове, самолети, ракети, жива сила и други): едната групировка „червени“, а другата — „сини“. Първоначалният състав на групировките е N_1 и N_2.

При съставяне на такъв модел за боя на двете групировки се правят следните допускания:

1. Всяка бойна единица от групировките, докато не е поразена, произвежда за единица време случаен поток от изстрели със средна скорострелност съответно λ_1 и λ_2.

2. Всяка бойна единица от едната и другата групировка може да стреля по всяка бойна единица от срещуположната

групировка, като отделна огнева единица се поразява от един изстрел. Следователно огънят се явява строго прицелен, насочен за поразяване на дадена бойна единица, и се характеризира с определена вероятност съответно p_1 и p_2.

3. Ако дадена бойна единица бъде поразена, огънят мигновено се пренася по друга, а поразената единица не участвува в по-нататъшните бойни действия.

4. Времелетенето на снаряда (ракетата, куршума) не се отчита, тъй като е много малко в сравнение с общата продължителност на боя.

5. Сумарната огнева мощ на групировките е пропорционална не само на случайния брой непоразени бойни единици, но и на тяхното средно значение. Това е валидно за многочислени групировки, т. е. в началото на боя.

По-нататък средният брой на огневите единици, непоразени към даден момент, ще бъде съответно m_1 и m_2.

Огневите възможности на отделните огневи единици на групировките се характеризират с ефективната скорострелност (n_1 и n_2), която се определя като произведение на средната скорострелност и вероятността за попадение, т. е. $n_1=\lambda_1 p_1$; $n_2=\lambda_2 p_2$.

Ориентировъчно протичането на боя между двете групировки може да се предскаже, като се изведат математическите формули, с помощта на които във всеки момент от време може да се определи средният брой на непоразените огневи единици в динамиката на боя.

Ако се разглежда изменението в числеността на групировките за един много малък промеждутък от време Δt, на този безкрайно малък промеждутък от време ще съответствува и безкрайно малко изменение в боя на непоразените огневи средства, т.е. съответно Δm_1 и Δm_2.

За този малък промеждутък от време Δt всяка отделна огнева единица от „сините“ ще произведе средно $p_2\lambda_2\Delta t=n_2\Delta t$ успешни изстрела. Всички непоразени бойни единици на „сините“, които са m_2, ще произведат $m_2.n_2.\Delta t$ успешни изстрела. Тъй като се приема, че отделен изстрел поразява една огнева единица, това ще съответствува на поразените единици на „червените“. Следователно изменението в броя на непоразените огневи средства на „червените“ съответствува на възможностите на „сините“ за това безкрайно малко време (Δt), т.е.

$$\Delta m_1=-m_2 n_2 \Delta t.$$

Като разделим на Δt и преминем към граница при $\Delta t \to 0$, получаваме

$$\frac{dm_1}{dt} = -m_2 n_2.$$

Като разсъждаваме аналогично, за „сините“ получаваме

$$\Delta m_2 = -m_1 n_1 \Delta t;$$

$$\frac{dm_2}{dt} = -m_1 n_1.$$

Диференциалните уравнения описват динамиката на боя на еднородни бойни средства приблизително и се използуват при сравнително по-голям брой огневи единици на участвуващите групировки.

При започване на боя $t=0$, $m_1=N_1$, а $m_2=N_2$. След като решим диференциалните уравнения и направим известни преобразования, получаваме следните практически формули:

$$m_1 = \frac{1}{2}N_1\left(e^{\sqrt{n_1 n_2}\,t} + e^{-\sqrt{n_1 n_2}\,t}\right) - \frac{1}{2}N_2\sqrt{\frac{n_2}{n_1}}\left(e^{\sqrt{n_1 n_2}\,t} - e^{-\sqrt{n_1 n_2}\,t}\right);$$

$$m_2 = \frac{1}{2}N_2\left(e^{\sqrt{n_1 n_2}\,t} + e^{-\sqrt{n_1 n_2}\,t}\right) - \frac{1}{2}N_1\sqrt{\frac{n_1}{n_2}}\left(e^{\sqrt{n_1 n_2}\,t} - e^{-\sqrt{n_1 n_2}\,t}\right).$$

Тъй като $\frac{e^x + e^{-x}}{2} = ch x$ е хиперболичен cos, а $\frac{e^x - e^{-x}}{2} = sh x$ е хиперболичен sin, тогава, като заместим, получаваме:

$$m_1 = N_1 ch(\sqrt{n_1 n_2}\,t) - N_2\sqrt{\frac{n_2}{n_1}}\,sh(\sqrt{n_1 n_2}\,t);$$

$$m_2 = N_2 ch(\sqrt{n_1 n_2}\,t) - N_1\sqrt{\frac{n_1}{n_2}}\,sh(\sqrt{n_1 n_2}\,t).$$

Пример 1.

Води се бой между две подразделения (настъпващи — „сини“ и отбраняващи се — „червени“) при следните условия:

$$N_2 = 170;\quad N_1 = 70;$$
$$\lambda_2 = 8;\quad \lambda_1 = 14;$$
$$p_2 = 0{,}002;\quad p_1 = 0{,}006.$$

Да се определи в чия полза ще завърши боят, ако атаката на „сините“ се счита за отразена при достигане до предния край на „червените“ с численост, по-малка от числеността на отбраняващите се.

Решение:

1. Определят се величините, влизащи в основните формули.

$$n_1 = \lambda_1 p_1 = 14.0{,}006 = 0{,}084;$$
$$n_2 = \lambda_2 p_2 = 8.0{,}002 = 0{,}016;$$
$$\sqrt{n_1 n_2} = \sqrt{0{,}084.0{,}016} = \sqrt{0{,}00134} = 0{,}037;$$
$$\sqrt{\frac{n_2}{n_1}} = \sqrt{\frac{0{,}016}{0{,}084}} = \sqrt{0{,}191} = 0{,}44;$$
$$\sqrt{\frac{n_1}{n_2}} = \sqrt{\frac{0{,}084}{0{,}016}} = \sqrt{5{,}25} = 2{,}3.$$

2. Заместват се изчислените величини в основните формули:

При $t=4$ min:

$m_1 = 70ch(0{,}037.4) - 170.0{,}44sh(0{,}037.4) = 70ch0{,}15 - 75sh0{,}15 = 70.1{,}01 - 75.0{,}15 = 71 - 11 = 60$ непоразени бойци.

$m_2 = 170ch0{,}15 - 70.2{,}3.sh0{,}15 = 170.1{,}01 - 161.0{,}15 = 172 - 24 = 148$ непоразени бойци.

При $t=10$ min.

$m_1 = 70ch(0{,}037.10) - 170.0{,}44sh(0{,}037.10) = 70ch0{,}37 - 75sh0{,}37 = 70.1{,}07 - 75.0{,}38 = 75 - 28 = 47;$

$m_2 = 170ch0{,}37 - 70.2{,}3sh0{,}37 = 170.1{,}07 - 161.0{,}38 = 182 - 61 = 121.$

При $t=15$ min:

$m_1 = 70ch(0{,}037.15) - 170.0{,}44sh(0{,}037.15) = 70ch0{,}56 - 75sh0{,}56 = 70.1{,}16 - 75.0{,}59 = 81 - 44 = 37;$

$m_2 = 170ch0{,}56 - 70.2{,}3sh0{,}56 = 170.1{,}16 - 161.0{,}59 = 198 - 95 = 103.$

Извод. От изчисленията се вижда, че при така поставените условия боят между двете подразделения завършва в полза на „сините“ (настъпващите). Ако се постави друго условие, например понасяне на 50—60% загуби от настъпващите (атаката е отразена), боят завършва в полза на отбраняващите се.

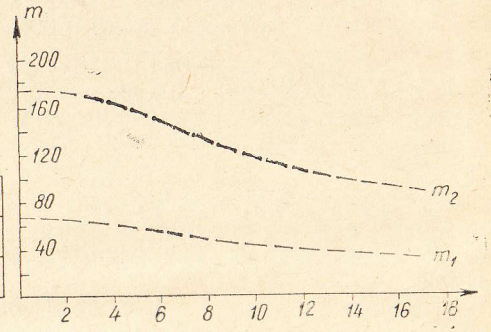
Резултатите от направените разчети за броя на непоразените бойци на двете подразделения при моделирането на ди-

намиката на бойните действия може да се сведат в таблица и да се състави график (фиг.3.6.2)

Пример 2.

За организиране на противотанковата отбрана на танкоопасно направление са развърнати 30 пт средства от различен калибър и вид, които имат средна скорострелност $\lambda_1=3$ из-

m \ t_{min}	0	4	10	15
m_1	70	60	47	37
m_2	170	148	121	103



Фиг. 3.6.2

стрела в минута и вероятност за попадение при един изстрел $p_1=0,18$. Очаква се в това направление да настъпи до танков батальон на противника в състав $N_2=54$ танка със средна скорострелност $\lambda_2=1,5$ изстрела в минута и вероятност за попадение при един изстрел $p_2=0,12$.

Да се определи възможността за отразяване на противниковите танкове, ако атаката се счита за отразена при понасяне на 60% загуби.

Решение:

1. Определят се величините, които влизат в основните формули:

$$n_1=\lambda_1 p_1=3.0,18=0,54:$$
$$n_2=\lambda_2 p_2=1,5.0,12=0,18;$$
$$\sqrt{n_1 n_2}=\sqrt{0,54.0,18}=\sqrt{0,097}=0,31;$$
$$\sqrt{\frac{n_1}{n_2}}=\sqrt{\frac{0,54}{0,18}}=\sqrt{3}=1,73;\quad \sqrt{\frac{n_2}{n_1}}=\sqrt{\frac{0,18}{0,54}}=\sqrt{0,33}=0,57.$$

2. Заместват се така изчислените величини в основните формули:

При $t=2$ min:

$m_1=30ch(0,31.2)—54.057sh(0,31.2)=30ch0,62—31sh0,62=$
$=30.1,2—31.0,66=36—20=16$ пт средства;

$m_2=54ch0,62—30.1,73sh0,62=54.1,2—52.0,66=65—34=31$ танка.

При $t=3$ min:

$m_1=30ch(0,31.3)—54.0,57sh(0,31.3)=30ch0,93—31sh0,93=$
$=30.1,46—31.1,07=44—32=12;$

$m_2=54ch0,93—30.1,73sh0,93=54.1,46—52.1,07=79—56=23.$

При $t=5$ min:

$m_1=30ch1,55—54.0,57sh1,55=30.2,46—31.2,25=74—70=4;$

$m_2=54ch1,55—30.1,73\ sh1,55=54.2,46—52.2,25=133—117=$
$=16.$

Извод. При тези условия боят завършва в полза на противотанковите средства, като към 4-тата минута танковете губят около 60% и атаката е отразена. Освен това противотанковите средства понасят значителни загуби, което показва, че тези средства, развърнати един път на даден рубеж, трудно може да се използуват в по-нататъшните действия. Необходимо е да се попълнят с личен състав и бойна техника.

От изведените формули и направените разчети се вижда, че получените количествени зависимости между двете групировки не отчитат измененията в тактиката на действията на страните.

2.2. Определяне на необходимия брой огневи средства за достигане на желани загуби от срещуположната групировка

За да се разпределят най-правилно силите и средствата за изпълнение на различните задачи, необходимо е да се определят огневите единици, с които за определено време се нанасят загуби на срещуположната групировка и тя губи своята боеспособност. Това осигурява изпълнението на задачите при оптимален брой огневи средства с определени тактико-технически характеристики.

От изведената формула за определяне на броя на непоразените огневи средства за групировката на „сините“

$$m_2=N_2 ch(\sqrt{n_1 n_2}t)—N_1\sqrt{\frac{n_1}{n_2}}\ sh(\sqrt{n_1 n_2}t)$$

може да се определи необходимият брой огневи единици N_1 на „червените“ за достигане на предварително зададен брой

m_2 на непоразените огневи единици на „сините“ за определено време от началото на двубоя, т. е.

$$N_1=\frac{N_2 ch(\sqrt{n_1 n_2}\,t)-m_2}{\sqrt{\frac{n_1}{n_2}}\,sh(\sqrt{n_1 n_2}\,t)}.$$

Като се разсъждава аналогично, за групировката на „сините“ се получава

$$N_2=\frac{N_1 ch(\sqrt{n_1 n_2}\,t)-m_1}{\sqrt{\frac{n_2}{n_1}}\,sh(\sqrt{n_1 n_2}\,t)}$$

Пример 3.

По условията на пример първи да се определи необходимият брой войски за отбрана на района, осигуряващи към 6-тата минута понасяне на 30% загуби от настъпващите.

Решение:

1. По условията на пример първи е дадено:

$n_1=0{,}084;$ $\sqrt{n_1 n_2}=0{,}037;$

$n_2=0{,}016;$ $\sqrt{\frac{n_1}{n_2}}=2{,}3.$

2. При $t=6$ min понесените 30% загуби от настъпващит представляват 51 боец.

Следователно $m_2=170-51=119$ бойци.

3. Заместват се данните от пример първи и дадените вели ни по пример трети във формулата:

ч

$$N_1=\frac{N_2 ch(\sqrt{n_1 n_2}\,t)-m_2}{\sqrt{\frac{n_1}{n_2}}\,sh(\sqrt{n_1 n_2}\,t)}=\frac{170 ch(0{,}037.6)-119}{2{,}3 sh(0{,}037.6)}=$$

$$=\frac{170\mathrm{ch}0{,}222-119}{2{,}3\mathrm{sh}0{,}222}=\frac{170.1{,}024-119}{2{,}3.0{,}22}=\frac{174-119}{0{,}506}=\frac{55}{0{,}506}=108.$$

Извод. При така поставените условия за отразяване на настъплението на „сините“ „червените“ трябва да разполагат със 108 бойци.

2.3. Определяне на броя на непоразените огневи средства за едната групировка при желани загуби от срещуположната групировка

При моделиране на динамиката на бойните действия между две групировки възниква необходимостта да се определи броят на огневите средства, които не са поразени след изпълнение на поставената задача.

Състоянието на групировката след завършването на бойните действия се оценява по следния ред:

а) в състояние ли е тя да продължи бойните действия при така понесените загуби или е необходимо да се попълни с жива сила и бойна техника;

б) ако са понесени частични загуби, след колко време може да се организира огневата система и да се възстанови управлението;

в) при понесени по-големи загуби, изискващи попълване, да се реши след колко време може да се извърши то и как по-нататък да се използува това подразделение в боя и операцията.

От първоначално изведените формули за m_1 и m_2 може да се определи броят на непоразените огневи средства съответно за едната и другата групировка:

$$m_1=\frac{N_2 ch(\sqrt{n_1 n_2}\,t)-m_2}{\sqrt{\frac{n_1}{n_2}}\,sh(\sqrt{n_1 n_2}\,t)}ch(\sqrt{n_1 n_2}\,t)-N_2\sqrt{\frac{n_2}{n_1}}\,sh(\sqrt{n_1 n_2}\,t);$$

$$m_2=\frac{N_1 ch(\sqrt{n_1 n_2}\,t)-m_1}{\sqrt{\frac{n_2}{n_1}}\,sh(\sqrt{n_1 n_2}\,t)}ch(\sqrt{n_1 n_2}\,t)-N_1\sqrt{\frac{n_1}{n_2}}\,sh(\sqrt{n_1 n_2}\,t).$$

Пример 4.

По условията на пример първи и трети да се определят загубите на „червените“ след отразяване на атаката на „сините“.

Решение:

1. По условията на пример първи и трети са известни величините:

$N_2=170;$ $m_2=119;$ $\sqrt{\frac{n_1}{n_2}}=2{,}3;$

$n_1=0{,}084;$ $t=6$ min; $\sqrt{\frac{n_2}{n_1}}=0{,}44.$

$n_2=0{,}016;$ $\sqrt{n_1 n_2}=0{,}037;$

2. Заместват се горните величини във формулата:

$$m_1=\frac{N_2\,ch\,(\sqrt{n_1 n_2}\,t)-m_2}{\sqrt{\frac{n_1}{n_2}}\,sh(\sqrt{n_1 n_2}\,t)}\,ch(\sqrt{n_1 n_2}\,t)-N_2\sqrt{\frac{n_2}{n_1}}\,sh(\sqrt{n_1 n_2}\,t)=$$

$$=\frac{170.ch(0{,}037.6)-119}{2{,}3.sh(0{,}037.6)}\,ch(0{,}037\,.\,6)-170\,.\,0{,}44\,sh(0{,}037\,.\,6)=$$

$$=\frac{170\,.\,ch\,0{,}222-119}{2{,}3.sh0{,}222}\,ch\,0{,}222-75\,sh\,0{,}222=$$

$$=\frac{170\,.\,1{,}024-119}{2{,}3.0{,}22}\,1{,}024-75\,.\,0{,}22=\frac{174-119}{0{,}506}1{,}024-16{,}5=$$

$$=\frac{55}{0{,}506}1{,}024-16{,}5=108\,.\,1{,}024-16{,}5=94.$$

3. Загубите на отбраняващите се са 108—94=14 бойци, което представлява 13%.

Извод. При степен на поражение 13% за отбраняващата се страна загубите са незначителни. Тя може да се счита за боеспособна и да ѝ се възлагат допълнителни задачи (отразяване на следващите атаки на противника).

2.4. Изразяване на групировките на страните в относителни числености

За да се анализира ходът на боя между огневите средства на групировките и да се определи преимуществото на страните, трябва да се премине от абсолютни числености към относителни и да се изразят те като отношения на непоразените бойни средства към първоначалния брой средства. За тази цел се въвеждат обозначенията:

$$M_1=\frac{m_1}{N_1},\quad M_2=\frac{m_2}{N_2},\quad \nu=\frac{N_1}{N_2},\quad \alpha=\frac{n_1}{n_2},$$

където:

— M_1 и M_2 — относителни числености на страните;

— ν — съотношение в огневите единици на силите в началото на боя;

— α — съотношение в ефективната скорострелност.

След заместване на тези обозначения в първоначално изведените уравнения се получава

$$M_1=\frac{m_1}{N_1}=ch(\sqrt{n_1 n_2}\,t)-\frac{N_2}{N_1}\sqrt{\frac{n_2}{n_1}}\,sh(\sqrt{n_1 n_2}\,t),$$

където:

$$\frac{N_2}{N_1}=\frac{1}{\nu},\quad \sqrt{\frac{n_2}{n_1}}=\frac{1}{\sqrt{\alpha}}.$$

Тогава:

$$M_1=ch(\sqrt{n_1 n_2}\,t)-\frac{1}{\nu\sqrt{\alpha}}\,sh(\sqrt{n_1 n_2}\,t,$$

$$M_2=\frac{m_2}{N_2}=ch\,(\sqrt{n_1 n_2}\,t)-\frac{N_1}{N_2}\sqrt{\frac{n_1}{n_2}}\,sh(\sqrt{n_1 n_2}\,t),$$

където:

$$\frac{N_1}{N_2}=\nu;\quad \sqrt{\frac{n_1}{n_2}}=\sqrt{\alpha}.$$

Тогава $M_2=ch(\sqrt{n_1 n_2}\,t)-\nu\sqrt{\alpha}\;sh\,(\sqrt{n_1 n_2}\,t)$.

Ако се въведат още две обозначения:

$$\bar{t}=\sqrt{n_1 n_2}\,t \text{ и } \beta=\nu\sqrt{\alpha},$$

където: $\bar{t}$ — приведено време; β — коефициент за преимущество, се получава

$$\boxed{M_1=ch\bar{t}-\frac{1}{\beta}sh\,\bar{t}};\quad m_1=M_1\,N_1;$$

$$\boxed{M_2=ch\,\bar{t}-\beta\,sh\,\bar{t}};\quad m_2=M_2\,N_2.$$

Тук:

— M_1 и M_2 — относителен брой (процент) на непоразените огневи единици;

— m_1 и m_2 — брой на непоразените огневи единици.

Когато двете групировки са равносилни, т. е. $N_1=N_2$; $n_1=n_2$, тогава $\beta=1$ и формулите добиват вида:

$$M_1=M_2=e^{-\bar{t}}.$$

Пример 5.

В срещен бой между две танкови подразделения участвуват от страна на „червените“ 30, а от страна на „сините“ — 34 танка. Средната скорострелност на танковете на „червените“ е $\lambda_1=1$ изстрел в минута, а вероятността за поразяване на танковете на „сините“ е $p_1=0{,}08$. Танковете на „си-

ните“ имат скорострелност средно 0,8 изстрела в минута, а средната вероятност за поразяване на танковете на „червените“ е $p_2=0{,}05$.

Да се определи при нанасяне на не по-малко от 60% загуби коя страна ще победи и след колко време.

Решение:

$$N_1=30;\ p_1=0{,}08;\ \lambda_1=1;$$

$$N_2=34;\ p_2=0{,}05;\ \lambda_2=0{,}8;\quad \nu=\frac{N_1}{N_2}=\frac{30}{34}=0{,}88;$$

$$n_1=\lambda_1 . p_1=1 . 0{,}08=0{,}08;$$

$$n_2=\lambda_2 p_2=0{,}8 . 0{,}05=0{,}04;\quad \alpha=\frac{n_1}{n_2}=\frac{0{,}08}{0{,}04}=2{,}0;$$

$$\sqrt{n_1 n_2}=\sqrt{0{,}08 . 0{,}04}=\sqrt{0{,}0032}=0{,}057;$$

$$\bar{t}=\sqrt{n_1 n_2}\,t=0{,}057\,t;\ \beta=\nu\sqrt{\alpha}=0{,}88\sqrt{2}=1{,}24.$$

При $t=9$ min и $\bar{t}=0{,}057 . 9=0{,}513$:

$$M_1=ch\,0{,}513-\frac{1}{1{,}24}\,sh\,0{,}513=1{,}13-0{,}8 . 0{,}53=0{,}696\approx 0{,}7;$$

$$M_2=ch\,0{,}513-1{,}24\,sh\,0{,}513=1{,}13-1{,}24 . 0{,}53=0{,}47;$$

$m_1=0{,}70 . 30=21$ танка;

$m_2=0{,}47 . 34=16$ танка.

При $t=11$ min и $\bar{t}=0{,}057 . 11=0{,}627$:

$$M_1=ch\,0{,}627-\frac{1}{1{,}24}\,sh\,0{,}627=1{,}20-0{,}8 . 0{,}67=$$

$$=1{,}2-0{,}54=0{,}66;$$

$$M_2=ch\,0{,}627-1{,}24\,sh\,0{,}627=1{,}20-1{,}24 . 0{,}67=1{,}2-0{,}83=0{,}37;$$

$m_1=0{,}66 . 30=19{,}8\approx 20$ танка;

$m_2=0{,}37 . 34=12{,}6\approx 13$ танка.

Извод. „Сините“ понасят 63% загуби към 11-тата минута и боят завършва в полза на „червените“, въпреки че в началото му съотношението е в полза на „сините“.

Следователно коефициентът за преимущество β, който отчита количествения и качествения състав на въоръжението на страните, определя в чия полза ще завърши боят. Когато

коефициентът за преимущество е по-голям от единица, възможностите на „червените са по-големи, а при коефициент, по-малък от единица, преимуществото е на „сините“.

Както се вижда от формулата, коефициентът за преимущество $\beta=\nu\sqrt{\alpha}$ зависи в по-голяма степен от количествения състав на групировките $\frac{N_1}{N_2}$, отколкото от съотношението в ефективната скорострелност $\frac{n_1}{n_2}$. Така например, ако се увеличи броят на огневите единици на „червените“ 2 пъти, и коефициентът се увеличава два пъти, докато при увеличаване на ефективната скорострелност n_1 коефициентът се увеличава $\sqrt{2}=1{,}41$. Следователно по-целесъобразно е да се повишават огневите възможности на групировките чрез увеличаване на броя на огневите единици, отколкото скорострелността на отделна бойна единица.

Често пъти в практическата дейност на командирите възниква необходимостта от определяне на количествения и качествения състав на групировката за постигане на определени резултати. Следователно трябва да се определят броят на необходимите огневи единици, тяхната средна скорострелност и вероятността за поразяване, при които за определено време се достигат желаните загуби на срещуположната групировка.

От формулата $M_2=ch\,\bar{t}-\beta\,sh\,\bar{t}$ може да се определи коефициентът за преимущество

$$\beta=\frac{ch\,\bar{t}-M_2}{sh\bar{t}}.$$

Коефициентът за преимущество β зависи от коефициента за количественото съотношение ν и коефициента за ефективната скорострелност α, т. е. $\beta=\nu\sqrt{\alpha}$, откъдето може да се определят коефициентите

$$\nu=\frac{\beta}{\sqrt{\alpha}}\quad \text{или}\quad \alpha=\left(\frac{\beta}{\nu}\right)^2$$

при положение, че е известен един от тях.

Пример 6.

По условията на пример ~~трети~~ да се определи необходимият брой танкове на първото подразделение („червените“) за нанасяне на 60% загуби на „сините“ към 10-тата минута от началото на бойните действия.

Решение:

1. По условията на пример трети е известно:

$$N_2=34;\ \lambda_1=1;\ p_1=0{,}08;\ n_1=0{,}08;$$
$$\lambda_2=0{,}8;\ p_2=0{,}05;\ n_2=0{,}04;$$

$$\sqrt{n_1 n_2}=0{,}057;\ \alpha=\frac{n_1}{n_2}=2;\ \bar{t}=0{,}057\,t.$$

2. Определя се $\bar{t}=0{,}057.10=0{,}57$, а $M_2=100-60=40\%$.

3. Изчислява се коефициентът за съотношението на средствата

$$\nu=\frac{\beta}{\sqrt{\alpha}}=\frac{1{,}28}{\sqrt{2}}=\frac{1{,}28}{1{,}41}=0{,}91.$$

4. Определя се необходимият брой танкове за изпълнение на задачата към 10-тата минута, т. е.

$$\nu=\frac{N_1}{N_2},\ \text{откъдето}\ N_1=\nu N_2=0{,}91\,.\,34=31\ \text{танка}.$$

Извод. За нанасяне на 60% загуби до 10-тата минута от започването на двубоя между двете танкови подразделения е необходимо „червените“ да имат 31 танка.

Времето за достигане на желаните загуби от срещуположната групировка може да се определи чрез преобразуване на първоначално изведените формули за определяне на относително непоразените огневи средства, т. е.

$$M_1=ch\bar{t}-\frac{1}{\beta}\,sh\,\bar{t},$$

$$M_2=ch\,\bar{t}-\beta\,sh\,\bar{t},$$

откъдето: от първата формула се определя:

$$ch\bar{t}=\frac{\beta M_1-\sqrt{M_1^2+\frac{1}{\beta}-1}}{\beta^2-1};\ \bar{t}=\sqrt{n_1 n_2}\,t;$$

$$t_1=\frac{1}{\sqrt{n_1 n_2}}\,\mathrm{ar}\,sh\,\frac{\sqrt{M_1^2+\frac{1}{\beta^2}-1}-\frac{M_1}{\beta}}{\frac{1}{\beta^2}-1};$$

от втората формула се определя:

$$ch\bar{t}=\frac{-\beta M_2+\sqrt{M_2^2+\beta^2-1}}{\beta^2-1};$$

$$t_2=\frac{1}{\sqrt{n_1 n_2}}\,\mathrm{ar}\,sh\,\frac{-\beta M_2+\sqrt{M_2^2+\beta^2-1}}{\beta^2-1}.$$

Пример 7.

На танкоопасно направление е развърнат противотанков резерв в състав $N_1=18$ бойни машини ПТУРС със средна скорострелност $\lambda_1=2$ изстрела в минута и вероятност за поразяване на танковете $p_1=0{,}6$. В това направление се очаква да настъпи танков батальон в състав $N_2=55$ танка със средна скорострелност $\lambda_2=2$ изстрела в минута и вероятност за поразяване на противотанкови средства $p_2=0{,}02$.

Да се определи времето за водене на борбата с противниковите танкове при достигане степен на поражение 50%.

Решение:

1. Изчисляват се основните величини:

$$n_1=\lambda_1\,.\,p_1=2\,.\,0{,}6=1{,}2;$$
$$n_2=\lambda_2 p_2=2\,.\,0{,}02=0{,}04;$$
$$\sqrt{n_1 n_2}=\sqrt{1{,}2\,.\,0{,}04}=\sqrt{0{,}048}=0{,}22;$$

$$\beta=\frac{N_1}{N_2}\sqrt{\frac{n_1}{n_2}}=\frac{18}{55}\sqrt{\frac{1{,}2}{0{,}04}}=0{,}33\sqrt{30}=0{,}33\,.\,5{,}5=1{,}8;$$

$M_2=0{,}5$ — от условието на примера.

2. Заместват се изчислените величини във формулата

$$t_2=\frac{1}{\sqrt{n_1 n_2}}\,\mathrm{ar}\,sh\,\frac{-\beta M_2+\sqrt{M_2^2+\beta^2-1}}{\beta^2-1}=$$

$$=\frac{1}{0{,}22}\,\mathrm{ar}\,sh\,\frac{-1{,}8\,.\,0{,}5+\sqrt{0{,}5^2+1{,}8^2-1}}{3{,}25-1}=$$

$$=4{,}5\,\mathrm{ar}\,sh\,\frac{-0{,}9+\sqrt{0{,}25+3{,}25-1}}{2{,}25}=$$

$$=4{,}5\,\mathrm{ar}\,sh\,\frac{-0{,}9+\sqrt{2{,}5}}{2{,}25}=4{,}5\,\mathrm{ar}\,sh\,\frac{-0{,}9+1{,}58}{2{,}25}=$$

$$=4{,}5\ \text{ar}\,sh\,\frac{0{,}68}{2{,}25}=4{,}5\ \text{ar}\,sh\,0{,}302=$$

$$=4{,}5.0{,}3=1{,}35\ \text{min}=1\ \text{min и}\ 21\ \text{s}.$$

Извод. Настъпващите танкове на противника понасят 50% загуби след 1 минута и 21 секунди от началото на откриване на огън от противотанковия резерв.

2.5. Отчитане на въвеждането на резерви в динамиката на боя

За по-пълно приближаване на модела към действителния бой е необходимо да се отчитат въвежданите в динамиката на боя нови сили и средства.

Въвеждането на резервите може да се осъществява с постоянен или различен темп, т. е. за единица време влизат в боя определен брой огневи единици — например от „червените“ K_1, а от „сините“ K_2. В този случай уравненията на динамиката на боя приемат вида:

$$\Delta m_1=-m_2 n_2\,\Delta t+K_1\,\Delta t;$$
$$\Delta m_2=-m_1 n_1\,\Delta t+K_2\,\Delta t.$$

При разделяне на двете части на равенствата на Δt се получават диференциалните уравнения:

$$\frac{dm_1}{dt}=-m_2 n_2+K_1;$$

$$\frac{dm_2}{dt}=-m_1 n_1+K_2.$$

При решаване на диференциалните уравнения се получават следните практически формули:

$$m_1=\frac{1}{2}\left(N_1-\frac{K_2}{n_1}\right)ch(\sqrt{n_1n_2}\,t)+\frac{K_1-n_2N_2}{2\sqrt{n_1n_2}}\,sh(\sqrt{n_1n_2}\,t)+\frac{K_2}{n_1};$$

$$m_2=\frac{1}{2}\left(N_2-\frac{K_1}{n_2}\right)ch(\sqrt{n_1n_2}\,t)+\frac{K_2-n_1N_1}{2\sqrt{n_1n_2}}\,sh\,(\sqrt{n_1n_2}\,t)+\frac{K_1}{n_2}.$$

Коефициентът за превъзходство във въвеждане на резервите може да се определи по формулата

$$P=\frac{K_1}{K_2}\sqrt{\frac{n_1}{n_2}}.$$

Ако се въведат обозначенията

$$A_1=\frac{1}{2}\left(N_1-\frac{K_2}{n_1}\right),\quad A_2=\frac{1}{2}\left(N_2-\frac{K_1}{n_2}\right),$$

$$B_1=\frac{K_1-n_2N_2}{2\sqrt{n_1n_2}},\quad B_2=\frac{K_2-n_1N_1}{2\sqrt{n_1n_2}},$$

$$C_1=\frac{K_2}{n_1},\quad C_2=\frac{K_1}{n_2}$$

и се заместят в практическите формули, получава се

$$m_1=A_1\,ch\,(\sqrt{n_1n_2}\,t)+B_1\,sh(\sqrt{n_1n_2}\,t)+C_1;$$
$$m_2=A_2\,ch(\sqrt{n_1n_2}\,t)+B_2\,sh(\sqrt{n_1n_2}\,t)+C_2.$$

Пример 8.

По условията на пример втори да се определи броят на непоразените огневи единици за третата минута от началото на боя, ако се въвеждат резерви от сините $K_2=1{,}7$ танка в минута, а от „червените“ $K_1=0{,}8$ пт средства в минута.

Решение:

1. По условията на пример втори са известни:

$$N_1=30;\ n_1=0{,}54;$$
$$N_2=54;\ n_2=0{,}18;\ \sqrt{n_1n_2}=0{,}31.$$

2. Изчисляват се величините:

$$A_1=\frac{1}{2}\left(N_1-\frac{K_2}{n_1}\right)=\frac{1}{2}\left(30-\frac{1{,}7}{0{,}54}\right)=\frac{1}{2}\,(30-3{,}2)=13{,}4;$$

$$A_2=\frac{1}{2}\left(N_2-\frac{K_1}{n_2}\right)=\frac{1}{2}\left(54-\frac{0{,}8}{0{,}18}\right)=\frac{1}{2}\,(54-4{,}4)=24{,}8;$$

$$B_1=\frac{K_1-n_2N_2}{2\sqrt{n_1n_2}}=\frac{0{,}8-0{,}18.54}{2.0{,}31}=\frac{0{,}8-9{,}7}{0{,}62}=\frac{-8{,}9}{0{,}62}=-14{,}3;$$

$$B_2=\frac{K_2-n_1N_1}{2\sqrt{n_1n_2}}=\frac{1{,}7-0{,}54\,.\,30}{2.0{,}31}=\frac{1{,}7-16{,}2}{0{,}62}=\frac{-14{,}5}{0{,}62}=-23{,}4;$$

$$C_1=\frac{K_2}{n_1}=\frac{1{,}7}{0{,}54}=3{,}14;\quad C_2=\frac{K_1}{n_2}=\frac{0{,}8}{0{,}18}=4{,}45;$$

$$P=\frac{K_1}{K_2}\sqrt{\frac{n_1}{n_2}}=\frac{0{,}8}{1{,}7}\sqrt{\frac{0{,}54}{0{,}18}}=0{,}47.1{,}73=0{,}82$$ в полза на танковете.

3. Заместват се величините в основните формули:

$$m_1 = A_1\, ch(\sqrt{n_1 n_2}\, t) + B_1\, sh(\sqrt{n_1 n_2}\, t) + C_1 =$$
$$= 13{,}4\ ch(0{,}31.3) - 14{,}3\ sh(0{,}31.3) + 3{,}14 =$$
$$= 13{,}4\ ch\ 0{,}93 - 14{,}3\ sh\ 0{,}93 + 3{,}14 =$$
$$= 13{,}4.1{,}46 - 14{,}3.1{,}07 + 3{,}14 = 19{,}6 - 15{,}3 + 3{,}14 =$$
$$= 7{,}4 \approx 7 \text{ противотанкови средства;}$$
$$m_2 = A_2\, ch\,(\sqrt{n_1 n_2}\, t) + B_2\, sh\sqrt{n_1 n_2}\, t + C_2 =$$
$$= 24{,}8\ ch\ 0{,}93 - 23{,}4\ sh\ 0{,}93 + 4{,}45 =$$
$$= 24{,}8\ .\ 1{,}46 - 23{,}4\ .\ 1{,}07 + 4{,}45 = 36 - 25 + 4{,}45 = 15 \text{ танка.}$$

Извод: Въвеждането на резерви от страна на двете групировки води до увеличаване на загубите им.

2.6. Определяне на ролята на изпреварващия удар

Ако една от страните нанесе изпреварващ удар, тя унищожава част от средствата на другата, с което изменя коефициента за общото превъзходство в своя полза. По такъв начин страна с по-малки възможности, но нанасяща изпреварващ поразяващ удар, може да постигне победа.

Ако се приеме, че изпреварващ удар нанасят „червените“, техните възможности зависят от броя на огневите средства, участвуващи в удара, от скорострелността, от вероятността за попадение и от продължителността на удара. При изразяване на тези възможности с езика на математиката се получава

$$N_1 \lambda_1 p_1 t_{\text{изпр}}.$$

Тъй като в началото беше прието, че отделна огнева единица се поразява с един изстрел, а горният израз представлява успешните изстрели, отправени от „червените“ към „сините“, това съответствува на загубите на „сините“. Тогава от първоначалния състав N_2, като се извадят загубите, получава се броят на непоразените огневи единици на „сините“ в края на изпреварващия огневи удар т. е.

$$N_2' = N_2 - N_1 \lambda_1 p_1 t_{\text{изпр}}.$$

При положение, че „сините“ нанасят изпреварващ удар по „червените“, по аналогия се получава

$$N_1' = N_1 - N_2 \lambda_2 p_2 t_{\text{изпр}}.$$

По време на изпреварващия удар страната, по която се нанася ударът, не противодействува, а взема мерки за укриване на живата сила и огневите средства и понася загуби.

След изпреварващия удар групировката, по която е нанесен ударът, организира огневата система, възстановява управлението и с непоразените огневи единици започва борбата. За моделиране на динамиката на бойните действия между двете групировки се използуват изведените в началото формули, като вместо първоначалния брой огневи единици N_2 участвуват броят на непоразените средства след изпреварващия удар N_2'.

Пример 9.

По условията на пример втори, преди да почне настъплението на противниковите танкове по противотанковите средства е нанесен огневи налет от дивизион в състав $N_2 = 18$ оръдия, притежаващи средна скорострелност $\lambda_2 = 3$ изстрела в минута и вероятност за попадение $p = 0{,}02$. Да се определи броят на непоразените противотанкови средства, ако огневият налет е с продължителност $t_{\text{изпр}} = 6$ min.

Решение:

1. По условията на пример втори е известно, че $N_1 = 30$ пт средства.

2. По условията на пример осми може да се изчисли:

$$N_1' = N_1 - N_2 \lambda_2 p_2 t_{\text{изпр}} = 30 - 18\ .\ 3\ .\ 0{,}02\ .\ 6 =$$
$$= 30 - 6{,}48 = 23{,}52 \approx 24 \text{ пт средства непоразени.}$$

Извод. За времето на изпреварващия удар противотанковите средства понасят загуби от 6 единици и остават с 24 непоразени единици. Следователно динамиката на бойните действия между противниковите танкове и пт средства след изпреварващия удар ще се развие при друго съотношение и резултатите ще бъдат различни от резултатите, получени по условията на пример втори.

2.7. Определяне на темпа за настъпление с отчитане на съотношението на силите

В бойната практика на войските разчетите на темповете за настъпление се определят, като се отчитат средноденонощните норми за натоварване на личния състав и средните скорости за движение на подразделенията на бойното поле. Необходимо е да се използува метод, който да отчита количествените и качествените показатели на своите войски и войските на противника.

Темповете за настъпление на войските основно зависят от характера на местността, средствата за придвижване, времето (на денонощието и годината), метеорологичните условия, съпротивата на противника, съотношението на силите и други. Всички тези фактори могат количествено да се изразят и отчетат при определяне на средния темп за настъпление.

С настъплението на войските се решават едновременно две задачи: унищожаване на отбраняващия се противник и овладяване на определени райони от местността.

Ако условно се изключи съпротивата на противника, то настъпващите войски ще се движат и овладяват територията на противника със средна скорост за движение $V_д$ km в денонощие, максимално допустима от характера на местността и техническите възможности на средствата за движение (танкове, бронетранспортьори, влекачи, автомобили). При тези условия, ако дълбочината на задачата е $Д_з$ km, условното време за нейното изпълнение в денонощия ще бъде

$$t_{усл}=\frac{Д_з}{V_д}.$$

За да се определи действителната продължителност на изпълнението на бойната задача при настъпление $t_д$, необходимо е да се отчита противодействието на отбраняващия се противник, т. е. времето за пълното унищожаване на противника $t_{пу}$ и условното време $t_{усл}$, т. е.

$$t_д=t_{усл}+t_{пу}.$$

Ако се обозначи средната скорост за придвижване на войските при водене на бойните действия, т. е. темпа за настъпление, изразен в километри на денонощие, с $V_{бд}$, ще се получи следната зависимост

$$\frac{V_{бд}}{V_д}=\frac{t_{усл}}{t_{усл}+t_{пд}}.$$

Времето за пълното унищожаване на противника ($t_{пу}$) може да се определи от уравненията, описващи динамиката на бойните действия по квадратичния закон, т. е.

$$t_{пу}=\frac{1}{2\sqrt{n_1n_2}}\ ln\ \frac{\frac{N_1}{N_2}\sqrt{\frac{n_1}{n_2}}+1}{\frac{N_1}{N_2}\sqrt{\frac{n_1}{n_2}}-1},$$

където:

— N_1 и N_2 — брой на огневите единици в началото на боя съответно за настъпващите и отбраняващите се;

— n_1 и n_2 — ефективна скорострелност на огневите единици съответно за настъпващите и отбраняващите се, т. е. $n_1=\lambda_1 p_1$, $n_2=\lambda_2 p_2$;

— λ_1 и λ_2 — средна скорострелност на огневите единици съответно за настъпващите и отбраняващите се;

— p_1 и p_2 — вероятност за поражение на целта при един изстрел съответно за настъпващите и отбраняващите се.

Формулата за определяне на времето за пълното унищожение на противника ($t_{пу}$) има смисъл само при

$$\frac{N_1}{N_2}\sqrt{\frac{n_1}{n_2}}>1.$$

Ако се въведат обозначенията:

$\nu=\frac{N_1}{N_2}$ — съотношение на силите на двете страни с отчитане количеството на огневите единици;

$\alpha=\frac{n_1}{n_2}$ — съотношение в ефективна скорострелност на огневите единици с отчитане на квадратичните показатели на въоръжението, ще се получи

$$\beta=\nu\sqrt{\alpha},$$

където β е коефициент за съотношението на силите между страните, отчитащ количествените и качествените показатели на огневите средства. При това формулата приема вида

$$t_{пу}=\frac{1}{2\sqrt{n_1n_2}}\ \ln\frac{\beta+1}{\beta-1}.$$

Аналогичната зависимост на темпа за настъпление от основните характеристики на огневите възможности на страните е

$$\frac{V_{бд}}{V_д}=\frac{t_{усл}}{t_{усл}+\frac{1}{2\sqrt{n_1n_2}}\ \ln\frac{\beta+1}{\beta-1}},$$

откъдето: $$V_{бд}=\frac{t_{усл}}{t_{усл}+\frac{1}{2\sqrt{n_1 n_2}}\ln\frac{\beta+1}{\beta-1}}V_д.$$

От анализа на формулата се вижда, че темпът за настъпление зависи от следните основни параметри:

— съотношението на силите (β) с отчитане на количествените (ν) и качествените (α) показатели. Необходимо условие се явява превъзходството на настъпващите ($\beta>1$);

— възможностите на огневите средства на двете страни (n_1, n_2);

— дълбочината на ешелониране на силите и средствата на отбраняващия се противник ($Д_з$);

— подвижността на настъпващите войски на бойното поле ($V_д$).

Най-силно влияние върху темпа за настъпление на войските ($V_{бд}$) оказват коефициентът за съотношението на силите (β) и подвижността на войските на бойното поле ($V_д$). От формулата се вижда, че при $\beta\to\infty$, $\frac{V_{бд}}{V_д}\to 1$, т. е. значението на $V_{бд}$ — скоростта на движение с отчитане на воденето на бойните действия се доближава до $V_д$ (скоростта на движение с отчитане условията на местността и възможностите на техниката).

Опростените уравнения от динамиката на бойните действия, посредством които е получена горната формула, може да се прилагат с определени ограничения към еднородни боеве и сражения. Тези ограничения се налагат поради това, че на практика бойните действия имат елементи на случайности, които не дават възможност точно да се предскаже изходът на даден бой или сражение.

Анализът на настъпателните действия по време на Втората световна война и опитът от ученията след войната показват, че може да се направят приближения, допустими в практиката, в резултат на което се получават линейни уравнения

$$\frac{V_{бд}}{V_д}=K(\beta-1),$$

откъдето:

$$V_{бд}=K(\beta-1)V_д,$$

където: K е коефициент на пропорционалност, равен на $0{,}07\div 0{,}1$.

Ако $n_1=n_2$, т. е. качествените характеристики на въоръжението, които се отчитат в коефициента за съотношение (танкове, артилерия и т. н.) са равни, това условие съответствува приблизително на срещния бой. Тогава

$$V_{бд}=K\left(\frac{N_1}{N_2}-1\right)V_д.$$

Горните формули имат смисъл само при $\beta>1$ или $\frac{N_1}{N_2}>1$.

При отчитане на съотношението на силите то трябва да се определя по родове войски, след което се определя средното аритметично. Скоростта на движение $V_д$ се определя от дълбочината на отбраната, разпределението на силите на отбраняващите се, оценката на местността, характера на инженерните заграждения, техническите възможности на танковете, пехотата, общовойсковите части и съединения като цяло, възможностите на системата за управление и материално-техническото осигуряване. Значението на $V_д$ може да се определи и въз основа на опита от ученията.

Нека разгледаме използуването на горните формули с конкретен пример.

Да се определи средният темп на настъпление при следните условия:

— личен състав:

а) на отбраняващите се — 3200 със средна скорострелност $\lambda_2=20$ изстр. в min и вероятност за попадение $P_2=0{,}003$;

б) на настъпващите — 7800 със средна скорострелност $\lambda_1=25$ изстр. в min и вероятност за попадение $p_1=0{,}002$;

— артилерия:

а) на отбраняващите се — $N_2=42$ оръдия със средна скорострелност $\lambda_2=4$ изстр. в min и вероятност за попадение 0,15;

б) на настъпващите — $N_1=192$ оръдия със средна скорострелност $\lambda_1=6$ изстр. в min и вероятност за попадение 0,12;

— танкове:

а) на отбраняващите се — $N_2=54$ танка със средна скорострелност $\lambda_2=1{,}8$ изстр. в min. и вероятност за попадение $p_2=0{,}25$;

б) на настъпващите — $N_1=160$ танка със скорострелност $\lambda_1=2$ изстр. в min и вероятност за попадение $p_1=0{,}18$.

Средна скорост на движение $V_д=180$ km/денонощие.

Решение:

1. Определят се коефициентите за преимущество на личния състав, артилерията и танковете.

За личния състав:

$$n_1=\lambda_1.p_1=25.0{,}002=0{,}050;$$
$$n_2=\lambda_2 p_2=20.0{,}003=0{,}06;$$

$$\beta_{лс}=\frac{N_1}{N_2}\sqrt{\frac{n_1}{n_2}}=\frac{7800}{3200}\sqrt{\frac{0{,}05}{0{,}06}}=2{,}43.0{,}91=2{,}2.$$

За артилерията:

$$n_1=\lambda_1.p_1=6.0{,}12=0{,}72;$$
$$n_2=\lambda_2.p_2=4.0{,}15=0{,}60;$$

$$\beta_{арт.}=\frac{N_1}{N_2}\sqrt{\frac{n_1}{n_2}}=\frac{192}{42}\sqrt{\frac{0{,}72}{0{,}60}}=4{,}46.1{,}1=4{,}9.$$

За танковете:

$$n_1=\lambda_1.p_1=2.0{,}18=0{,}36;$$
$$n_2=\lambda_2.p_2=1{,}8.0{,}25=0{,}45;$$

$$\beta_{тан.}=\frac{N_1}{N_2}\sqrt{\frac{n_1}{n_2}}=\frac{160}{54}\sqrt{\frac{0{,}36}{0{,}45}}=2{,}96.0{,}89=2{,}6.$$

Средният коефициент за преимущество е

$$\beta_{ср}=\frac{\beta_{лс}+\beta_{арт}+\beta_{тан.}}{3}=\frac{2{,}2+4{,}9+2{,}6}{3}=\frac{9{,}7}{3}=3{,}2.$$

2. По съкратената формула се определя средният темп на настъпление в денонощие, т. е.

$$V_{бд}=K(\beta-1)V_д.$$

Ако се приеме, че коефициентът за пропорционалност е 0,08, тогава

$V_{бд}=0{,}08.(3{,}2-1).180=0{,}08.2{,}2.180=32$ km/денонощие.

3. При средна продължителност на бойния ден от 8 до 10 часа темпът на настъпление в час е 3,2÷4 km/h.

Ако се реши задачата по формулата

$$V_{бд}=\frac{t_{усл}}{t_{усл}+\frac{1}{2\sqrt{n_1n_2}}\ln\frac{\beta+1}{\beta-1}}V_д$$

и ако дълбочината на задачата е 40 km, условното време ще бъде

$$t_{усл}=\frac{Д_з}{V_д}=\frac{40}{180}=0{,}22 \text{ при } n_1=0{,}37,\ n_2=0{,}37;$$

$$V_{бд}=\frac{0{,}22}{0{,}22+\frac{1}{2\sqrt{0{,}37.0{,}37}}ln\frac{3{,}2+1}{3{,}2-1}}.180=$$

$$=\frac{0{,}22}{0{,}22+1{,}35ln1{,}9}180=\frac{0{,}22}{0{,}22+1{,}35.0{,}64}180=$$

$$=\frac{0{,}22}{0{,}22+0{,}86}180=\frac{0{,}22}{1{,}08}180=0{,}2.180=36 \text{ km/денонощие.}$$

Независимо от мощността на използуваните оръжия съотношението на силите е обективна основа за постигане на успех в боя. Не трябва обаче да се разчита само на обективните възможности в началното съотношение на силите, тъй като то може да се измени в хода на боя, ако се прилагат по-целесъобразни и ефективни способи за действия.

3. МОДЕЛИ, ОПИСВАЩИ ДИНАМИКАТА НА БОЯ МЕЖДУ ДВЕ ГРУПИРОВКИ ПРИ ЛИПСА НА ИНФОРМАЦИЯ И БЕЗ ПРЕНАСЯНЕ НА ОГЪНЯ

3.1. Същност на модела

Дотук бяха разгледани модели от динамиката на боя между две групировки, при които пренасянето на огъня от поразената към непоразената цел се извършва мигновено, което предполага, че двете страни имат точна информация за състоянието на целите.

Това са модели на високо организиран бой, с пълна информация за състоянието на страните и мигновено отчитане на тази информация.

Освен тези модели условията за водене на боя между две групировки налагат да се разглеждат и други модели, при които боят е така организиран, че информация за състоянието на противника не постъпва и пренасяне на огъня от поразените по непоразените цели не се извършва. Такива условия възникват често в хода на бойните действия и се налага да бъдат изследвани възможностите на групировките.

При съставяне на такъв модел се правят следните допускания:

1. Информация за състоянието на бойните единици не постъпва и пренасяне на огъня не се извършва.

2. Всяка бойна единица от групировките осъществява поток от изстрели с определена средна скорострелност — λ_1 и λ_2.

3. Ефективността на стрелбата при всеки отделен изстрел се характеризира с определена вероятност — p_1 и p_2.

4. Времелетенето на снарядите (ракетите) не се отчита, тъй като е много малко в сравнение с продължителността на боя.

5. Огънят на бойните единици се разпределя статистически равномерно по всички бойни единици.

В тези случаи противостоящите групировки водят огън не по отделни разузнати цели, а по определена площ (плацдарм), на която са разположени огневите средства (оръдия, ракети, самолети, танкове, жива сила и др.).

За извеждане на формулите, описващи динамиката на боя при тези допускания, се разглежда боят между две групировки — „червени“ и „сини“.

При моделиране на динамиката на боя между двете групировки може да се определи във всеки момент какъв е относителният брой огневи единици на воюващите групировки.

За тази цел се отчитат следните величини:

— началният състав на страните N_1 и N_2;

— средната скорострелност на отделните бойни единици съответно λ_1 и λ_2;

— ефективността на стрелбата при всеки отделен изстрел, която се характеризира с вероятностите p_1 и p_2 и остава постоянна за целия бой;

— бойните възможности на отделните огневи единици, които се характеризират със средния брой произведени изстрели и вероятността за попадение, т.е.

$$n_1=\lambda_1 p_1 \text{ и } n_2=\lambda_2 p_2.$$

Относителното изменение на броя на огневите средства на групировките за един много малък промеждутък от време Δt ще бъде безкрайно малко и ще съответствува на Δm.

Това изменение ще зависи от огневите възможности на бойните единици n_1 и n_2, броя на непоразените средства m_1 и m_2 и отношението на запазилите се бойни единици към първоначалния брой, т.е. вероятността, че отправените изстрели няма да попаднат по поразените огневи единици $\frac{m_1}{N_1}$ и $\frac{m_2}{N_2}$, и ще бъде безкрайно малко, като за съответните страни ще бъде:

$$\Delta m_1=-n_2\Delta t m_2\frac{m_1}{N_1};$$

$$\Delta m_2=-n_1\Delta t m_1\frac{m_2}{N_2}.$$

При разделяне на Δt и преминаване към граница при $\Delta t\to 0$ се получава

$$\boxed{\frac{dm_1}{dt}=-n_2 m_2\frac{m_1}{N_1}}.$$

Тук $\frac{m_1}{N_1}$ е вероятността, че отправеният изстрел няма да попадне по поразена огнева единица.

При анализ за „сините“ се получава

$$\frac{dm_2}{dt}=-n_1 m_1\frac{m_2}{N_2}.$$

Тези диференциални уравнения се наричат уравнения на Динер.

Ако се изходи от началните условия на боя, т.е., че при

$$t=0,\ m_1=N_1 \text{ и } m_2=N_2$$

и се означат вероятностите, че ударът няма да бъде нанесен по поразени бойни единици съответно с

$$\frac{m_1}{N_1}=V_1 \text{ и } \frac{m_2}{N_2}=V_2,$$

тогава

$$\frac{n_1N_1}{N_2}=U_1,\quad \frac{n_2N_2}{N_1}=U_2,$$

където:

— n_1N_1 — среден брой успешни изстрели, произведени за единица време от „червените“, които съответствуват на средния брой поразени единици от „сините“. Като се раздели средният брой поразени огневи единици на първоначалния брой N_2, получава се средно каква част от „сините“ се поразяват от „червените“ за единица време. Следователно U_1 характеризира интензивността на въздействие на „червените“ по „сините“.

— U_1 и U_2 — средна интензивност на въздействие.

Тогава измененията в относителната вероятност на бойните средства на страните за Δt ще бъдат равни:

$$\frac{dV_1}{dt}=-U_2V_1V_2;\quad \frac{dV_2}{dt}=-U_1V_1V_2.$$

За да се използуват получените диференциални уравнения за създаване на модел на динамиката на боя за конкретния случай, при $t=0$ се приема, че $V_1=V_2=1$ и $U_1=U_2=\text{const}$ и се получава:

$$V_1=\frac{U_2-U_1}{U_2e^{(U_2-U_1)t}-U_1};\qquad V_2=\frac{U_1-U_2}{U_1e^{(U_1-U_2)t}-U_2}.$$

Като се използуват приведеното време $\bar{t}=\frac{U_1+U_2}{2}t$ и коефициентът за относителното преимущество $\beta=\frac{U_1-U_2}{U_1+U_2}$, получават се формулите за определяне относителните числености на групировките за даден момент от началото на боя, т.е. относително непоразените бойни единици на групировките:

$$V_1=\frac{2\beta}{(1+\beta)-(1-\beta)e^{-2\beta\bar{t}}};$$

$$V_2=\frac{2\beta}{(1+\beta)e^{2\beta\bar{t}}-(1-\beta)}.$$

За да се определи броят на непоразените огневи единици, може да се приложат и формулите:

$$m_1=V_1N_1;$$
$$m_2=V_2N_2.$$

Практическото използуване на изведените формули, описващи динамиката на бойните действия при отсъствие на информация и без пренасяне на огъня е показано по-долу с пример.

Пример.

Води се стрелба между група батареи. От „червените“ участвуват три батареи по 6 оръдия (или $N_1=18$ оръдия) със средна скорострелност $\lambda_1=3$ изстрела в минута и вероятност за поразяване $p_1=0{,}05$. От „сините“ участвуват четири батареи по 6 оръдия (или $N_2=24$ оръдия) със средна скорострелност $\lambda_2=4$ изстрела в минута и вероятност за поразяване $p_2=0{,}03$.

Да се изчисли относителният брой на непоразените оръдия на страните при огневи налет с продължителност 5 минути.

Решение:

$$n_1=\lambda_1p_1=0{,}05.3=0{,}15;$$
$$n_2=\lambda_2p_2=4.0{,}03=0{,}12;$$

$$U_1=\frac{n_1N_1}{N_2}=\frac{0{,}15.18}{24}=\frac{2{,}7}{24}=0{,}11;$$

$$U_2=\frac{n_2N_2}{N_1}=\frac{0{,}12.24}{18}=\frac{2{,}88}{18}=0{,}16;$$

Интензивността на въздействие на „сините“ по „червените“ е по-голяма, т.е. $U_2>U_1$.

$$\beta=\frac{U_1-U_2}{U_1+U_2}=\frac{0{,}11-0{,}16}{0{,}11+0{,}16}=\frac{-0{,}05}{0{,}27}=-0{,}185;$$

$$\bar{t}=\frac{U_1+U_2}{2}t=\frac{0{,}11+0{,}16}{2}5=0{,}675;$$

$$V_1=\frac{2\beta}{(1+\beta)-(1-\beta)e^{-2\beta\bar{t}}}=\frac{2.(-0{,}185)}{(1-0{,}185)-(1+0{,}185)e^{2.0{,}185.0{,}675}}=$$

$$=\frac{-0{,}370}{0{,}815-1{,}185e^{0{,}25}}=\frac{-0{,}370}{0{,}815-1{,}185.1{,}28}=\frac{-0{,}370}{-0{,}705}=0{,}53 \text{ или } 53\%$$

непоразени оръдия на „червените“;

$$V_2=\frac{2\beta}{(1+\beta)e^{2\beta\bar{t}}-(1-\beta)}=\frac{2(-0{,}185)}{(1-0{,}185)e^{-2.0{,}185.0{,}675}-(1+0{,}185)}=$$

$$=\frac{-0{,}370}{0{,}815e^{-0{,}25}-1{,}185}=\frac{-0{,}370}{0{,}815.0{,}78-1{,}185}=\frac{-0{,}370}{0{,}635-1{,}185}=$$

$$=\frac{-0{,}370}{-0{,}550}=0{,}68 \text{ или } 68\% \text{ непоразени оръдия на „сините“.}$$

Броят на непоразените оръдия на двете страни може да се определи по формулите:

$$m_1=V_1.N_1=0{,}53.18=9{,}5 \text{ оръдия} \approx 10 \text{ оръдия};$$
$$m_2=V_2N_2=0{,}68.24=16 \text{ оръдия}.$$

Извод: Понесените загуби от групировките показват, че „сините“ губят към 32% от оръдията и понасят степен на поразяване — подавяне, а „червените“ губят към 47% от оръдията и понасят степен на поразяване — унищожаване.

3.2 Определяне на броя на непоразените огневи единици по време на изпреварващия удар

При моделиране на динамиката на бойните действия при отсъствие на информация и без пренасяне на огъня често пъти се създават такива ситуации, при които само едната страна въздействува, а другата взема мерки за укриване на живата сила и огневите средства. По време на удара загуби понася само тази страна, по която се въздействува, докато другата остава с първоначалния си състав.

Ако се изходи от диференциалното уравнение

$$\frac{dm_2}{dt}=-n_1N_1\frac{m_2}{N_2},$$

при условията $m_1=N_1$ и $m_2^1=U_1m_2=0$ то се превръща в линейно уравнение. Решението на това уравнение е

$$m_2=e^{-\int U_1dt}\left[0.e^{\int U_1dt}+C\right]$$

$$m_2=Ce^{-U_1t}.$$

При начални условия $t=0$ и $m_2=N_2$, $C=N_2$, при което се получава

$$m_2=N_2e^{-U_1t}.$$

По аналогия за другата страна се получава

$$m_1=N_1e^{-U_2t}.$$

Пример.

По взводен опорен пункт на противника (жива сила и огневи средства в траншея) в състав $N_2=40$ бойци се нанася огневи налет от дивизион в състав $N_1=12$ оръдия със средна скорострелност 3 изстрела в минута и вероятност за попадение $p_1=0{,}03$.

Да се определи броят на непоразените бойци в опорния пункт, ако огневият налет е с продължителност 5 минути.

Решение:

1. Определят се величините, влизащи в основната формула:

$$n_1=\lambda_1p_1=3.0{,}03=0{,}09;$$

$$U_1=\frac{n_1N_1}{N_2}=\frac{0{,}09.12}{40}=\frac{1{,}08}{40}=0{,}02.$$

2. Заместват се тези величини в основната формула, т.е.

$$m_2=N_2.e^{-U_1.t}=40.e^{-0{,}02.5}=40.e^{-0{,}1}=$$

$$=40.0{,}9=36 \text{ непоразени бойци.}$$

Извод. Живата сила и огневите средства в опорния пункт понасят незначителни загуби (10%). При тази степен на поразяване те напълно запазват боеспособността си. За нанасяне на степен на поразяване 25—30%, т.е. подавяне, е необходимо да се увеличат оръдията на „червените“ или времето на огневия налет.

3.3. Определяне на времето за достигане на желани загуби

Времето на огневото въздействие между две групировки за достигане на желани загуби от едната страна може да се определи въз основа на първоначално изведената формула

$$V_2=\frac{U_1-U_2}{U_1e^{(U_1-U_2).t}-U_2},$$

откъдето

$$U_1e^{(U_1-U_2)t}-U_2=\frac{U_1-U_2}{V_2}$$

$$U_1.e^{(U_1-U_2)t}=\frac{U_1-U_2}{V_2}+U_2$$

$$e^{(U_1-U_2)t}=\frac{U_1-U_2+V_2U_2}{U_1.V_2}$$

$$(U_1-U_2)t.lne=ln(U_1-U_2+U_2V_2)-ln(U_1V_2)$$

$$t=\frac{ln(U_1-U_2+U_2V_2)-ln(U_1.V_2)}{U_1-U_2}.$$

Пример.

Да се определи времето за водене на стрелбата между две батареи, при което противниковата батарея понася 30% загуби, ако условията на стрелбата са: $N_1=6$ ор., $\lambda_1=4$ изстрела в минута, $p_1=0{,}08$, $N_2=4$ ор., $\lambda_2=3$ изстрела в минута, $p_2=0{,}12$.

Решение:

1. Определят се основните величини:

$$n_1=\lambda_1.p_1=4.0{,}08=0{,}32;$$

$$n_2=\lambda_2p_2=3.0{,}12=0{,}36;$$

$$U_1=\frac{n_1N_1}{N_2}=\frac{0{,}32.6}{4}=\frac{1{,}92}{4}=0{,}48;$$

$$U_2=\frac{n_2N_2}{N_1}=\frac{0{,}36.4}{6}=\frac{1{,}44}{6}=0{,}24;$$

$$V_2=1{,}0-0{,}3=0{,}7.$$

2. Заместват се тези величини във формулата

$$t=\frac{ln(U_1-U_2+U_2.V_2)-ln(U_1.V_2)}{U_1-U_2}=$$

$$=\frac{ln(0{,}48-0{,}24+0{,}7.0{,}24)-ln(0{,}48.0{,}7)}{0{,}48-0{,}24}=$$

$$=\frac{ln0{,}41-ln0{,}336}{0{,}24}=\frac{0{,}8916-(-1{,}0907)}{0{,}24}=$$

$$=\frac{1{,}9823}{0{,}24}=8{,}2\text{ min}=8\text{ min и }12\text{ s.}$$

Извод: При така поставените условия за борба между двете батареи и достигане на 30% загуби от противниковата е необходимо стрелбата да се води 8 min и 12 s.

За определяне на времето, необходимо за достигане на предварително зададени загуби, когато само едната страна въздействува по другата, се използува формулата

$$m_2=N_2e^{-U_1t},$$

откъдето

$$m_2=N_2\frac{1}{e^{U_1t}};$$

$$e^{U_1t}=\frac{N_2}{m_2}.$$

След логаритмуване се получава

$$U_1t=ln\left(\frac{N_2}{m_2}\right),$$

откъдето

$$t=\frac{ln\left(\frac{N_2}{m_2}\right)}{U_1}.$$

По аналогия за другата страна се получава

$$m_1=N_1e^{-U_2t},$$

откъдето:

$$t=\frac{ln\left(\frac{N_1}{m_1}\right)}{U_2}.$$

Пример.

Да се определи времето за достигане на 30% загуби по взводен опорен пункт на противника в състав $N_2=40$ бойци, ако стрелбата се води с дивизион в състав $N_1=12$ оръдия със средна скорострелност $\lambda_1=3$ изстрела в минута и вероятност за поразяване $p_1=0{,}03$.

Решение:

1. Изчисляват се входните величини

$$n_1=\lambda_1p_1=3.0{,}03=0{,}09;$$

$$U_1=\frac{n_1N_1}{N_2}=\frac{0{,}09.12}{40}=\frac{1{,}08}{40}=0{,}02.$$

При 30% загуби $m_2=28$.

2. Заместват се тези величини във формулата

$$t=\frac{ln\left(\frac{N_2}{m_2}\right)}{U_1}=\frac{ln\left(\frac{40}{28}\right)}{0{,}02}=\frac{ln1{,}43}{0{,}02}=\frac{0{,}3577}{0{,}02}=$$

$$=17{,}75\text{ min}=17\text{ min и }45\text{ s.}$$

Извод: За достигане на 30% загуби по взводен опорен пункт (жива сила и огневи средства в траншея) е необходимо огневи налет от 18 min при съсредоточаване на огъня на дивизион в състав 12 оръдия.

Като се моделира динамиката на бойните действия при отсъствие на информация и без пренасяне на огъня, може да се изведат формулите и за останалите положения, разгледани в първия модел (при наличие на информация и пренасяне на огъня), като определяне на необходимия брой огневи средства, отчитане въвеждането на резерви и др.

4. МОДЕЛИ ЗА ОПРЕДЕЛЯНЕ НА СРЕДНИЯ БРОЙ ОГНЕВИ ЕДИНИЦИ, НАМИРАЩИ СЕ В ДАДЕНО СЪСТОЯНИЕ В ДИНАМИКАТА НА БОЯ (МЕТОД ДИНАМИКА НА СРЕДНИТЕ)

4.1. Същност на модела

При извеждане на уравненията за математическо описание на динамиката на боя между две групировки се използуват диференциални уравнения, приблизително описващи динамиката на боя между достатъчно многочислени групировки. Методът, по който са изведени тези уравнения, е така нареченият „метод динамика на средните“, който може да бъде приложен за много по-широк кръг процеси.

Така например в редица случаи е необходимо да се опише състоянието на сложни системи, състоящи се от голям брой еднородни елементи, и тяхното изменение по време на бойните действия или да се провери състоянието на дадена групировка, изпълняваща бойни задачи, като се определи средният брой на огневите единици, намиращи се в дадено състояние.

Тъй като елементите на сложните системи преминават по време на работа от едно състояние в друго, за осигуряване на надеждност в работата им е необходимо да се знае с колко елемента и в какво състояние се намира системата в даден момент.

Разглеждането на състоянието на всеки отделен елемент по метода на теорията на вероятностите и случайните процеси е много сложна и трудна задача. Затова при анализиране на бойните действия и изследване на различните системи, участвуващи в боя, широко се използува методът динамика на средните, който позволява приблизително да се определи средно какъв брой огневи средства се намират в дадено състояние.

При съставяне на уравненията, които определят средния брой огневи средства, намиращи се в дадено състояние в динамиката на боя, е удобно да се използува графическо изобразяване на преминаването от едно състояние в друго.

Да разгледаме определянето на средния брой средства, намиращи се в дадено състояние, на основата на следния пример.

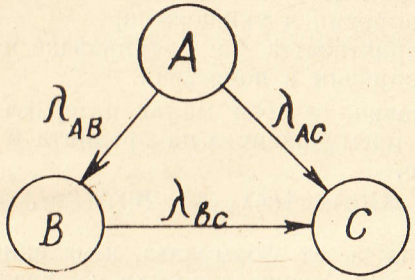
Пример. Води се стрелба за поразяване на артилерийска батарея. В зависимост от попаденията оръдията могат да се намират в едно от следните състояния:

— A — оръдието е изправно и води огън;

— B — оръдието е повредено и отстраняването на повредата по време на стрелбата е невъзможно;

— C — оръдието е унищожено.

Преминаването на оръдието от едно състояние в друго може графически да се изобрази, както е показано на фиг. 3.6.3. На схемата кръгчетата показват състоянието на оръдието (A,B,C), а стрелките — преминаването от едно състояние в друго.



Фиг. 3.6.3

Така например стрелката между A и B показва, че е попаднал снаряд на такова разстояние от оръдието, че му са нанесени повреди, които трудно може да се отстранят от разчета, между B и C, че може да попадне снаряд в повреденото оръдие или в непосредствена близост до него и да го унищожи, и между A и C, че е попаднал снаряд в оръдието и го е унищожил.

Задачата може да има две решения:

— да се определи в произволен момент от време какъв брой оръдия се намират в дадено състояние при положение, че е известен първоначалният им брой;

— в кой момент от време ще бъдат унищожени желан брой оръдия, при което се изпълнява поставената задача — унищожаване или подавяне.

При решаването на тази задача се постъпва по следния начин:

При обстрелване на батареята огънят се води с определена скорострелност λ, а снарядите попадат в оръдието или около него с определена вероятност и се получава плътност на изстрелите, както следва:

— от A в $B \rightarrow \lambda_{AB} = \lambda p_1$;

— от B в $C \rightarrow \lambda_{BC} = \lambda p_2$;

— от A в C $\lambda_{AC} = \lambda p_3$.

Средният брой повредени оръдия за времето Δt се изменя с $A(t)\lambda_{AB}\Delta t$, а на унищожените — с $A(t)\lambda_{AC}\Delta t$.

Общото изменение на изправните оръдия, т.е. преминаването им в повредени и унищожени за време Δt, ще бъд

$$\Delta A(t) = -A(t)(\lambda_{AC}+\lambda_{AB})\Delta t,$$

където:

— $A(t)$ — брой на изправните оръдия;

— λ_{AC} — вероятност за преминаване на оръдията от изправни в унищожени;

λ_{AB} — вероятността за преминаване на оръдията от изправни в повредени.

По същия начин за този малък интервал от време може да се определи преминаването на оръдията в повредено състояние (B), т. е.

$$\Delta B(t) = A(t)\lambda_{AB}\Delta t - B(t)\lambda_{BC}\Delta t.$$

Както се вижда от формулата, изменението на броя на повредените оръдия става за сметка на увеличаването им с преминаването на изправните в повредени (от A в B) и намаляването им с унищожаването на повредените оръдия (от B в C).

Аналогично се определят и унищожените оръдия, т.е:

$$\Delta C(t) = A(t)\lambda_{AC}\Delta t + B(t)\lambda_{BC}\Delta t.$$

Като се разделят тези уравнения на Δt и се премине към граница при $\Delta t \to 0$, получават се диференциалните уравнения:

$$\frac{dA(t)}{dt} = -A(t)(\lambda_{AB}+\lambda_{AC});$$

$$\frac{dB(t)}{dt} = A(t)\lambda_{AB} - B(t)\lambda_{BC};$$

$$\frac{dC(t)}{dt} = A(t)\lambda_{AC} + B(t)\lambda_{BC}.$$

За определяне на знаците на дясната част на уравненията се изхожда от схемата, която изразява възможните състояния, като излизащите стрелки приемат знак „минус“, а влизащите — знак „плюс“.

Чрез тези диференциални уравнения може да се описват състоянията на най-различни бойни средства и системи.

При решаване на диференциалните уравнения се получават следните практически формули:

$$A = N_1 e^{-(\lambda_{AB}+\lambda_{AC})t};$$

$$B = N_1 e^{-\lambda_{BC}t} - A(t);$$

$$C = N_1 - N_1 e^{-\lambda_{BC}t}.$$

Тези формули определят средно какъв брой огневи средства преминават от едно състояние в друго.

Пример.

Разкрита е артилерийска батарея на противника в състав от 6 105-mm гаубици, разположени в окопи. За нейното подавяне е привлечена 122-mm гаубична батарея с 6 гаубици. Средно една гаубица за една минута изстрелва 4 снаряда. Вероятността за повреждане $p_1 = 0{,}01$, а за унищожаване $p_2 = 0{,}0017$. Да се определи след колко време ще бъдат унищожени две оръдия и колко оръдия ще бъдат повредени.

Решение:

$\lambda_{AB} = 0{,}01.4.6 = 0{,}24$; $\lambda_{AC} = 0{,}0017.4.6 = 0{,}04$; $\lambda_{BC} = \lambda_{AC} = 0{,}04$

При $t = 3$ min:

$$A = 6.e^{-(0{,}24+0{,}04).3} = 6.e^{-0{,}28.3} = 6e^{-0{,}84} = 6.0{,}43 = 2{,}6 \text{ ор.};$$

$$B = 6.e^{-0{,}04.3} - A(3) = 6e^{-0{,}12} - 2{,}6 = 6.0{,}89 - 2{,}6 = 2{,}7 \text{ ор.};$$

$$C = 6 - 6.e^{-0{,}04.3} = 6 - e^{-0{,}12} = 6 - 6.0{,}89 = 6 - 5{,}3 = 0{,}7 \text{ ор.}$$

При $t = 5$ min:

$$A = 6.e^{-0{,}28.5} = 6.e^{-1{,}4} = 6.0{,}25 = 1{,}5 \text{ ор.};$$

$$B = 6.e^{-0{,}04.5} - A(5) = 6e^{-0{,}2} - 1{,}5 = 6.0{,}82 - 1{,}5 = 3{,}4 \text{ ор.};$$

$$C = 6 - 6.e^{-0{,}04.5} = 6 - 6.e^{-0{,}2} = 6 - 6.0{,}82 = 6 - 4{,}9 = 1{,}1 \text{ ор.}$$

Ако се продължат решенията, получават се данните, поместени в таблица 3.6.1.

Таблица 3. 6. 1.

Състояние на оръдията \ Продължителност на стрелбата	1 min	2 min	3 min	5 min	8 min	10 min
Изправни (A)	4,5	3,4	2,6	1,5	0,7	0,4
Повредени (B)	1,5	2,1	2,7	3,4	3,7	3,6
Унищожени (C)	0,3	0,5	0,7	1,1	1,6	2,0

Извод: Към десетата минута е изпълнена задачата.

4.2. Определяне на времето за достигане на желания среден брой огневи единици, намиращи се в дадено състояние

За определяне на времето, към което се достигат желани загуби от групировката, т.е. средния брой изправни или унищожени огневи единици, се използуват горните формули.

При изчисляване на времето за достигане на среден брой унищожени огневи единици се използува формулата:

$$C=N_1-N_1e^{-\lambda_{BC}t},$$

Оттук при известни стойности на C, N_1 и λ_{BC} се определя времето t:

$$C=N_1-N_1\frac{1}{e^{\lambda_{BC}t}};$$

$$N_1\frac{1}{e^{\lambda_{BC}t}}=N_1-C;\ e^{\lambda_{BC}t}=\frac{N_1}{N_1-C};$$

$$\lambda_{BC}t=lnN_1-ln(N_1-C);$$

$$t=\frac{lnN_1-ln(N_1-C)}{\lambda_{BC}}.$$

Пример.

По условията на примера в т.4.1. да се определи времето за унищожаване на артилерийската батарея, т.е. броят на унищожените оръдия $C=3$.

Решение:

1. По условия са известни следните величини:

$$N_1=6;\ \lambda_{BC}=0,04;\ C=3.$$

2. Заместват се тези величини във формулата и се получава

$$t=\frac{lnN_1-ln(N_1-C)}{\lambda_{BC}}=\frac{ln6-ln(6-3)}{0,04}=$$

$$=\frac{ln6-ln3}{0,04}=\frac{1,79-1,1}{0,04}=\frac{0,69}{0,04}=17\ \text{min}.$$

Извод: За да достигне степен на поразяване 50%, т.е. унищожаване на 3 от 6 оръдия на батареята, при ефективност на стрелбата, дадена по условията, необходимо е стрелбата да продължи 17 минути.

При изчисляване на времето, за което се достига изпълнението на огневата задача с желан брой изправни огневи единици, постъпва се по следния начин:

$$A=N_1.e^{-(\lambda_{AB}+\lambda_{AC})t};$$

$$A=N_1\frac{1}{e^{(\lambda_{AB}+\lambda_{AC})t}};$$

$$e^{(\lambda_{AB}+\lambda_{AC})t}=\frac{N_1}{A};$$

$$(\lambda_{AB}+\lambda_{AC})t=lnN_1-lnA;$$

$$t=\frac{lnN_1-lnA}{\lambda_{AB}+\lambda_{AC}}.$$

Пример.

За нанасяне на удар в дълбочина на противниковата отбрана се изпращат $N_1=8$ изтребители бомбардировачи. По време на полета към обекта и обратно по самолетите се въздействува със зенитни средства. Вероятността за унищожаване на самолетите е $\lambda_{AC}=0,04$, за повреждане — $\lambda_{AB}=0,03$, а за унищожаване на противниковите самолети — $\lambda_{BC}=0,06$.

Да се определи времето, за което групата ще достигне обекта с 6 изправни самолета, а оттам и дълбочината на задачата.

Решение:

1. Основните величини, влизащи във формулите, са $N_1=8$, $\lambda_{AB}=0,08$, $\lambda_{AC}=0,04$, $A=6$.

2. Заместват се тези стойности във формулата

$$t=\frac{\ln N_1-\ln A}{\lambda_{AB}+\lambda_{AC}}=\frac{\ln 8-\ln 6}{0{,}08+0{,}04}=\frac{2{,}08-1{,}79}{0{,}12}=$$

$$=\frac{0{,}39}{0{,}12}=3{,}25\ \text{min}=3\,\text{min и 15 s.}$$

Извод. Времето, за което групата изтребители бомбардировачи достига обекта с 6 изправни самолета, е 3 min и 15 s. Ако се приеме, че времето за нанасяне на удара е 1 min, за полета до обекта остават 2 min и 15 s. В зависимост от скоростта на полета може да се определи дълбочината на обекта за нанасяне на удара.

Математическите модели може успешно да се използуват за количествена оценка на резултатите от използуването на бойните средства, за оценка на съотношението на силите в началото на боя, влиянието на изпреварващия удар и въвеждането на резервите, ефективната скорострелност на огневите средства и други важни фактори, които оказват съществено влияние върху изхода на боя между две групировки.

Освен това този тип модели позволяват да се направи задълбочено и пълно обосноваване на характеристиките на създадените образци бойна техника и способите за тяхното използуване.

Математическите модели на динамиката на бойните действия на войските дават възможност за предварително анализиране на възможните варианти за действия и още преди боя да се направят важни практически изводи за организирането и воденето на бойните действия.

При многократно моделиране на динамиката на бойните действия на електронноизчислителната машина с различни входни данни и с различни направления за действия могат да се получават ценни препоръки за необходимите сили и средства, тактико-техническите характеристики на огневите единици, времето за водене на боя, фронта и дълбочината на задачите, направлението на главния удар и участъка за пробив.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В книгата са изложени сравнително кратко основните положения на изследването на операциите, показани са особеностите на използуването на тази наука във военното дело и са дадени примери от военни задачи, в които с успех може да намерят приложение методите за изследване на операциите.

Успехът на изследванията зависи главно от правилната постановка на задачата, което е по силите само на специалисти, дълбоко познаващи същността на изследваните процеси. Поради това в предлагания труд основно внимание се отделя на математическите основи при построяването на модела на изследвания процес и при избора на критерия.

Понастоящем математическите методи за оптимизация получиха широко развитие. Пълното им описване е твърде обемисто. Поради това авторите са се ограничили в сравнително по-кратко изложение на методите, като насочват вниманието към областите на приложение на тези методи. Военният изследовател на операциите не трябва да се страхува от математическите трудности. При съвместната работа на военни специалисти и математици всяка задача може да се реши задоволително и да се получат полезни препоръки. От голямо значение е тя да се постави правилно и същността на процеса да бъде описана задълбочено и с пълно разбиране.

Теоретичните основи на различните методи са илюстрирани с прости числени примери. Възможно е читателят да се озадачи от простотата на някои от примерите. Поради много причини обаче те имат чисто условен характер и нямат за цел да изработят едни или други практически препоръки. На базата на тези примери, като се усвои същността на методологията на изследването на операциите, читателят може да пристъпи към решаването на практически задачи и към изучаването на значително по-сложните процеси. При работа в която и да е конкретна област от изследването на операциите той може да усъвършенствува своите знания, като използува литературата, отнасяща се за тази област.

Авторите не се съмняват, че методите на изследването на операциите все повече ще се внедряват във военното дело.

Ако този труд привлече вниманието на военния читател към изследването на операциите и при решаването на задачи в практическата работа той се опита да използува методите на тази наука, а след това пристъпи към овладяването ѝ до съвършенство, авторите считат, че целта, която са си поставили с издаването на настоящата книга, е постигната напълно. Тя ще бъде и едно много ценно пособие за учебния процес във ВА „Г. С. Раковски" и в другите военни учебни заведения.

ПРИЛОЖЕНИЕ № 1

ТАБЛИЦА

на случайни числа, разпределени по закона за равномерната плътност на вероятностите в интервала от 0 до 1

0,58568	0,37718	0,65549	0,25374	0,22830	0,01018
0,30939	0,83310	0,46202	0,33248	0,85887	0,20627
0,32752	0,74982	0,27552	0,26811	0,08260	0,53104
0,49558	0,07035	0,07543	0,70679	0,80080	0,80383
0,68051	0,70783	0,18528	0,59539	0,67960	0,31565
0,21833	0,77278	0,18574	0,91275	0,23726	0,38327
0,42500	0,04168	0,37163	0,80772	0,67779	0,42302
0,28902	0,71654	0,00029	0,03745	0,75993	0,53115
0,48219	0,76239	0,33092	0,83321	0,40897	0,19346
0,94811	0,66074	0,22680	0,24093	0,78976	0,86160
0,70887	0,03573	0,73027	0,76346	0,47337	0,25496
0,88738	0,46375	0,16619	0,43414	0,99605	0,50111
0,77230	0,12156	0,56324	0,53159	0,51261	0,11740
0,09678	0,48199	0,66084	0,24803	0,50385	0,99520
0,60981	0,57224	0,67682	0,05996	0,64067	0,64649
0,39746	0,72761	0,59572	0,84754	0,64444	0,85082
0,24306	0,13676	0,63548	0,96049	0,01814	0,33677
0,30116	0,87704	0,63415	0,53825	0,42478	0,20142
0,98269	0,20068	0,61242	0,99677	0,41229	0,67360
0,57825	0,56297	0,62256	0,18542	0,57628	0,34309
0,26448	0,59827	0,05105	0,52218	0,32457	0,84545
0,93656	0,05858	0,44262	0,83943	0,64239	0,61575
0,30425	0,98960	0,33783	0,42029	0,65463	0,42276
0,44118	0,03272	0,22018	0,08857	0,25409	0,77804
0,32005	0,75139	0,77533	0,97041	0,80499	0,78038
0,14233	0,07722	0,94413	0,16019	0,65636	0,67013
0,41206	0,84001	0,32222	0,42559	0,08334	0,74833
0,46436	0,02651	0,38466	0,36737	0,35921	0,63064
0,10091	0,95061	0,37082	0,16409	0,16737	0,27664
0,18844	0,21297	0,45365	0,39552	0,77279	0,18332
0,65776	0,59846	0,01235	0,59261	0,36123	0,76372
0,01164	0,49868	0,66393	0,42163	0,60955	0,60099
0,45713	0,96123	0,99782	0,27738	0,77425	0,83326
0,63995	0,28971	0,37172	0,79456	0,49678	0,91307
0,21461	0,30702	0,01110	0,41217	0,65832	0,91945

0,35932	0,64764	0,25052	0,32942	0,49282	0,41807
0,90798	0,81543	0,69054	0,83643	0,77396	0,83999
0,32755	0,74597	0,76146	0,70340	0,43914	0,45684
0,05147	0,60707	0,18383	0,65909	0,96011	0,06703
0,54136	0,24477	0,41434	0,37757	0,20669	0,25052
0,31677	0,86366	0,31789	0,88215	0,04571	0,82155/25
0,06050	0,01653	0,10161	0,10335	0,77053	0,39678
0,67751	0,08596	0,08894	0,45581	0,13322	0,57168
0,74435	0,97007	0,82594	0,41888	0,96489	0,46335
0,22425	0,55183	0,18456	0,68976	0,97944	0,6431
0,96255	0,76343	0,48176	0,81661	0,34293	0,69894
0,76628	0,81923	0,05176	0,67775	0,42991	0,41125
0,79191	0,59190	0,33123	0,19316	0,53218	0,58835
0,85059	0,22649	0,76748	0,37194	0,56442	0,68161
0,95283	0,37374	0,53536	0,06158	0,93056	0,80611
0,87853	0,57504	0,03222	0,09194	0,82450	0,35353
0,09857	0,51826	0,95230	0,09030	0,60094	0,44656
0,35440	0,02509	0,18924	0,03372	0,34519	0,46626
0,84818	0,28306	0,45002	0,91183	0,31853	0,57841
0,61474	0,19738	0,44204	0,89800	0,07953	0,22792
0,08985	0,59131	0,15434	0,89882	0,91571	0,87362
0,05106	0,51626	0,56665	0,90420	0,35777	0,56299
0,50071	0,59164	0,17792	0,92053	0,22054	0,01133
0,46840	0,51356	0,23732	0,35240	0,24978	0,77758
0,25485	0,11629	0,99806	0,24365	0,67731	0,12252
0,69365	0,46911	0,45808	0,55200	0,14592	0,53210
0,57926	0,69272	0,10290	0,19445	0,83568	0,13433
0,07752	0,99828	0,21890	0,23872	0,70126	0,13433
0,83072	0,50683	0,33856	0,45108	0,80550	0,95800
0,73800	0,02519	0,24679	0,66227	0,42225	0,37645
0,30949	0,82332	0,68947	0,94148	0,45110	0,80762
0,68310	0,86034	0,76457	0,12035	0,43543	0,82561
0,49575	0,04029	0,13484	0,37547	0,43522	0,85268
0,99543	0,58077	0,75829	0,80323	0,11557	0,83342
0,53138	0,54773	0,56323	0,53107	0,49157	0,58710
0,68857	0,58664	0,50307	0,89233	0,86667	0,19880
0,25296	0,12564	0,20667	0,25309	0,14860	0,13773
0,50944	0,71576	0,16782	0,31951	0,70459	0,51716
0,71185	0,67108	0,30545	0,34071	0,79420	0,38715
0,92646	0,48243	0,72827	0,50359	0,71956	0,63334
0,51571	0,52712	0,99298	0,39166	0,77198	0,08508
0,96431	0,59490	0,74048	0,45964	0,32580	0,72754
0,64774	0,30168	0,18924	0,03321	0,23391	0,12359
0,80667	0,95245	0,10072	0,99128	0,12432	0,88592
0,51882	0,92373	0,81514	0,52739	0,02554	0,25945
0,46701	0,89325	0,05474	0,06181	0,90110	0,69525
0,29724	0,28111	0,75621	0,50066	0,58361	0,15104

0,45224	0,56559	0,96091	0,04275	0,44618	0,32376
0,25243	0,05944	0,58204	0,08292	0,53340	0,38924
0,69194	0,12774	0,47474	0,74181	0,30588	0,40918
0,03466	0,40392	0,83132	0,73618	0,52820	0,10599
0,53935	0,51344	0,23079	0,69329	0,05047	0,47336
0,93010	0,88981	0,02726	0,48336	0,64604	0,07909
0,04415	0,67929	0,37146	0,83173	0,63657	0,15577
0,84282	0,21392	0,34047	0,76302	0,41324	0,55001
0,91435	0,88864	0,36573	0,55333	0,36776	0,29932
0,11957	0,35689	0,96073	0,05036	0,49568	0,04924
0,25495	0,88707	0,40372	0,22058	0,01667	0,14892
0,16266	0,97011	0,83129	0,69959	0,24736	0,58673
0,56177	0,40554	0,55926	0,10370	0,37290	0,89207
0,79473	0,44820	0,17244	0,24415	0,49581	0,03205
0,07103	0,02088	0,66176	0,11356	0,56948	0,45956
0,65394	0,07501	0,56187	0,39353	0,23267	0,95132
0,21694	0,95080	0,25267	0,09016	0,61451	0,20313
0,58878	0,79689	0,79310	0,52185	0,30681	0,04344
0,55704	0,76447	0,10013	0,78405	0,57473	0,01575
0,00043	0,05441	0,98140	0,39563	0,75542	0,43843
0,45266	0,06163	0,92460	0,70915	0,44118	0,03225
0,15895	0,43796	0,49756	0,81057	0,05933	0,58942
0,89328	0,69670	0,61791	0,53804	0,34313	0,73475
0,68875	0,59921	0,16997	0,91505	0,79125	0,63496
0,89419	0,56348	0,68950	0,94156	0,45367	0,39772
0,55143	0,23242	0,51817	0,84324	0,22154	0,38895
0,66425	0,67332	0,51240	0,08406	0,84373	0,15921
0,28222	0,32330	0,65051	0,89513	0,31688	0,86876
0,92889	0,03212	0,08065	0,27402	0,33496	0,79444
0,48245	0,73194	0,04330	0,62404	0,49755	0,81560
0,70888	0,03855	0,60223	0,60400	0,83371	0,38437
0,31467	0,09193	0,82793	0,16551	0,02282	0,53147
0,83170	0,63227	0,31110	0,50023	0,53250	0,62760
0,95955	0,13302	0,69172	0,23167	0,61037	0,73737
0,86975	0,54189	0,83393	0,95450	0,84675	0,72932
0,87856	0,57914	0,70798	0,16505	0,04219	0,42314
0,27258	0,64908	0,69964	0,24511	0,74829	0,46992
0,37051	0,19561	0,22264	0,27953	0,50096	0,62272
0,16432	0,13149	0,08372	0,63348	0,71789	0,32896
0,30996	0,89077	0,87888	0,62459	0,42658	0,96583
0,34035	0,78024	0,09318	0,53135	0,54494	0,29359
0,87232	0,46551	0,88598	0,52011	0,08706	0,19779
0,39073	0,40479	0,71699	0,44163	0,96255	0,76136
0,71372	0,92813	0,13874	0,61502	0,14202	0,03916
0,03641	0,62694	0,62471	0,41236	0,63281	0,36793
0,27552	0,26779	0,00963	0,22590	0,82717	0,19960

0,74828	0,47043	0,30982	0,90259	0,43465	0,70463
0,20254	0,87141	0,33450	0,51828	0,82139	0,94247
0,32683	0,52875	0,91571	0,87342	0,07727	0,93818
0,90096	0,70414	0,58219	0,06317	0,02280	0,93429
0,47640	0,51253	0,10022	0,80296	0,03921	0,05835
0,46423	0,11413	0,50480	0,11145	0,34615	0,08652
0,01888	0,43814	0,37842	0,06618	0,40748	0,25166
0,46154	0,39866	0,37973	0,98392	0,04239	0,40566
0,54129	0,12602	0,00496	0,64038	0,35939	0,36144
0,12194	0,51778	0,75887	0,87865	0,59181	0,34329
0,65410	0,87125	0,30225	0,29825	0,33128	0,80325
0,11224	0,25548	0,94927	0,44761	0,22554	0,90573
0,03620	0,66876	0,19185	0,74808	0,49564	0,06118
0,84200	0,06768	0,72176	0,85323	0,92451	0,73061
0,24938	0,82940	0,59121	0,13402	0,08263	0,11111

ПРИЛОЖЕНИЕ № 2

ТАБЛИЦА

на случайните числа, разпределени по нормалния закон $[M_x]=0$ и $\tau=1$

0,42922	—0,64020	—0,12904	—0,66675	0,50358	0,86439
1,33040	1,64733	—0,81341	0,95522	—0,22736	—0,34466
0,46263	0,14780	—0,77766	—0,48198	—0,89244	—0,31251
0,13300	—0,01938	0,55976	0,11857	—0,37183	0,59585
1,73948	1,30666	—0,84072	1,98453	0,02615	—0,26876
0,13591	0,65207	0,49687	1,75556	1,28072	0,01022
0,62508	—0,11797	0,31365	0,48828	—2,04806	—0,74370
—1,67450	—0,35657	0,39579	—0,87479	—0,12600	—0,81060
—0,49032	0,27879	0,34616	1,05231	0,62335	0,96039
—0,89506	0,84978	—0,67531	—0,28643	1,62340	1,14465
1,88102	—0,41561	1,16208	—0,24477	0,24407	—1,42030
0,75918	0,01635	0,73998	—1,99399	1,28753	—0,29798
—0,34064	1,28069	—0,61216	—0,51196	—0,74570	0,36528
0,68587	—0,16507	0,38005	—1,89815	0,94476	—2,39044
0,68587	—1,28061	1,65965	0,91101	0,05130	—0,18666
1,76877	0,95750	—2,12401	—1,16018	—1,66692	—1,19378
—0,02365	2,28986	1,02076	—1,97407	0,33731	0,44986
0,46149	—0,48437	—1,15351	—0,18411	—1,43276	—2,16280
0,80911	0,57958	—0,25892	0,01192	0,01928	2,40650
—0,50835	—1,12221	2,00959	0,30220	—0,57165	—0,38300
0,67081	—0,21931	1,58096	0,42496	0,91355	—0,02200
0,21343	2,00769	0,15406	—0,88783	0,01998	0,12931
—0,82556	0,09590	0,46497	—0,05158	0,50287	—0,40056
—0,51804	1,35713	1,35032	—0,23372	—0,46411	—0,80476
1,14159	—0,66042	0,81313	0,23576	0,09239	0,25136
—0,29590	0,47273	0,86038	0,19525	0,66818	0,21462
0,59534	—0,65478	—0,23490	—1,27178	—0,71939	—0,55886
—0,20726	0,66275	1,23608	0,86833	0,99370	—0,14631
—1,01767	0,26999	1,03277	—0,31585	0,15365	—0,38034
—0,91426	—0,20604	—0,14814	—0,52345	1,01742	1,11975
0,99716	—1,02283	—0,91558	—0,58867	0,75242	1,07288
—0,66127	1,03553	0,41034	—0,67897	0,59251	0,12959
0,55158	2,16935	0,52185	—1,47034	1,01750	—0,27099
—0,61189	—0,72137	0,22583	1,90063	1,34181	—0,49574
0,13256	—0,50102	0,62476	—0,04258	—0,77988	—0,48809

0,76882	—0,15088	—0,81761	—0,03637	1,64849	—0,10754
—1,00330	2,73130	—0,14663	1,20212	—1,33820	—0,15507
0,45820	—0,07925	0,74642	0,61545	—1,10393	—0,25867
0,27907	—0,85375	—0,63373	—0,53483	2,06473	—0,01986
1,12368	—0,76117	0,81900	—1,09594	—0,21827	0,16399
0,45449	0,20298	—0,51393	—1,36124	0,26136	1,11599
—1,16930	0,00417	1,01579	0,53338	1,41619	0,46099
—1,51966	—0,06345	—0,24746	—0,22035	0,72433	0,43968
1,38836	0,58288	—0,14941	—0,59725	—0,99946	0,09122
1,56545	0,99328	0,25882	—1,59512	—1,40294	0,16900
0,86566	—0,28005	—0,26911	0,22569	—1,78418	0,36838
0,99364	0,57307	0,68759	0,33242	0,33956	—1,09138
2,01522	—0,83186	0,58014	0,60029	—0,20049	—1,12060
0,40314	—0,64042	—1,52947	1,17226	—0,51159	0,46241
0,51335	—0,02433	—0,73460	—0,88559	0,10217	—1,14568
0,05396	0,99669	0,67031	0,60936	—0,19315	—0,75690
—1,26950	—1,70844	—0,02880	—1,57827	0,64063	—0,36334
0,90763	—0,42763	—1,45596	—1,33783	—1,06705	0,09441
—1,79047	—0,88211	—1,26439	—0,99175	—0,19685	0,82952
—1, 8106	—1,03935	—0,53514	0,40131	0,80924	—1,35523
—1,25907	0,38031	—1,32036	—1,15423	—0,50151	1,35991
—2,40342	—1,32627	—0,75835	0,67308	—1,01951	—0,28911
0,51222	1,08456	0,19017	0,92461	—0,24623	—0,73064
—0,41499	—0,92373	—1,73617	—1,45860	0,18083	0,47843
—0,80014	0,00325	—1,32897	0,67220	0,35985	0,42858
—0,80021	—0,01721	—0,46255	0,92258	0,58346	—0,77950
0,53329	0,27253	0,04625	—2,58993	0,28001	—0,03284
—1,13511	—1,59121	0,86450	—1,29572	0,14646	0,01323
—0,91880	—0,49474	0,14476	0,17770	1,25338	—1,67662
—0,80882	1,76925	—0,36715	0,76364	0,42098	0,07587
0,31460	0,45145	—1,89040	0,38981	0,08787	0,47063
1,55496	—1,09954	0,01633	0,72571	1,25093	—0,53814
—0,32582	—0,86970	0,39531	0,13768	1,90308	1,17033
0,59707	—0,11086	—0,55791	—1,30754	1,85265	—0,54674
—1,16927	0,02844	0,19010	—0,94237	0,20415	—0,98447
—1,07939	1,47006	0,35473	—1,52027	—1,08324	—0,58491
1,21694	—0,56530	0,18585	—1,83668	1,97050	—0,59815
0,87042	—1,13588	1,03473	0,7161	—0,04811	0,17926
1,13458	—0,31375	1,56202	—0,69294	1,17135	—1,32862
2,04470	—0,25965	—0,58865	—0,07645	—1,05804	—0,91482
—0,69434	—0,08436	—0,25624	—1,66988	1,30545	0,47426
—0,53772	0,53531	—1,22637	—3,02140	—0,59577	1,00132
—1,32733	—0,33759	1,03060	—0,54580	—0,23225	0,10392
0,04033	1,57622	1,33441	1,65156	—0,71182	—0,30779
—0,28424	—1,16663	0,47497	0,07361	2,42125	0,72685
0,24899	—0,08626	0,49756	0,40923	—1,96678	1,88500
1,45549	—0,26556	0,75009	—1,03088	—0,31450	—0,37451

1,88523	—0,14977	0,41564	—0,76110	—0,76464	0,79361
—0,03411	0,64748	—0,33352	0,31492	—1,13727	0,47171
—0,89871	1,27177	1,16984	—0,32951	1,00677	1,67977
0,92440	0,29190	1,18233	0,15503	—1,69864	—1,28726
0,44321	—0,87575	0,47647	—0,08204	0,96620	1,75172
0,93744	0,71095	0,83272	0,21685	0,62014	0,71180
0,61337	0,26213	1,07172	—0,12685	0,62014	0,71180
—0,16228	—0,07928	0,13392	—0,69189	—0,45771	—0,26001
—0,69024	—0,83530	—0,95340	—1,26545	0,47579	0,00881
0,42489	0,16552	—0,12872	—0,78340	1,74506	1,52792
0,22529	—2,20838	—0,75310	0,16495	—0,14081	0,59707
0,40071	0,78492	—1,83057	—0,29442	—1,81607	1,20293
1,35684	1,80394	—1,93160	—1,46790	0,10943	—0,17759
—0,36936	—2,05793	—0,08841	—1,53381	—0,56597	—0,99123
0,31718	—1,05643	—0,53886	0,50917	—1,08451	—0,09405
0,60506	1,09159	0,14337	1,08358	—0,68854	0,79414
1,41064	—0,23442	1,06517	—0,64919	0,63901	—0,24378
—0,05594	1,15913	—0,48072	—0,13118	—0,02852	0,50478
1,05708	2,10808	—1,43281	0,97287	—0,91752	0,95401
—0,57351	0,43717	—0,67507	0,42614	0,77404	0,20731
—0,80513	1,06969	0,04466	0,93990	0,15357	—0,42490
—1,66232	1,45526	—0,20525	0,58185	0,31762	0,90619
—0,20202	1,36332	0,22494	0,24334	—0,40083	0,70073
—0,98690	1,02153	—1,58398	—0,59416	—0,34012	—1,15699
—0,84309	—0,51891	0,18980	0,57361	—1,34556	—0,55058
—1,40726	—1,13756	0,13096	1,02292	—0,64382	1,60902
—0,45359	0,20318	—0,32334	0,10701	—1,60242	—0,04919
—0,74428	—0,35905	0,06378	—0,42450	—1,00764	—1,32132
0,03318	1,18006	—0,61335	1,32924	1,41388	—0,97832
0,73465	—0,28429	0,48535	1,51328	0,89712	—1,55687
—0,41497	1,17105	—0,80146	1,21951	—0,08230	1,61098
1,29932	0,05062	0,06492	0,42794	—0,00725	1,45717
0,83366	0,12086	0,39334	0,14415	—0,14723	0,64937
—0,07725	—1,19358	—0,15646	—1,00885	—1,81957	0,92061
—0,21153	—1,00991	—0,01754	—0,82417	1,21958	0,42778
0,12488	1,07099	0,44658	—0,77144	1,62489	0,06603
0,42659	0,26724	0,18126	—2,48068	1,93347	0,98485
—2,30451	—1,76934	1,25498	—1,84506	0,50279	1,68049
—0,29176	0,11163	0,52747	—0,04975	0,03629	—1,71908
—1,48225	1,48142	—0,47593	—0,09573	2,03075	0,18111
—1,59479	1,20509	—0,12004	—1,60349	—1,07234	1,69602
—1,35897	—1,46805	1,24190	0,27655	—0,86407	—0,38314
—0,43524	—0,12073	—1,66437	—1,06952	0,66750	—0,33897
0,56555	0,22278	0,69510	—0,05419	—0,22585	2,24291
—0,02940	—0,62190	0,72581	0,40101	—0,46110	—0,66783
—0,93021	0,19269	—1,29342	—0,94466	0,12422	0,19035

—0,12148	0,83969	—2,28399	0,67366	—1,12470	—0,18828
0,92357	—1,58123	—1,53214	1,54409	0,37852	—0,45927
1,59091	—0,07322	—0,18900	—1,24957	1,48547	0,39189
—0,99990	0,45412	—0,41457	0,88073	1,39962	—0,46407
—0,33207	1,07927	1,00000	1,07927	2,10871	—0,46576
0,37470	0,27976	1,07756	1,39047	—0,83171	1,20350
—1,03123	—1,27308	—0,82437	—1,40940	—1,64404	—1,21188
—0,41323	2,03021	0,80790	2,04086	—0,56298	0,16965
—0,70766	—0,12437	—0,55562	—0,93529	0,83115	1,74044
1,78085	—0,15827	—0,06588	1,38707	0,43033	0,49612
—0,43409	—0,47424	0,90765	1,48323	—0,39711	—1,96098
—1,23133	0,74727	—1,67510	—0,43912	—1,38264	—0,20856
0,23482	0,61712	0,49337	0,27430	0,33414	—0,13175
0,41160	0,25730	—1,11725	—0,54752	—1,66439	—0,54807
—2,09246	—1,65285	0,32340	—1,11301	0,58158	—2,24024
—0,68431	0,97904	0,23398	1,23098	0,61426	1,32699
—0,45885	0,02462	—0,32560	—0,56560	0,64657	—1,92050
1,80924	—0,53617	—0,93941	0,35441	1,05232	—0,62317
—0,21008	1,42425	0,32741	0,51578	—0,57204	—0,26650
0,63256	0,31241	1,82304	—0,17616	—0,26486	0,79170
—0,54540	1,09515	1,22382	—0,52553	0,22839	1,06468
0,07688	—0,14111	—0,80327	1,17082	—0,26648	—0,24684
—0,06042	0,84446	—0,32663	0,64988	—1,15090	1,05055
—0,56165	2,23738	0,47888	—0,11315	0,25416	—1,30378
0,77863	—0,86408	—1,66208	1,52021	—1,05005	0,55190
0,44669	—1,60323	—1,34227	—0,63996	—0,05771	—1,51304
0,37321	—0,03274	—1,13451	—0,16969	—0,76759	0,37107
—0,38803	1,99085	2,31972	0,99555	0,52363	—0,31821
—1,74524	1,26157	0,05581	0,58038	1,88207	—0,47704
0,17140	—1,04332	—0,46121	0,25565	—1,15384	—0,43129
—1,54611	—0,12449	—1,26628	0,81343	—0,86590	—0,31855
—0,87710	—0,09539	0,87508	—0,34689	—0,05051	—0,16137
—0,99828	—1,16103	—1,04183	—0,42244	0,49856	0,76383
2,13871	—0,61564	—0,55329	0,30432	—0,12844	—0,97502
—0,14150	—0,06047	—1,05669	1,38734	—0,70824	—0,18208
0,64257	0,09515	—0,82430	—0,05285	—0,45424	1,53893
1,44637	—1,86475	—0,37822	—0,72786	2,02602	—0,37334
1,74075	0,00936	0,04102	—2,46806	1,20476	0,82821
1,01259	1,55098	1,24250	—0,98284	2,31547	1,37568

ТАБЛИЦА

за двоичните логаритми на числата от 1 до 100

x	$\log_2 x$	x	$\log_2 x$	x	$\log_2 x$
1	0,00000	36	5,16993	71	6,14975
2	1,00000	37	5,20945	72	6,16992
3	1,58496	38	5,24793	73	6,18982
4	2,00000	39	5,28540	74	6,20945
5	2,32193	40	5,32193	75	6,22882
6	2,58496	41	5,35755		
7	2,80735	42	5,39232	76	6,24793
8	3,00000	43	5,42626	77	6,26679
9	3,16993	44	5,45943	78	6,28540
10	3,32193	45	5,49185	79	6,30378
11	3,45943	46	5,52356	80	6,32193
12	3,58496	47	5,55459		
13	3,70044	48	5,58496	81	6,33985
14	3,80735	49	5,61471	82	6,35755
15	3,90689	50	5,64386	83	6,37504
16	4,00000	51	5,67242	84	6,39232
17	4,08746	52	5,70044	85	6,40939
18	4,16993	53	5,72792		
19	4,24793	54	5,75489	86	6,42626
20	4,32193	55	5,78136	87	6,44294
21	4,39232	56	5,80735	88	6,45943
22	4,45943	57	5,83289	89	6,47573
23	4,52356	58	5,85798	90	6,49185
24	4,58496	59	5,88264		
25	4,64386	60	5,90689	91	6,50779
26	4,70044	61	5,93074	92	6,52356
27	4,75489	62	5,95420	93	6,53916
28	4,80735	63	5,97728	94	6,55459
29	4,85798	64	6,00000	95	6,56978
30	4,90689	65	6,02237	96	6,58496
31	4,95420	66	6,04439	97	6,59991
32	5,00000	67	6,06609	98	6,61471
33	5,044439	68	6,08746	99	6,62936
34	5,08746	69	6,10852	100	6,64386
35	5,12928	70	6,12928		

ПРИЛОЖЕНИЕ 4

ТАБЛИЦА

За значенията на функцията $\eta(p)=p\log_2 p$

p	$\eta(p)$	Δ	p	$\eta(p)$	Δ
0	0	664	0,50	0,5000	—46
0,01	0,0664	464	0,51	4954	—48
0,02	1128	390	0,52	4906	—52
0,03	1518	340	0,53	4854	—54
0,04	1858	303	0,54	4800	—56
0,05	2161	274	0,55	4744	—59
0,06	2435	251	0,56	4685	—62
0,07	2686	229	0,57	4623	—65
0,08	2915	211	0,58	4558	—67
0,09	3126	196	0,59	4491	—69
0,10	3322	181	0,60	4422	—72
0,11	3503	168	0,61	4350	—74
0,12	3671	155	0,62	4276	—77
0,13	3826	145	0,63	4199	—78
0,14	3971	134	0,64	4121	—81
0,15	4105	125	0,65	4040	—83
0,16	4230	116	0,66	3957	—86
0,17	4316	107	0,67	3871	—87
0,18	4453	99	0,68	3784	—90
0,19	4552	92	0,69	3694	—92
0,20	4644	84	0,70	3602	—94
0,21	4728	78	0,71	3508	—96
0,22	4806	71	0,72	3412	—98
0,23	4877	67	0,73	3314	—99
0,24	4941	59	0,74	3215	—102
0,25	5000	53	0,75	3113	—104
0,26	5053	47	0,76	3009	—106
0,27	5100	42	0,77	2903	—107
0,28	5142	37	0,78	2796	—109
0,29	5179	32	0,79	2687	—112
0,30	5211	27	0,80	2575	—113
0,31	5238	22	0,81	2462	—114
0,32	5260	18	0,82	2348	—117
0,33	5278	14	0,83	2231	—119
0,34	5292	9	0,84	2112	—120
0,35	5301	5	0,85	1992	—121
0,36	5306	1	0,86	1871	—123
0,37	5307	—2	0,87	1748	—125
0,38	0,5305	—7	0,88	0,1623	—127

p	$\eta(p)$	Δ	p	$\eta(p)$	Δ
0,39	0,5298	—10	0,89	1496	—128
0,40	5288	—14	0,90	1368	—130
0,41	5274	—18	0,91	1238	—131
0,42	5256	—20	0,92	0,1107	—133
0,43	5236	—24	0,93	0,0974	—135
0,44	5210	—26	0,94	839	—136
0,45	5184	—29	0,95	703	—138
0,46	5153	—33	0,96	565	—139
0,47	5120	—37	0,97	426	—140
0,48	5083	—40	0,98	286	—142
0,49	5043	—43	0,99	144	—144
0,50	0,5000		1,00	0	

ЛИТЕРАТУРА

1. Беллман, Р. — Динамическое программирование, М., 1960.
2. Беллман, Р., Дрейфус, С. — Прикладные задачи динамического программирования, М., 1965.
3. Бирман, И. Я. — Оптимальное программирование, „Экономика“, М., 1968.
4. Гас, С. — Линейное программирование, М., „Физматгиз“, 1961.
5. Гольштейн, Е., Юдин Д. — Новые направления в линейном программировании, М., „Советское радио“, 1966.
6. Данциг, Д. — Линейное программирование, его применение и обобщения, М., „Прогресс“, 1966.
7. Эрроу, К., Грувиц, Л., Удзова, Х. — Исследования по линейному и нелинейному программированию, М., 1963.
8. Зуховицкий, С. И., Авдеева, Л. И. — Линейное и выпуклое программирование, М., „Наука“, 1964.
9. Курош, А. Г. — Курс высшей алгебры, М., „Физматгиз“, 1969.
10. Кюнци, Г. П., Крелле, В. — Нелинейное программирование, М., „Советское радио“, 1965.
11. Ланчастер, К. — Математическая экономика, М., „Советское радио“, 1972.
12. Хедли, Д. — Нелинейное и динамическое программирование, М., 1967.
13. Юдин, Д. В., Гольштейн, Е. Г. — Задачи и методы линейного программирования, М., „Советское радио“, 1964.
14. Корбут, Д. А., Финкельштейн, Ю. Ю. — Дискретное программирование, М., „Наука“, 1969.
15. Литл, Дж., Мурти, К., Суни, Д., Керел, К. — Алгоритм для решения задачи о коммивоежере. Экономии и матем. методы, 1965, № 1, 94—107.
16. Кънчев, К., Стойкова, Н., Пенкова, Бонев К. — Линейна алгебра и математическо програмиране, Варна, 1971.
17. Берж, К. — Теория графов и её применение, „Иностранной литературы, 1962.
18. Дрешер, М. — Стратегические игры, „Советское радио“, 1960.
19. Черчмен, У., Арноф, Л. — Введение в исследование операций, М., „Наука“, 1968.

20. Гантмахер, Ф. Р. — Теория матриц, „Наука“, 1967.
21. Сборник „Линейные неравенства и смежные вопросы под ред. Куна и Таккера, „Иностранная литература“, 1959.
22. Карлин, С. — Математические методы в теории игр, программировании и экономике, М., „Мир“, 1964.
23. Кинси, Мак Дж. — Введение в теорию игр, Физико-математической литературы, Москва, 1960.
24. Вентцель, Е. С. — Теория вероятностей, М., „Наука“, 1964.
25. Новиков, О. А., Петухов, С. И. — Прикладные вопросы теории массового обслуживания, М., „Советское радио“, 1969.
26. Чуев, Ю. В. и др. — Основы исследования операций в военной технике, М., „Советское радио“, 1965.
27. Чуев, Ю. В. — Исследование операций в военном деле, М., „Воениздат“, 1970.
28. Мильграм, Ю. Г., Попов И. С. — Боевая эффективность авиационной техники и исследование операций, изд. ВВИА им. профессора Жуковского, 1970.
29. Фендриков, Н. М., Яковлев В. И. — Методы расчетов боевой эффективности вооружения, М., „Воениздат“, 1971.
30. Шишонок, Н. А. и др. — Основы теории надежности. М., „Советское радио“, 1964.
31. Основные вопросы теории и практики надежности. Сборник трудов семинара секции надежности. М., „Сов. радио“, 1971.
32. Оре, О. — Теория графов, М., „Наука“, 1968.
33. Алферова, Е. В., Езжева, В. П. — Применение теории графов в экономических расчетах, М., „Статистики“, 1971.
34. Форд, Л. Д. — Потоки в сетях. М., 1967.
35. Хартманова, Н. Г. — Мрежови графици и приложението им посредством ЦЕИМ, С., „Техника“ 1971.
36. Кофман, А., Дебацей, Г. — Сетевые методы планирования и их применение, М., „Прогресс“, 1968.
37. Глазман, И. М., Новиков, В. Г. — Основы сетевого планирования и управления, Харьков, 1966.
38. Скачко, П. Т., Волков, П. Т., Куликов, В. М. — Планирование боевых действий и управление войсками с помощью сетевых графиков, М., „Воениздат“, 1968.
39. Голенко, Д. И. — Статистические методы сетевого планирования и управления, М., „Наука“, 1968.
40. Утеуш, Э. В. и др. — Введение в кибернетическое моделирование, М., „Энергия“ 1971.
41. Болтянский, В. Г. — Математика и оптимальное управление, М., „Знание“, 1968.
42. Морозов, К. Е. — Математические модели в кибернетике, М., „Знание“, 1968.
43. Кобринский, А. Е. и др. — Кибернетика в управление производством, М., „Экономика“, 1967.

44. Воронов, А. А. — Исследование операций и управление, М., „Наука“, 1970.
45. Амосов, Н. М. — Моделирование сложных систем, М., „Наука“ 1970.
46. Ткаченко, П. Н. и др. — Математические модели боевых действий, М., „Сов. радио“, 1969.
47. Фендриков, Н. М. и др. — Методы расчетов боевой эффективности вооружения, М., „Воениздат“, 1971.
48. Милютенков, Д. М. — Основы методики военно-научного исследования, М., „Воениздат“, 1969.
49. Соболь, И. М. — Метод Монте-Карло, М., „Наука“, 1972.
50. Вентцель, Е. С. — Введение в исследование операций, М., „Сов. радио“, 1964.
51. Емелянов, Л. А. и др. — Теория поиска в военном деле, М., „Воениздат“, 1964.
52. Математика в бою. Сборник систем под редакцей Жукова, В. Н., М., „Воениздат“, 1965.

СЪДЪРЖАНИЕ

Част първа

Общи принципи за приложение на изследването на операциите към военните задачи 5
Въведение 5
1. Що е изследване на операциите. 5
2. Основни понятия в изследване на операциите. 8
3. Значение на изследването на операциите за военната наука. 10
Глава първа. Критерии в изследването на операциите 13
1. Основни изисквания към критериите за ефективността. . . 13
2. Оценка на ефективността в диапазон от условия. 16
3. Ограничаващи условия и смисъл на тяхното въвеждане. . . 19
4. Оценка на ефективността по няколко критерия. 20
5. Понятие за критериите на тактическата и оперативната ефективност. 23
Глава втора. Основни методи за изследване на бойните действия 25
1. Прогнозиране на бойните действия. 26
2. Общи и специални методи за изследване. 32
3. Моделиране на бойните действия на войските. 34
4. Експериментиране. 44
Глава трета. Информация, въвеждана в моделите. 48
1. Общи положения и видове параметри. 48
2. Външни условия, въвеждани в моделите. 51
3. Характеристики, свързани с разузнаването. 54
4. Характеристики, свързани с маньовъра на войските, управлението и осигуряването. 57
А. Придвижване на войските 57
Б. Управление на войските 60
В. Осигуряване на бойните действия на войските 61
5. Характеристики, свързани с нанасянето на ударите и огъня на артилерията. 63
6. Стойност на въоръжението. 67
7. Надеждност на въоръжението. 70
8. Характеристики на въоръжението, свързани с въздействието на противника. 73

Част втора

Методи за изследване на операциите . . . 75
Раздел I. Мрежово планиране и управление. . 75
Глава първа. Въведение в теорията на графите. 75
1. Исторически бележки. 75
2. Множества и многозначни изображения. 76
3. Основни понятия от теорията на графите. 78
4. Видове графи. 81

5. Представяне на граф с матрица. 86
6. Транспортна мрежа. 87

Глава втора. Мрежово планиране и управление. . . . 90

1. Същност и характеристика на метода. 90
2. Основни понятия и правила за построяване на мрежовия модел 92
3. Изготвяне на задание (описание) на операцията. 97
4. Построяване на мрежовия модел. 101
5. Параметри (числени характеристики) на мрежовия график и тяхното изчисляване 104
6. Построяване и изчисляване на мрежовия график чрез електронноизчислителна машина. 115
7. Анализ на получените резултати. Оптимизиране на мрежовия модел по време и по ресурси 118
8. Вероятностни параметри на мрежовите модели 123
9. Управление на операцията посредством мрежов график . . . 127

Раздел II. Математическо програмиране . . 129

Глава първа. Изпъкнали множества и изпъкнали функции 132

1. Множества и пространства 132
2. Вектори и матрици 138
3. Изпъкнали множества и конуси 149
4. Квадратични форми и изпъкнали функции 158

Глава втора. Линейно програмиране 168

1. Обща задача на линейното програмиране 168
2. Приложение на линейното програмиране във военното дело. 170
3. Геометрична интерпретация и геометрично решаване на простите задачи на линейното програмиране 173
4. Метод на последователното подобряване на плана (симплексен метод) 181
5. Метод на изкуствения базис. 207
6. Модифициран симплексен метод 211
7. Двойствена проблема в линейното програмиране 226

Глава трета. Транспортни и разпределителни задачи 240

1. Обща постановка и математически модел 240
2. Свойства на транспортната задача 243
3. Методи за решаване на задачи от транспортен и разпределителен тип 254
4. Мрежова постановка на транспортната задача. 266
5. Транспортна задача по критерия време 275

Глава четвърта. Параметрично линейно програмиране 280

1. Случай, когато компонентите на целевия вектор зависят линейно от един параметър (случай $C=C'+tC''$). 281
2. Случай, когато компонентите на вектора на ограниченията зависят линейно от един параметър (случай $B=B'+tB''$) и общ случай 286

Глава пета. Целочислено линейно програмиране . . 291

1. Задачи на целочисленното линейно програмиране. 291
2. Метод на сеченията (алгоритъм на Гомори). 295
3. Комбинирани методи 304

Глава шеста. Нелинейно програмиране 313

1. Постановка на задачите на нелинейното програмиране. . 313
2. Изпъкнало програмиране 314
3. Теорема на Кун и Такер 318
4. Методи за решаване на задачите на изпъкналото програмиране. 325
5. Квадратично програмиране. 330
6. Метод на Вулф и Франк. 334

Глава седма. Динамично програмиране 345

1. Едномерен процес на разпределение. 345
2. Многомерен процес на разпределение. 353
3. Задачи за замяна на оборудването. 357
4. Динамично програмиране при транспортните проблеми. . . 360

Глава осма. Теория на игрите 364

1. Предмет, основни понятия и класификация на игрите. . . . 364
2. Правоъгълни игри със седлова точка. 369
3. Правоъгълни игри със смесени стратегии. 375
4. Свойства на оптималните смесени стратегии. 384
5. Съотношение на превъзходство на една стратегия над друга. 392
6. Методи за приближено решаване на правоъгълни игри. . . 403
7. Приложение на теорията на игрите във военното дело. . . 411

Раздел III. Вероятностни методи 419

Въведение 419

1. Случайни събития. Вероятност. 419
2. Случайни величини. 419
3. Случайни вектори. Функции от случайна величина. . . . 425

Глава първа. Теория на информацията 429

1. Предмет и основни понятия. 429
2. Приложение на теорията на информацията при предаване на съобщение по свързочните канали. 441

Глава втора. Теория на надеждността. 446

1. Предмет на теорията на надеждността. 446
2. Основни понятия и определения. 449
3. Количествени показатели на надеждността. 451
4. Основи на разчета на надеждността. 461

Глава трета. Теория на масовото обслужване. . . . 467

1. Предмет на теорията на масовото обслужване. 468
2. Използуване на теорията на масовото обслужване във военното дело. 469
3. Входящ поток от заявки. 472
4. Време на обслужване. 484
5. Случайни процеси с непрекъснато отчитане на времето. . . 487

6. Системи за масово обслужване с отказ. 492
7. Системи за масово обслужване с ограничено време за чакане. 523
8. Системи за масово обслужване с неограничено време за чакане. 530
9. Затворени системи за масово обслужване. 534

Глава четвърта. Метод на статистическите изпитания (Монте Карло) 541

1. Същност на метода на статистическите изпитания и използването му във военното дело. 542
2. Получаване и използуване на случайните числа при статистическото моделиране. 552
3. Моделиране на случайни процеси. 560
4. Моделиране на сложни системи. 566
5. Точност на метода на статистическите изпитания. Определяне на необходимия брой реализации. 570

Глава пета. Теория на поиска във военното дело . . . 586

1. Кинематични основи на теорията на поиска. 588
2. Възможности за появяване на обекта на поиска в зоната за откриване. 589
3. Закон за откриване на целите със средства за наблюдение. . 591
4. Теоретично обосноваване на способите на поиска. 591
5. Оптимално разпределение на поисковите усилия. 596

Глава шеста. Математическо описание на динамиката на бойните действия на войските. . 598

1. Общи положения. 599
2. Модели, описващи динамиката на боя между две групировки при наличие на информация и възможност за пренасяне на огъня. 602
3. Модели, описващи динамиката на боя между две групировки при липса на информация и без пренасяне на огъня. . . . 625
4. Модели за определяне на средния брой огневи единици, намиращи се в дадено състояние в динамиката на боя (метод динамика на средните). 634

Заключение. 641
Литература. 654

Редактор И. Узунов
Худ. редактор Гичо Гичев
Техн. редактор Йордан Славков
Коректори Колектив

Дадена за печат на 21. V. 1974 г.
Подписана за печат на 21. III. 1975 г.
Издателски коли 37,19 Печатни коли 41,25+6 приложения
ЛГ—II/14б Формат 60×84/16 Тем. № 1979/87
Издателска поръчка № 21 Техническа поръчка № 1402

Печатница на Държавното военно издателство